А.И.Плис
Н.А.Сливина

MATHCAD:

математический практикум для экономистов и инженеров

Рекомендовано
Министерством общего
и профессионального образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по экономическим
и техническим специальностям

МОСКВА
"ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА"
1999

Внимание! Файл получен с помощью ссылки, расположенной в каталоге сайта ITBookZ.ru.

Описание сайта:
На сайте Вы найдёте много электронных книг, которые можно бесплатно скачать для **ознакомления**, без регистрации! Сайт полезен человеку, так или иначе занятому в IT сфере, т.е. работающему с компьютером.

Темы электронных книг:

- Программирование
- САПР
- Операционные системы
- WEB-Дизайн
- MS Office
- Сети
- Базы данных
- Безопасность
- 1С
- Графика, Дизайн, 3D
- Железо
- Создание игр
- Математика
- Мультимедиа
- Журналы IT тематики.
- И многое другое!

Море электронных книг по компьютерной тематике!
Постоянное пополнение!
Заходите, выбирайте и скачивайте!
ITBookZ.ru

Авторское право:
Данная книга предоставлена исключительно для **ознакомительных** целей и должна быть удалена с вашего компьютера или любого иного носителя информации сразу после поверхностного ознакомления с содержанием.

Копируя и сохраняя данную книгу, Вы принимаете на себя всю ответственность, согласно действующему международному законодательству, а именно закону об авторском праве и смежными с ним законами.

Публикация данного документа не преследует за собой никакой коммерческой выгоды, а является рекламой бумажного аналога.

Правообладателям:
Все авторские права сохраняются за правообладателем. Если Вы являетесь автором данного документа и хотите дополнить его или изменить, уточнить реквизиты автора или опубликовать другие документы, пожалуйста, свяжитесь с нами через форму обратной связи на сайте. Мы будем рады услышать ваши пожелания и принять меры по устранению недоразумений.

С уважением,
Администрация ITBookZ.ru

Каталог ITBookz.ru после прочтения удалить

УДК 681.3:51 (076.5)
ББК 22.1с51я7Э
П38

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра прикладной математики
Московского государственного института
электроники и математики (технический университет)

М.И. Шабунин.
доктор педагогических наук, профессор
Издание осуществлено при финансовой поддержке
Научно-технической компании
ГЕММА-М

Плис А.И., Сливина Н.А.
П38 Mathcad: математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. -М.: Финансы и статистика, 1999. - 656 с.: ил.

ISBN 5-279-02155-5

Пособие представляет собой сборник заданий по стандартному курсу высшей математики для экономических и некоторых инженерных специальностей. Задания включают постановку задачи, краткое описание математического метода ее решения, анализ результатов вычислений. Примеры содержат все необходимые рекомендации по работе с математической моделью и пакетом.

Для студентов экономических и инженерных вузов, преподавателей математики, научных работников, пользователей компьютеров, применяющих математические методы в практической работе.

2404000000 - 014
П ———————————
145 - 98
010 (01) - 99

УДК 681.3:51(076.5)
ББК 22.1с51я73

i Плис А.И., Сливина Н.А., 1999

ISBN 5-279-02155-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Чрезвычайная простота интерфейса Mathcad сделала его одним из самых популярных и безусловно самым распространенным в студенческой среде математическим пакетом. Он предоставляет пользователю обширный набор инструментов для реализации графических, аналитических и численных методов решения математических задач на компьютере. Выполняя рутинные или несущественные (в контексте изучаемого раздела) операции, пакет позволяет студенту, не владеющему в полной мере техникой математических преобразований, самостоятельно выполнить громоздкие вычисления, решить содержательные задачи, приобрести устойчивые навыки решения прикладных задач. При этом учащийся общается с вычислительной средой на уровне понятий, идей, общих подходов и за небольшое время может рассмотреть самостоятельно много примеров. Эти свойства общения со средой особенно важны для развития творческого, критического и независимого мышления, поскольку учащийся может всесторонне исследовать новые объекты, выделить общие закономерности и сформулировать обобщающие утверждения на основе собственных наблюдений.

Пакет Mathcad можно использовать как средство модернизации курсов, как среду для общения учащегося с преподавателем, как средство контроля и самоконтроля, как инструмент помощи учащемуся при самостоятельной работе. При создании учебных курсов Mathcad помогает преподавателям подготовить динамичные яркие иллюстрации, перенести акценты на концептуальные аспекты изучаемых проблем, обогатить курс примерами, возникающими в различных областях науки и практики, которые обычно не рассматриваются в учебных курсах из-за их сложности. Лекционные демонстрации можно подготовить таким образом, что каждый учащийся получит столько примеров, сколько именно ему необходимо для понимания существа вопроса. Для одного и того же раздела можно подготовить самые различные по объему, форме и глубине учебные курсы.

Предлагаемая читателю книга представляет собой сборник компьютерных занятий в среде Mathcad по стандартному курсу (с включением некоторых специальных разделов) высшей математики для инженерных и экономических вузов. Часть занятий целиком отводится экономическим приложениям.

В книге приведены примеры решения задач в среде Mathcad 7.0, интерфейс которого мало отличается от интерфейса следующей версии — Mathcad 8.0 (Mathcad 8.0 начал распространяться в России с конца 1998 г.). Структура практикума такова, что большая часть материала не связана с конкретным программным обеспечением и его можно успешно использовать не только с любой другой версией Mathcad, но и с другими математическими пакетами.

Каждый раздел практикума посвящен изучению определенной темы или метода решения математической задачи и содержит:

- теоретическое введение, включающее определения и сводку основных результатов;
- описание математического метода решения задачи;
- формулировку одного или нескольких заданий с индивидуальными вариантами для группы из 20 студентов;
- описание порядка выполнения работы в среде Mathcad;
- пример решения типовой задачи, включающий фрагмент или полный текст рабочего документа Mathcad, снабженный комментариями и краткими указаниями, помогающими реализовать решение задачи на компьютере.

Цель практикума — научить быстро и легко решать в среде Mathcad простейшие математические задачи. Поэтому в книге нет полного описания возможностей и функций пакета, а представлены только операции, вынесенные в меню и кнопочные панели, а также наиболее часто используемые встроенные функции.

Книга состоит из шести глав. В начале каждой главы приводится краткое описание функций и инструментов Mathcad, используемых при решении задач главы, и даны примеры использования этих инструментов. Искушенный читатель, столкнувшийся с необходимостью решить конкретную задачу, возможно, ограничится чтением этого раздела.

В главе 1 дана краткая характеристика пакета Mathcad, описаны простейшие приемы работы с ним и приведены примеры решения основных задач элементарной математики. Глава в основном адресована начинающим пользователям. Авторы предполагают, что эта категория читателей получит представление о возможностях Mathcad и, выполнив задания, справится с предложенными в следующих главах задачами. Пользователь, знакомый с работой в среде Mathcad, сможет здесь познакомиться с особенностями новой версии пакета.

В главе 2 рассматриваются задачи линейной алгебры. Здесь описаны методы решения практически всех задач стандартного курса: от простейших операций с матрицами до элементарной теории линейных

операторов. В качестве приложений приводятся задачи межотраслевого баланса, геометрическое решение задачи линейного программирования и задача аппроксимации экспериментальных данных методом наименьших квадратов.

В главе 3, самой большой по объему, описывается решение основных задач математического анализа функций одной и нескольких переменных, начиная с вычисления предела последовательности и заканчивая исследованием сходимости тригонометрических рядов. При изложении материала широко используются графические возможности пакета. Привлечение графики позволяет наглядно продемонстрировать и объяснить многие тонкие и традиционно трудные для понимания математические понятия. Некоторые разделы главы знакомят читателей с понятиями и функциями, используемыми в экономике (функции спроса и предложения, производственные функции одной и нескольких переменных, эластичность и др.).

При отборе материала главы 4, посвященной дифференциальным уравнениям, авторы достаточно далеко отошли от общепринятого стиля изложения этого раздела в стандартном курсе высшей математики. Здесь практически не рассматриваются аналитические методы решения, занимающие в обычных курсах львиную долю учебного времени. Основное внимание уделено численным методам решения задачи Коши, включая методы решения жестких систем, а также качественным аспектам теории дифференциальных уравнений. В главе представлены традиционные приложения качественной- теории — модели конкурирующих видов и экономических систем.

В главе 5, где собраны задачи теории вероятностей, дано много полезной справочной информации о наиболее часто используемых распределениях, их числовых характеристиках и свойствах, приведено множество графиков.

Последняя глава посвящена статистическим методам. Здесь описаны методы решения практически всех основных задач анализа данных — от простейших описательных статистик и построения гистограмм до факторного анализа и проверки статистических гипотез, приведено много полезной справочной информации. В процессе решения задач этой главы читатель не только научится оценивать параметры распределений, но и познакомится с методами статистического моделирования и численного эксперимента.

В приложении приведены варианты индивидуальных заданий для группы из 20 студентов.

Изложение материала каждой главы независимо. Поэтому, если читатель хочет научиться решать задачи определенного раздела математики, он может ограничиться изучением только нужной ему главы.

Книга адресована широкому кругу читателей: студентам, преподавателям вузов, специалистам, использующим пакет в практической работе.

Преподаватели математических дисциплин найдут в практикуме методически полностью проработанные компьютерные занятия. Авторы предполагают, что для многих коллег материал книги послужит творческим импульсом для подготовки собственных учебных курсов на базе универсальных математических пакетов.

Преподаватели смежных дисциплин, использующих математические модели, смогут расширить круг рассматриваемых задач, поскольку компьютер снимает многие ограничения на сложность используемых моделей.

Студенты инженерных вузов найдут в книге описание практически всех математических задач, встречающихся в инженерных расчетах.

Студенты экономических вузов, поручив компьютеру выполнение рутинных вычислений, смогут сосредоточиться на анализе содержательных, качественных свойств исследуемых моделей.

Пользователи получат сборник примеров решения стандартных математических задач в среде Mathcad.

Авторы приносят глубокую благодарность проф. М.И. Шабунину и проф. Е.М. Воробьеву за полезные замечания и доброжелательное отношение к данной работе, И.П. Боровикову, директору корпорации СофтЛайн, по инициативе которого была написана эта книга, — за предоставленную для работы версию пакета. (Корпорация СофтЛайн (127087, Москва, а/я 362, root@softline.msk.ru, http://www.softline.ru) является эксклюзивным дистрибьютером Mathcad в России.) Авторы считают своим приятным долгом выразить особую благодарность А.Н. Канатникову, вдумчивые замечания которого были им чрезвычайно интересны и полезны.

ГЛАВА 1
ВВЕДЕНИЕ В MATHCAD

1.1
ЧТО ТАКОЕ MATHCAD?

Mathcad — программное средство, среда для выполнения на компьютере разнообразных математических и технических расчетов, предоставляющая пользователю инструменты для работы с формулами, числами, графиками и текстами, снабженная простым в освоении графическим интерфейсом*.

В среде Mathcad доступны более сотни операторов и логических функций, предназначенных для численного и символьного решения технических проблем различной сложности. Mathcad содержит:

- обширную библиотеку встроенных математических функций;
- инструменты построения графиков различных типов;
- средства создания текстовых комментариев и оформления отчетов;
- конструкции, подобные программным конструкциям языков программирования, позволяющие писать программы для решения задач, которые невозможно или очень сложно решить стандартными инструментами пакета;
- удобно организованную интерактивную систему получения справки и оперативной подсказки.

Программные средства такого типа в отечественной литературе называют *универсальными математическими пакетами*, *системами* или *средами*.

При проектировании Mathcad ставилась цель — создать мощное, гибкое и простое в использовании средство для проведения инженерных расчетов. Для достижения этой цели в Mathcad реализованы следующие соглашения:

- используется традиционный для математической литературы способ записи функций и выражений;

---

* *Графический интерфейс* — совокупность способов взаимодействия пользователя с программой с помощью пиктограмм, диалоговых окон, меню и других инструментов, расположенных на экране.

- пользователю предоставляется интерфейс WYSIWYG* (не существует скрытой информации — все показывается на экране, напечатанные документы выглядят на бумаге так же, как на экране);
- простые выражения для последующей обработки вводятся с клавиатуры;
- для облегчения работы предусмотрены панели инструментов;
- построение графиков, вычисление интегралов, суммирование рядов и другие относительно сложные операции выполняются заполнением в рабочем документе помеченных позиций;
- возможности, предоставленные средой, раскрываются пользователю в соответствии с его потребностями; если, например, пользователь не применяет матричных вычислений, то он может считать, что в пакете их нет;
- для реализации приближенных вычислений отобраны самые надежные стандартные алгоритмы;
- наиболее часто используемые процедуры Mathcad оформлены в виде набора легко доступных текстов — шпаргалок (**Quick Sheets**), содержание которых легко "перетаскивается" в рабочий документ пользователя;
- в течение всего сеанса работы пользователю предоставлена обширная, легко доступная и логично организованная справочная система, снабженная собственным простым интерфейсом, гипертекстовыми ссылками и др.;
- доступен "настольный" справочник, содержащий множество полезных формул, математических и физических констант;
- Mathcad предоставляет пользователю оперативные возможности электронной таблицы и текстового процессора.

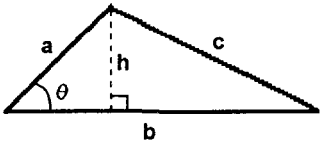
Основное отличие Mathcad от других программных средств этого класса состоит в том, что математические выражения на экране компьютера представлены в общепринятой математической нотации — имеют точно такой вид, как в книге, тетради, на доске.

Записав в привычной форме математическое выражение, можно выполнить с ним самые разнообразные символьные или численные математические операции: вычислить значение, выполнить алгебраические преобразования, решить уравнение, продифференцировать, построить график и т.п. Можно снабдить вычисления текстовыми

*WYSIWYG — What you see is what you get (Что видишь — то и получишь). Это соглашение означает, что вид выражения на экране полностью совпадает с тем, что передано процессору для обработки.

комментариями, иллюстрациями, построенными в других приложениях, и получить полный отчет о проделанных вычислениях, как, например, приведенный ниже текст о вычислении площади треугольника.

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА



Площадь:

$\frac{1}{2}\cdot h\cdot b$ **Вычисление площади по высоте h и основанию b**

$\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$ **Формула Герона, p - полупериметр**

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin(\theta)$ **Вычисление площади по двум сторонам и синусу угла между ними**

Пример: Найдем площадь тругольника с высотой h=12.3cm и основанием b=32.6cm

Решение: $b := 32.6\ cm \quad h := 12.3\ cm \quad S := \frac{1}{2}\cdot b\cdot h \quad S = 0.02\cdot m^2$

1.2 ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ MATHCAD

Mathcad 7 поставляется в двух конфигурациях: Mathcad 7 Professional и Mathcad 7 Standard. В приведенном ниже перечне знаком **pro** отмечены функции и инструменты, реализованные только в профессиональной версии пакета*.

Расширенные возможности математических операций:

- операции с действительными, комплексными числами, а также с величинами, имеющими размерность;

*Ниже основные характеристики Matcad 7 описываются так, как они представлены разработчиками пакета [24].

- операторы и логические функции, выполняющие действия с числами, векторами и матрицами;
- операторы дифференцирования, интегрирования, суммы и произведения;
- вычисление значений и построение графиков элементарных и специальных функций;
- быстрое преобразование Фурье;
- немедленная обработка любого символьного выражения;
- символьное решение уравнений и систем;
- символьное интегрирование, дифференцирование, вычисление пределов и суммирование рядов;
- простейшие алгебраические преобразования: раскрытие скобок, приведение подобных, разложение на множители, разложение на простейшие дроби;
- прямые и обратные интегральные преобразования;
- обращение и транспонирование матриц, вычисление определителей, собственных значений и собственных векторов;
- 20 операций с массивами, вложенными массивами и блоками матриц; 6 функций для вычисления размеров и границ массивов;
- более сложные операции линейной алгебры, включая разложения Холецкого, LU-, QR- и SVD-разложения (**pro**);
- 13 функций для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, систем обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и граничных задач (**pro**, в Mathcad Standard только одна функция);
- 64 статистические функции для анализа данных, от простейших описательных статистик и построения гистограмм до параметрических и непараметрических критериев согласия, дисперсионного анализа и метода Монте-Карло;
- аппроксимация сплайнами и построение интерполяционных многочленов;
- сглаживание данных, анализ временных рядов, метод наименьших квадратов.

Улучшенный интерфейс:

- поддерживаются все соглашения и возможности интерфейса Windows NT и Widows 95, включая контекстные меню;
- упрощены ввод и редактирование выражений;
- поддерживается OLE2-технология* клиент-сервер;

*OLE (Object Linking and Embedding — связь и внедрение объектов) — механизм связи и внедрения объектов из других приложений.

- автоматически поддерживается OLE2-технология, использующая VBScript;
- новые приемы форматирования областей рабочего документа.

Автоматическое преобразование размерностей:

- определена полная система единиц СИ;
- определены наиболее часто используемые единицы систем MKS, CGS, US;
- выполняются автоматическая проверка и преобразование размерности.

Ввод-вывод данных:

- быстрый ввод и удаление данных;
- преобразование данных из Excel, m-файлов MATLAB, ASCII-файлов и пр.;
- подготовка компонент для Excel, MATLAB и Axum (**pro**).

Мощное функциональное программирование (pro):

- процедурные операторы для построения функциональных программ;
- определение локальных переменных, строк, данных сложной структуры и вложенных массивов;
- выполнение циклов, рекурсии и ветвления с помощью операторов Return и Continue;
- контроль ошибок времени исполнения;
- использование в программах символьных выражений.

Math Connex (pro)*:

- определение, связывание и перетаскивание (drag-and-drop) компонент MathConnex, включая данные и выходные таблицы в форматах Mathcad, Excel, MATLAB и др.;
- объединение данных и управление данными и вычислениями в различных приложениях;
- анализ и отладка вычислений;
- ConnexScript — для записи математических выражений;
- автоматическое внедрение OLE-компонент, использующих языки VB Script и Jscript.

*Math Connex — это среда для визуального объединения и связывания различных приложений и данных в единую вычислительную систему.

Графика:

- интерактивная двумерная и трехмерная графика; в том числе декартовы, параметрические, полярные, точечные, линии уровня, параметрические поверхности, гистограммы, векторные поля;
- трассировка, анимация;
- быстрое построение плоских графиков.

Форматирование текстов:

- проверка орфографии;
- форматирование текстов, вставка формул в текст, форматирование страниц;
- предварительный просмотр текста перед печатью.

Новые возможности Web:

- постоянный доступ к поисковым программам во время работы в среде пакета с помощью Internet Explorer;
- поддержка интерфейса MAPI;
- определение локальных гипертекстовых ссылок или ссылок в Web;
- присоединение к Collaboratory — общедоступному Internet-форуму, объединяющему всемирное сообщество пользователей Mathcad.

Открытость (pro):

- определение собственной библиотеки функций;
- расширение предметно-ориентированных функциональных возможностей добавлением специализированных пакетов;
- расширение графических возможностей подключением пакета Axum во время работы;
- определение собственного стиля математической записи.

Новые справочные возможности:

- 300 шпаргалок (быстрых подсказок);
- технические справочные таблицы и руководство по прикладной статистике;
- руководство по решению уравнений в Mathcad;
- руководство по программированию в Mathcad;
- постоянно обновляемая Web-библиотека документов Mathcad и Электронных книг;
- контекстная справка, справка с оглавлением и инструментами поиска.

1.3
НАЧАЛО РАБОТЫ В СРЕДЕ MATHCAD

Установив пакет, создайте на рабочем столе* значок Mathcad 7.

— значок Mathcad. Двойной щелчок** по нему вызывает на экран компьютера заставку пакета (рис. 1.1), которая находится на экране все время, пока производится автоматическая загрузка программ, необходимых для работы пакета.

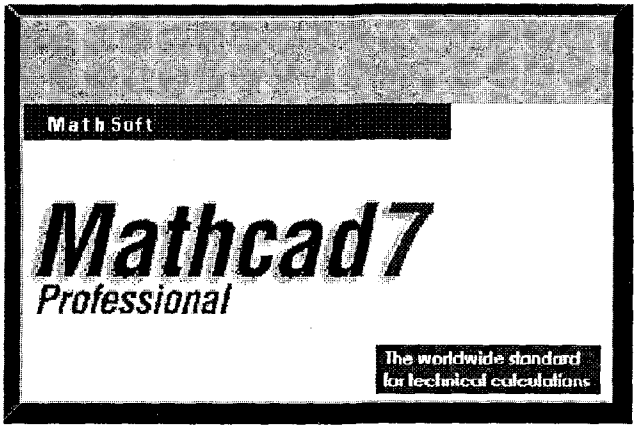


Рис. 1.1. Заставка пакета

Через некоторое время заставка исчезает, и на экране открывается окно, которое в терминологии Windows называется *окном приложения****, а для нас это окно Mathcad (рис. 1.2) — пространство, где размещены все требуемые для работы инструменты и рабочий документ*****, т.е. пространство, в котором будут вводиться команды и выражения для вычислений и в котором будут отображены результаты вычислений. В дальнейшем будем говорить "на экране", имея в виду "в окне Mathcad".

---

*Рабочий стол (desktop) — часть экрана в окне Windows 95, в которой располагаются значки прикладных программ (windows-приложений).

**В дальнейшем словами "щелкните по" будем обозначать щелчок левой клавишей мыши в момент, когда указатель мыши установлен в нужной позиции.

***В литературе о компьютерах *приложением* (**Application**) принято называть любую программу, работающую под управлением той или иной операционной системы. При этом программы, работающие в среде Windows, называют *windows-приложениями*.

****Возможно, название *рабочий лист* более близко к английскому **worksheet**, однако авторы предпочли термин *рабочий документ Mathcad*, или *документ Mathcad*, желая этим термином подтолкнуть пользователей к аккуратному и содержательному оформлению процесса и результатов вычислений.

Верхняя строка окна (см. рис. 1.2) — стандартная строка windows-приложений. В ней слева приведено имя приложения — **Mathcad Professional**, затем имя файла, в котором сохраняются результаты работы (на рис. 1.2 это надпись: [**Вид окна Mathcad 7**]), а справа — три стандартные функциональные кнопки для работы с окнами Windows 95 — [_] [□] [X], соответственно означающие: свернуть, развернуть на полный экран и закрыть окно приложения.

Все, что расположено ниже, относится к работе в среде пакета.

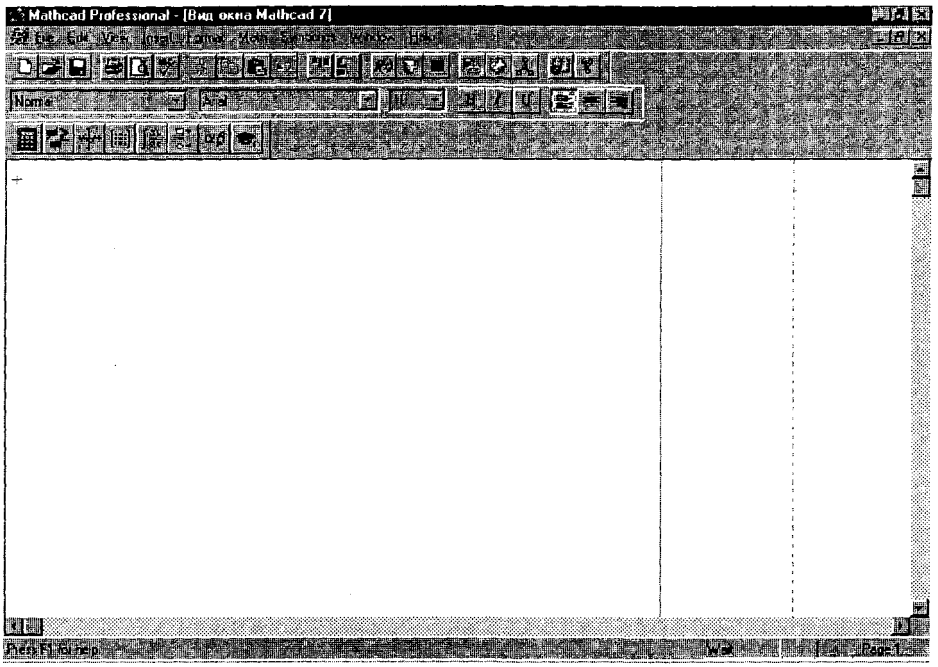


Рис. 1.2. Окно Mathcad 7

Вторая строка экрана — строка меню (рис. 1.3).

Рис. 1.3. Строка меню Mathcad 7

Меню имеет набор стандартных для windows-приложений пунктов: **File** (Файл) **Edit** (Редактировать) **View** (Просмотр) **Format** (Формат) **Window** (Окно) **Help** (Помощь) и специфические для Mathcad пункты: **Insert** (Вставка) **Math** (Математика) **Symbolics** (Символьные операции).

Щелчок по пункту меню открывает ниспадающее меню со списком доступных в данном пункте меню операций. Правила работы с меню более подробно описаны ниже.

Следующие три строки окна содержат панели инструментов, часть из которых — стандартные для windows-приложений операции работы с файлами и текстом (рис. 1.4), а другая часть — специфические функции Mathcad (рис. 1.5), например, кнопка с надписью $f(x)$ открывает список встроенных функций.

Рис. 1.4. Панель с кнопками управления файлами и форматирования текста

Рис. 1.5. Панель с кнопками специфических операций Mathcad

В отдельной строке расположена панель инструментов для выполнения математических операций (рис. 1.6), которую в дальнейшем будем называть *панелью математических инструментов* или *панелью математических операций*.

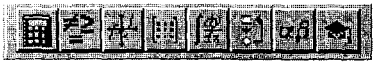


Рис. 1.6. Панель математических инструментов

Математические операции в Mathcad разделены на группы и каждая кнопка панели математических инструментов открывает доступ к определенной группе операций — щелчок по кнопке этой панели открывает другую, дополнительную, панель, на которой собственно и расположены кнопки математических операций соответствующей группы (подобно тому, как щелчок по пункту меню открывает ниспадающее меню). Более подробно правила работы с панелями описаны ниже.

Под строками панелей инструментов находится окно рабочего документа Mathcad — пространство, в котором располагаются все введенные команды и выражения, куда Mathcad выводит результаты вычислений и графики и где размещаются текстовые комментарии. Содержимое этого окна можно редактировать, форматировать, сохранять в файлах на диске, печатать и др. Окно снабжено двумя полосами

прокрутки — вертикальной и горизонтальной. Щелчком по соответствующей кнопке со стрелкой или "перетаскиванием" кнопки-"лифта" можно просматривать фрагменты окна, находящиеся вне пределов экрана.

И, наконец, последняя, нижняя строка окна — строка состояния (рис. 1.7). В ней записаны рекомендации к дальнейшим действиям, описано текущее состояние среды и указан номер отображенной на экране страницы рабочего документа.

Рис. 1.7. Строка состояния окна Mathcad

В приведенном на рис. 1.7 примере в строке состояния указано, что видна первая страница рабочего документа (**Page 1**), что система находится в состоянии ожидания (**Wait**), и программа рекомендует пользователю обратиться за помощью к справке, нажав на клавиатуре клавишу <F1> (**Press F1 for help**).

Прежде чем переходить к более подробному описанию меню и панелей инструментов, познакомимся со способами выполнения в среде Mathcad самых простых операций. Читатель, имеющий навыки работы с windows-приложениями и знакомый с работой других математических пакетов, после чтения приведенного ниже описания простейших операций сразу поймет специфику интерфейса Mathcad. Читателю же, который не имеет таких навыков или полагает, что недостаточно искушен в работе за компьютером, знакомство с описанием простейших вычислений облегчит чтение последующих разделов.

1.4 ПРОСТЕЙШИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ОПЕРАЦИИ В MATHCAD

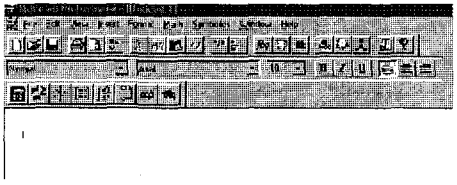
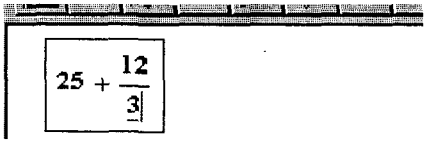
Те, кто хотя бы один раз работал в среде Mathcad, могут без всякого ущерба пропустить этот раздел. Он адресован читателям, совершенно не знакомым с пакетом и не имеющим устойчивых навыков работы в среде Windows 95. Здесь приведено подробное описание того, как в Mathcad можно выполнить простейшие арифметические вычисления, ввести выражение, содержащее переменные, определить функцию и построить ее график, а также, как сохранить рабочий документ в файле на диске или прочитать ранее сохраненные файлы. Выполняйте последовательно все действия, указанные в левом столбце приведенного

ниже текста, сравнивая отображение результатов этих действий на экране с рисунками, приведенными в правом столбце текста. В описании примеров даны указания к действиям без всяких объяснений. Выполнив предписанное, читатель сам сообразит, что произошло и каким способом достигнут результат. Все необходимые пояснения и общие принципы работы приведены в следующих разделах. Для сокращения записи условимся обозначать клавиши, которые нужно нажимать на клавиатуре, угловыми скобками: например, запись <x> означает, что необходимо нажать на клавиатуре клавишу с буквой **x**; если нужно нажать на клавиатуре одновременно две клавиши, записываем <...>+<...>: следовательно, запись <Shift>+<x> означает, что нужно нажать на клавиатуре клавишу <Shift> и, не отпуская ее, — клавишу с буквой **x**. Запись <F1> показывает, что на клавиатуре требуется нажать функциональную клавишу с надписью **F1** (функциональные клавиши расположены в верхнем ряду клавиатуры); запись <Space> — нажать клавишу **Пробел** (широкая клавиша в нижней части клавиатуры).

Итак, найдите на рабочем столе значок пакета, щелкните дважды мышью по этому значку, дождитесь, пока с экрана исчезнет заставка пакета (см. рис. 1.1) и появится рабочее окно пакета* (см. рис. 1.2), и приступайте к работе, стараясь как можно точнее следовать приведенным в левом столбце текста инструкциям.

Простейшие арифметические вычисления

Вычислим значения арифметических выражений $25 + \frac{12}{3}$ и $25 + \frac{12}{4}$.

Указания к действию	*Отображение на экране*
Щелкните мышью по любому месту в рабочем документе — в поле появится крестик, обозначающий позицию, с которой начинается ввод	
Введите с клавиатуры символы в следующей последовательности: $25 + 12/3$	

*Если после заставки на фоне рабочего документа появится временное окно "полезных советов", закройте его щелчком по кнопке [X].

Указания к действию	*Отображение на экране*
Введите с клавиатуры знак равенства, нажав клавишу <=>. Mathcad вычисляет значение выражения и выводит справа от знака равенства результат	$25 + \frac{12}{3} = 29$
Щелкните мышью справа внизу возле цифры 3 и нажмите клавишу <Backspace> (справа во втором ряду клавиатуры). Теперь значение выражения не определено, место ввода помечено черной меткой и ограничено угловой рамкой	$25 + \frac{12}{\blacksquare} = \blacksquare\ \blacksquare$
Введите с клавиатуры цифру 4 и щелкните мышью вне выделяющей рамки	$25 + \frac{12}{4} = 28$
Теперь удалим выражение с экрана. Щелкните мышью по любому месту в выражении	$25 + \frac{12}{4} = 28\ \blacksquare$
Нажимайте клавишу <Space> до тех пор, пока все выражение не будет выделено угловой синей рамкой	$25 + \frac{12}{4} = 28\ \blacksquare$
Нажмите клавишу <Backspace> (поле ввода окрасится в черный цвет) и, нажав клавишу <Del>, удалите выделенное. Выражение исчезнет с экрана	$+$

Из приведенного примера можно понять простейшие принципы организации интерфейса и работы Mathcad:

- формулы отображаются на экране в общепринятой математической нотации;
- правильно определяется порядок действий;
- после ввода знака равенства справа от него отображается результат вычислений;

- после ввода знака деления "/" Mathcad указывает черной меткой позицию для ввода знаменателя;
- при вводе выражения в рабочем документе выделяется ограниченное прямоугольником поле ввода;
- введенное выражение можно изменить (отредактировать) и получить вычисленное значение нового выражения, щелкнув мышью вне выделяющей рамки;
- можно выделить и удалить любой фрагмент рабочего документа.

Определение переменной и ее значения. Вычисление значений выражений, содержащих переменные

Вычислим значение выражения $\frac{at^2}{2}$ при $t = 5$, $a = 9.8$.

Указания к действию	*Отображение на экране*
Щелкните мышью по свободному месту в рабочем документе и введите с клавиатуры символы a =	a :=
Введите с клавиатуры символы 9 . 8 и щелкните по свободному месту вне поля ввода	a := 9.8
Щелкните мышью по свободному месту в рабочем документе и введите с клавиатуры t : 5 щелкните по свободному месту вне поля ввода*	a := 9.8 t := 5
Щелкните мышью по свободному месту в рабочем документе и введите с клавиатуры a * t ^ 2 <Space> / 2 <Space> <Space> = и щелкните по свободному месту вне поля ввода	a := 9.8 t := 5 $a \cdot \frac{t^2}{2} = 122.5$

*При вводе с клавиатуры символа <:> в рабочем документе отображается знак присваивания ":=".

Если при вводе выражения была допущена ошибка, выделите неправильный символ угловой рамкой (щелкните мышью справа внизу возле символа), удалите выделенный символ (нажмите клавишу <Backspace>) и введите в помеченной позиции исправление.

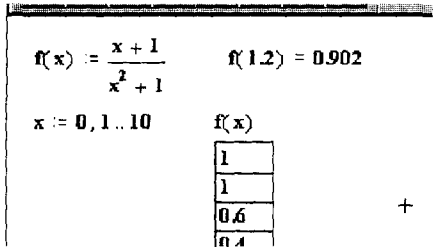
Mathcad читает и выполняет введенные выражения слева направо и сверху вниз, поэтому следите, чтобы выражение для вычисления располагалось правее или ниже определенных для него значений переменных.

Определение и вычисление значения функции в точке. Построение таблицы значений функции

Определим функцию $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, вычислим ее значение при $x = 1.2$ и построим таблицу значений функции для $x \in [0, 10]$ с шагом 1.

Указания к действию	*Отображение на экране*
Щелкните по свободному месту в рабочем документе, введите с клавиатуры f (x) = x + 1 <Space> / x^2 <Space> + 1 и затем щелкните по рабочему документу вне поля ввода	$f(x) := \frac{x+1}{x^2+1}$
Щелкните по свободному месту в рабочем документе и введите с клавиатуры f (1 . 2) = Сразу после ввода знака равенства немедленно выводится вычисленное значение функции $f(x)$ при $x = 1.2$	$f(x) := \frac{x+1}{x^2+1}$ $\quad f(1.2) = 0.902$
Определите дискретные значения аргумента $x \in [0, 10]$ с шагом 1: щелкнув по свободному месту в рабочем документе, введите с клавиатуры x : 0 , 1 ; 1 0 и щелкните вне поля ввода	$f(x) := \frac{x+1}{x^2+1}$ $\quad f(1.2) = 0.902$ $x := 0, 1 .. 10$

Щелкнув по свободному месту в рабочем документе, введите с клавиатуры
f (x) =
В результате под именем функции появится таблица значений функции



Построение декартова графика функции

Построим график функции $f(t) = e^{-t^2}$.

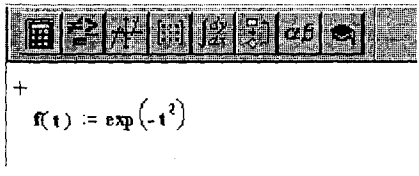
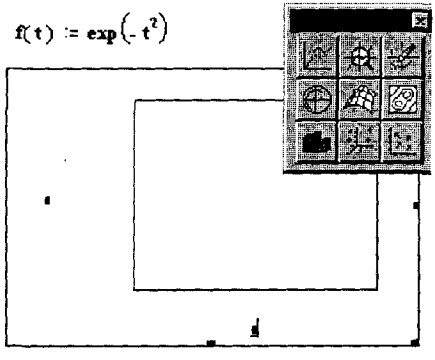
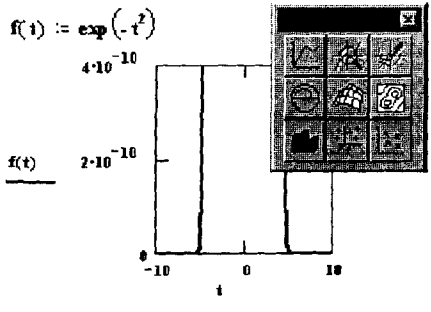
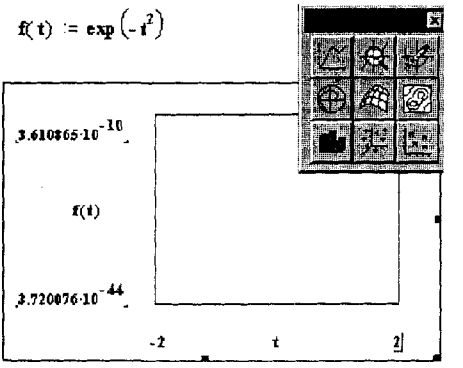
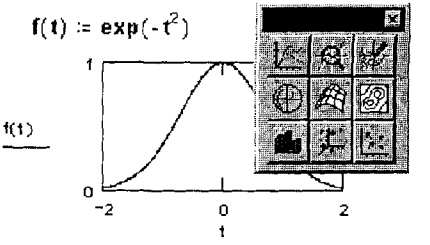
Указания к действию	*Отображение на экране*
Щелкните по свободному месту в рабочем документе и введите с клавиатуры f (t) : e x p (- t^2 <Space>) и щелкните мышью вне поля ввода	
Щелкните по свободному месту в рабочем документе, затем — по кнопке в панели математических инструментов и в открывшейся панели щелкните по кнопке	
Курсор установлен в помеченной позиции возле оси абсцисс. Введите с клавиатуры имя аргумента t, затем щелкните по помеченной позиции возле оси ординат, введите с клавиатуры f (t) и щелкните вне прямоугольной рамки	

График получился невыразительным. Нужно определить промежуток изменения аргумента равным $[-2, 2]$. Для этого щелкните по полю графика, затем — по числу, задающему наименьшее значение аргумента (число в левом нижнем углу ограниченного рамкой поля графиков), нажмите на клавишу <Backspace> и введите с клавиатуры -2. Аналогично измените вторую границу — вместо числа в правом нижнем углу поля графика введите 2



Щелкните мышью вне поля графика



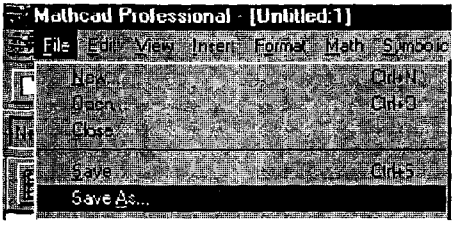
Сохранение рабочего документа в файле на диске

Сохраним рабочий документ в файле с именем **work1** на диске **c:** в папке **user**.

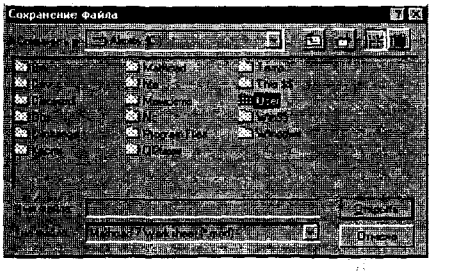
Указания к действию

Щелкните в меню по пункту **File** (Файл) и в спустившемся меню — по строке **Save As** (Сохранить как ...)

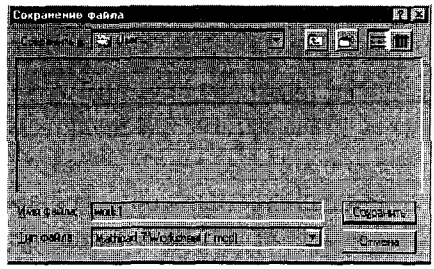
Отображение на экране



В открывшемся окне диалога установите имя диска (**c:**) — откройте стрелкой список дисков в верхнем окне ввода и щелкните дважды по нужной строке, затем найдите в списке и откройте папку **user** (щелкните дважды по соответствующему имени в списке)



Введите в окне "Имя файла" имя **work1** и щелкните по кнопке **Сохранить**

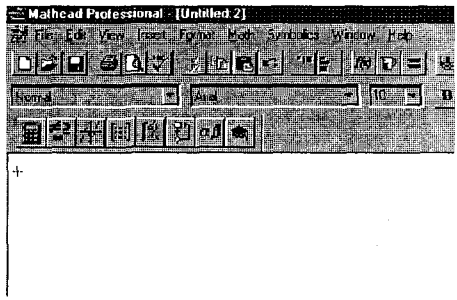


Открытие нового рабочего документа

Указания к действию

Щелкните в панели инструментов по кнопке — в окне пакета откроется чистое поле ввода и вывода данных, новый рабочий документ, а в верхней строке появится название, которое Mathcad присваивает автоматически новому рабочему документу — **Untitled: 2**

Отображение на экране



Чтение рабочего документа из файла на диске

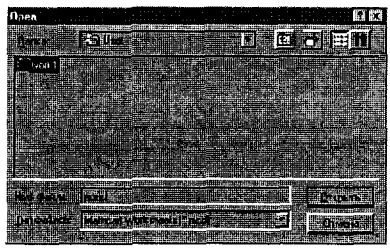
Откроем (прочтем в рабочем окне пакета) файл **work1.mcd**, сохраненный ранее на диске **c:** в папке **user**.

Указания к действию

Щелкните в панели инструментов по кнопке , установите в соответствующем поле ввода имя диска, выберите папку и имя файла (выбор осуществляется щелчком мыши по соответствующей строке) и щелкните по кнопке **Открыть**

Закройте окно Mathcad, щелкнув по кнопке в верхнем правом углу экрана

Отображение на экране



Познакомившись с простейшими приемами работы в среде Mathcad, можно переходить к обзору инструментов, позволяющих выполнять более сложные и разнообразные вычисления. Эти инструменты описаны в следующем разделе.

1.5 МЕНЮ MATHCAD

Большинство вычислений в Mathcad можно выполнить тремя способами:

- выбором операции в меню;
- с помощью кнопочных панелей инструментов;
- обращением к соответствующим функциям.

Почти все операции, закрепленные за пунктами меню, дублируются соответствующими кнопками панелей инструментов. Для обращения к встроенной функции можно вставить функцию в рабочий документ, выбрав нужное имя из списка функций, можно ввести имя функции с клавиатуры или, для наиболее часто используемых функций, вставить имя функции щелчком по кнопке в панели инструментов. Таким образом, во всех трех случаях соблюдается один и тот же порядок действий:

- выбор операции производится щелчком мыши по пункту меню или по кнопке в панели инструментов, после чего, если нужно, пользователь получает доступ к ниспадающему меню или к дополнительной панели;
- когда операция выбрана, пользователь вводит необходимую информацию в окне диалога или заполняет помеченные поля в поле ввода, которое открывается непосредственно в рабочем документе.

Как уже упоминалось выше, вторая строка рабочего окна Mathcad — строка меню (см. рис. 1.3).

Рассмотрим содержание каждого пункта меню и опишем правила выполнения наиболее часто используемых операций.

Некоторые строки ниспадающих меню содержат знак ▸, означающий, что здесь доступны операции, список которых разворачивается, если приостановить курсор мыши на строке, помеченной значком ▸. Полное описание меню можно найти в руководстве пользователя [24] и

во встроенном справочнике по работе с пакетом. Для того чтобы не повторять описания одних и тех же операций, в дальнейшем рядом с названиями некоторых пунктов меню изображены кнопки панели инструментов, дублирующие операции меню (если таковые есть).

Меню File (Файл). Щелчком по слову **File** открывается меню операций с файлами (рис. 1.8). Пункты **New** (Новый), **Open** (Открыть), **Close** (Закрыть), **Save** (Сохранить), **Save As** (Сохранить как) предназначены соответственно для выполнения операций открытия нового рабочего документа, чтения с диска созданного ранее рабочего документа, закрытия текущего рабочего документа, сохранения рабочего документа в файле на диске в текущей папке или сохранения в файле, имя и папка которого указываются при сохранении. Все эти операции выполняются стандартным для Windows 95 способом: указанием имен и папок в окнах диалога.

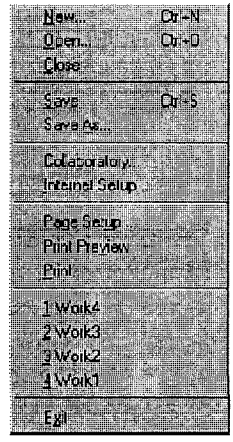


Рис. 1.8. Меню Файл

Следующие два пункта содержат операции, доступные пользователям, компьютеры которых имеют выход в Internet: **Collaboratory** (Сотрудничество) — присоединение через сервер MathSoft к Collaboratory, бесплатному Internet-форуму, обслуживающему всемирное сообщество пользователей Mathcad, **Internet Setup** — установка связи с сервером MathSoft.

Пункты **Page Setup** (Параметры страницы), **Print Preview** (Предварительный просмотр), **Print** (Печать) содержат соответственно операции подготовки, просмотра и печати рабочих документов Matcad.

Следом в спускающемся меню **File** расположен список имен последних четырех документов Mathcad. Щелчком по строке с именем можно вызвать на экран любой из этих документов. И последний пункт — **Exit** (Выход), как и у всех windows-приложений, завершает сеанс работы с Matcad.

Меню Edit (Редактирование). Это меню (рис. 1.9) содержит стандартные для windows-приложений операции редактирования рабочего документа: **Undo** (Отменить последнюю операцию), **Redo** (Отменить последнюю операцию Undo), **Cut** (Вырезать),

Copy (Копировать) , **Paste** (Вставить) , **Paste Special** (Специальная вставка), **Delete** (Удалить), **Select All** (Выделить все), **Find** (Найти), **Replace** (Заменить), **Go to Page** (Перейти к странице), **Check Spelling** (Проверка орфографии) , **Links** (Связывание), **Объект** (Для MathConnex и OLE).

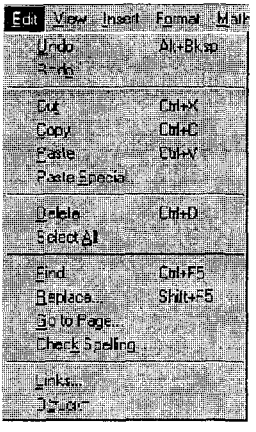


Рис. 1.9. Меню редактирования

Меню View (Просмотр). Это меню (рис. 1.10) содержит операции настройки окна Mathcad. Если строка меню **Toolbar** (Панель инструментов), **Format Bar** (Панель форматирования) или **Math Palette** (Панель математических инструментов) помечена символом √, то на экране размещается соответствующая панель инструментов. Пункты **Regions** (Области), **Zoom** (Микроскоп) , **Refresh** (Перерисовывание) содержат операции преобразования изображения в рабочем документе. **Animate** (Анимация) и **Playback** (Воспроизвести, Проиграть) — операции построения и запуска анимаций.

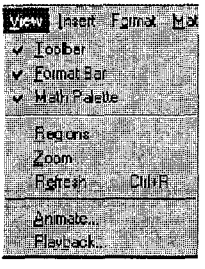


Рис. 1.10. Меню Просмотр

Меню Insert (Вставить). В этом меню (рис. 1.11) пункт **Graph** (График) открывает доступ к семи операциям построения различных типов графиков, которые собраны в дополнительное меню графиков (рис. 1.12).

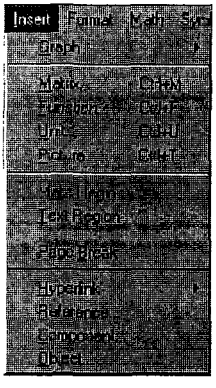


Рис. 1.11. Меню вставки

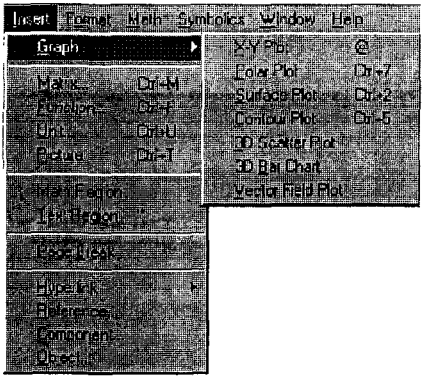


Рис. 1.12. Меню графиков

После щелчка по строке дополнительного меню (см. рис. 1.12) в рабочем документе открывается поле построения:

- **X-Y Plot** — графика функции одной переменной в декартовых координатах;
- **Polar Plot** — графика функции одной переменной в полярных координатах;
- **Surface Plot** — графика функции двух переменных в декартовых координатах — поверхности;
- **Contour Plot** — контурных линий (линий уровня функции двух переменных) в декартовых координатах;
- **3D Scatter Plot** — изображения точек в трехмерном пространстве, заданных декартовыми координатами;
- **3D Bar Chart** — трехмерной гистограммы;
- **Vector Field Plot** — векторного поля.

Порядок действий при построении всех графиков одинаков. После щелчка мышью по строке меню в рабочем документе открывается поле построения графика с помеченными для ввода позициями, которые нужно заполнить для определения графика. Когда график определен (заполнены все помеченные позиции), то для построения графика нужно щелкнуть по строке **Calculate** (Вычислить) в меню **Math**, нажать на клавиатуре клавишу <F9> или щелкнуть в панели **Toolbar** по кнопке . При автоматическом режиме вычислений график будет построен после щелчка мышью вне поля графика.

Mathcad предоставляет пользователю разнообразные средства форматирования графика — изменение толщины и цвета линии, вида осей координат, координатные сетки, текстовые комментарии и др. Для того чтобы изменить вид изображения, нужно щелкнуть дважды по полю графика и установить требуемые параметры в окнах настройки. Научиться форматировать графики лучше всего экспериментально: постройте график, затем щелкните дважды по полю графика, определите параметр в окне настройки, щелкните по кнопке Применить и проанализируйте изменение на графике. Используйте кнопку контекстной подсказки Справка в окне настройки параметров. Правила ввода и форматирования графиков подробно описаны в соответствующих разделах руководства пользователя [24] и во встроенном справочнике. Примеры построения графиков приведены в разд. 1.8 и 3.1.

Щелчок по **Matrix** (Матрица) открывает в рабочем документе окно определения размерности матрицы (число строк, число столбцов). После того как размерность матрицы определена, в рабочем документе

открывается поле ввода матрицы с помеченными позициями для ввода элементов. Примеры ввода матрицы приведены в разд. 2.1.

Щелчок по **Function** (Функция) [f(x)] открывает окно диалога списка встроенных функций Mathcad. Для того чтобы вставить функцию в рабочий документ, нужно выбрать в окне с помощью стрелок прокрутки нужную функцию из списка* функций, щелкнуть по кнопке [Insert] и ввести в помеченных позициях аргументы (аргумент) функции.

Щелчок по **Unit** (Единица) [ ] открывает окно списка определенных в Mathcad единиц измерения (рис. 1.13). В окне **System** (Система) следует ввести используемую систему единиц (SI, CGS, US или MKS), в окне **Dimension** (Размерность) — выбрать стрелками прокрутки соответствующую размерность, а в окне **Unit** (Единица) — нужную единицу измерения. После щелчка по кнопке [Insert] соответствующее наименование будет вставлено в рабочий документ, а окно выбора единицы останется открытым; после щелчка по кнопке [OK] будет вставлено наименование единицы измерения и окно закроется.

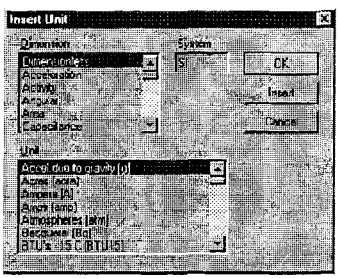


Рис. 1.13. Окно выбора единиц измерения

Пункт **Picture** (Рисунок) задает операцию вставки рисунка. Пункт **Text Region** (Область текста) используется для определения поля текстовых комментариев; щелчком по строке **Math Region** (Математическая область) в текстовый комментарий вставляется поле ввода математических символов; щелчком по строке **Page Break** (Разрыв страницы) в рабочий документ вставляется признак конца страницы.

Операции **Hiperlink**, **Reference**, **Component** и **Object** предназначены для создания достаточно сложных конструкций: [ ] **Hiperlink** содержит набор операций для создания гипертекстовых ссылок; **Reference** — операция создания перекрестных ссылок для документов

*В нижней части окна списка функций приведено краткое описание функции, имя которой помечено в окне списка.

Mathcad; **Component** и **Object** — операции внедрения компонент и объектов из других приложений.

Меню Format (Формат). Все операции этого меню (рис. 1.14) предназначены для определения стиля и формы отображения выражений, данных, результатов вычислений и графиков в рабочем документе — определения цветов фона и надписей, размера и типа шрифта, выравнивания текстов в рабочем документе, разделения рабочего документа на области и др. При установке Mathcad по умолчанию выбран некоторый нейтральный стиль оформления. Если пользователь хочет разнообразить оформление, он может ознакомиться с возможностями меню **Format** в справочнике, руководстве пользователя или "экспериментально". Ниже рассматриваются только пункты **Number** (Число) и **Graph** (График), которые часто используются при решении математических задач.

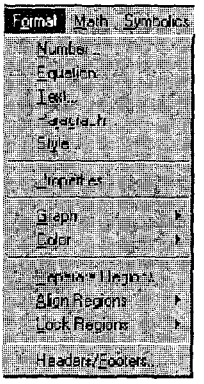


Рис. 1.14. Меню форматирования

Пункт **Number** (Число) содержит операции определения форматов вывода числовых данных и результатов. Щелчок по **Number** открывает диалоговое окно ввода параметров (рис. 1.15).

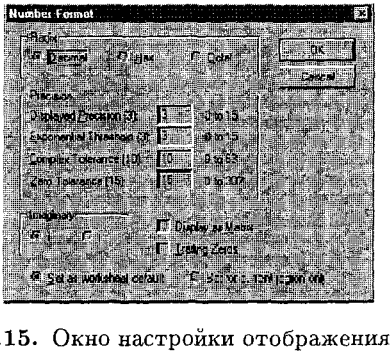


Рис. 1.15. Окно настройки отображения чисел

В поле **Radix** (Основание системы счисления*) помечается выбранная система счисления (на рис. 1.15 — десятичная). В поле **Precision** (Точность) можно установить число знаков в различных формах отображения чисел в указанных справа границах; в поле **Imaginary** (Мнимая единица) можно выбрать символ для отображения мнимой единицы (i или j). В нижней части окна расположены поля, позволяющие определить, применяются ли установки ко всему рабочему документу (**Set**

*Decimal — десятичная, Hex — шестнадцатеричная, Octa l — восьмеричная.

as worksheet default) или только к текущей области ввода (**Set for current region only**).

Пункт **Graph** (График) содержит операции форматирования графиков. Здесь, в зависимости от позиции курсора в рабочем документе и от определений, введенных в рабочий документ, открываются два различных дополнительных меню (рис. 1.16).

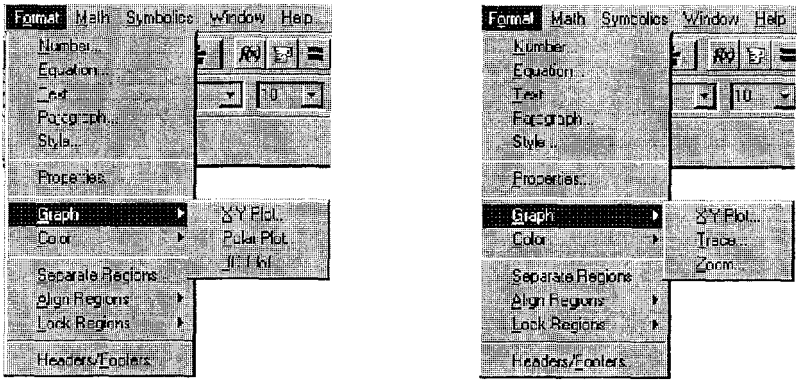


Рис. 1.16. Дополнительные меню настройки графиков

Когда курсор установлен вне поля двумерного декартова графика, открывается меню определения параметров графиков **X-Y Plot**, **Polar Plot**, **3D Plot** — плоского декартова, полярного или трехмерного. Щелчок по соответствующей строке открывает окно настройки параметров изображения (см. описание **Graph** в меню **Insert**). Если же курсор установлен в открытом для ввода поле двумерного декартова графика, то дополнительное меню содержит строки **X-Y Plot** — форматирование графика, **Trace** (Трассировка, След) — определение координат точки на помеченной линии и **Zoom** (Микроскоп) — увеличение масштаба изображения помеченной области графика. Примеры, показывающие, как выполняются соответствующие операции, приведены в разд. 1.8 и 3.1.

Меню Math (Математика). Это меню (рис. 1.17) содержит операции управления вычислениями.

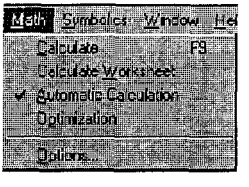


Рис. 1.17. Меню математики

После щелчка по **Calculate** (Вычислить) [=] вычисляются выражения, расположенные выше и левее курсора*. После щелчка по

*Или, как упоминалось выше, выполняются построения определенных ранее графиков.

Calculate Worksheet (Пересчитать рабочий документ) выполняются все вычисления и перерисовываются все графики, определенные в рабочем документе. Если строка **Automatic Calculation** (Вычислять автоматически) помечена символом √, то любое выражение вычисляется немедленно после окончания ввода, а график строится после щелчка вне поля графиков. Если же пометка отсутствует, то вычисления и построения производятся только после соответствующей команды (щелчок по **Calculate**, например). Если строка **Optimization** (Оптимизация) помечена символом √, то включен режим оптимизации вычислений. Режим оптимизации — это режим вычислений с включенным символьным процессором. В этом режиме сначала упрощаются все выражения, помещенные справа от знака присвоения :=, и только затем выражение обрабатывается числовым процессором. В противном случае числовой процессор обрабатывает выражение в исходном виде.

Щелчок по строке **Options** (Опции) открывает окно настройки режима вычислений (рис. 1.18), в котором можно определить **Tolerance** (Допуск) — допустимую погрешность численнных алгоритмов, **Array Origin** (Начало массива) — номер первого элемента массива, **Precision** (Точность) — число значащих цифр при записи данных в файл,

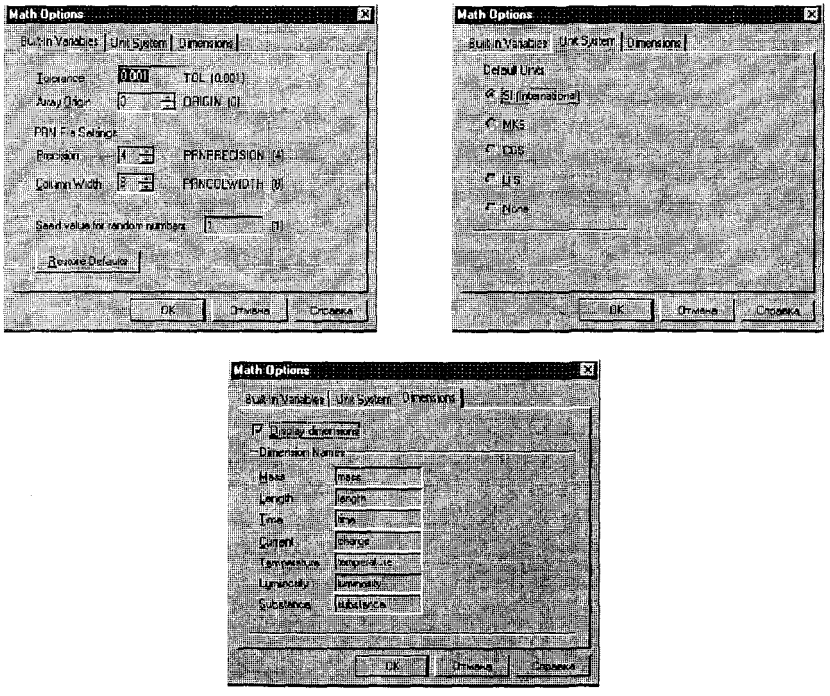


Рис. 1.18. Окна настройки параметров вычислений

Column Width (Ширина столбца) — ширину столбца, используемую при записи данных в файл, **Seed value for random numbers** (Начальное число для инициализации датчика случайных чисел)— число, инициализирующее датчик случайных чисел, **Unit System** (Система единиц) — систему единиц, **Dimensions** (Размерности) — размерности физических единиц. Все подлежащие изменению параметры заносятся в соответствующие поля ввода в окнах диалога.

Меню Symbolics (Символьные вычисления). Это меню (рис. 1.19) содержит операции символьной математики. Пункт **Evaluate** (Вычислять) содержит три операции (рис. 1.20): **Symbolically** (Символьно), **Floating Point** (С плавающей запятой), **Complex** (Комплексное).

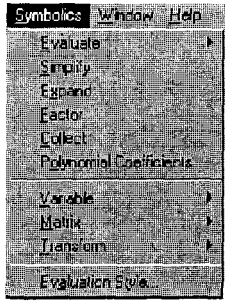


Рис. 1.19. Меню символьных операций

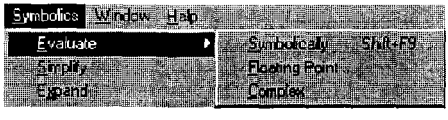


Рис. 1.20. Меню режимов вычислений

После щелчка по одной из этих трех строк вычисляется значение выделенного в рабочем документе выражения, причем вычисления производятся соответственно символьно, численно с плавающей запятой или с использованием арифметики комплексных чисел. Щелчком по строке **Simplify** (Упростить) символьному процессору передается выражение, выделенное в рабочем документе, а преобразованное выражение отображается в рабочем документе ниже или справа от исходного выражения (см. описание опции **Evaluation Style**). Совершенно аналогично после щелчка по **Expand** (Развернуть) в выделенном выражении раскрываются скобки, а после щелчка по **Factor** (Разложить на множители) выделенное выражение раскладывается на множители. В результате щелчка по **Collect** (Собрать) в выделенном выражении приводятся подобные.

Если выражение является многочленом относительно выделенного фрагмента, то после щелчка по строке **Polynomial Coefficients** (Коэффициенты полинома) в рабочий документ выводится вектор-столбец коэффициентов многочлена, записанных в порядке возрастания степеней выделенного выражения. На рис. 1.21 представлен результат такой операции, когда в исходном выражении выделено **a**.

$$a + 2\cdot a\cdot b + b^2 - (3\ a^2\cdot b) + a^2 \qquad \begin{bmatrix} b^2 \\ 1 + 2\cdot b \\ -3\cdot b + 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 1.21. Вычисление полиномиальных коэффициентов

Каждая из следующих трех строк (см. рис. 1.19) — **Variable** (Переменная), **Matrix** (Матрица), **Transform** (Преобразование) — объединяет группу символьных операций: символьные вычисления относительно выделенной переменной, символьные вычисления с выделенной матрицей и интегральные преобразования соответственно.

В пункте **Variable** объединены операции математического анализа (рис. 1.22):

- решение уравнений (**Solve**);
- замена переменной;
- подстановка (**Substitute**);
- дифференцирование (**Differentiate**);
- интегрирование (**Integrate**);
- разложение по формуле Тейлора (**Expand to Series**);
- разложение дроби на простейшие дроби (**Convert to Partial Fraction**).

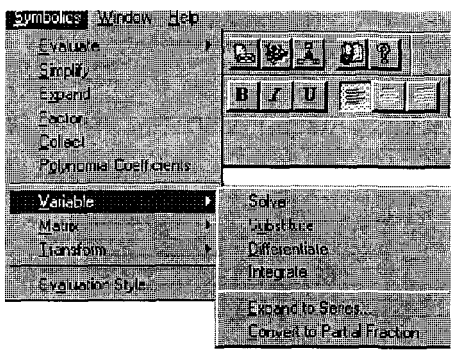


Рис. 1.22. Меню операций математического анализа

Если в рабочем документе в некотором выражении выделена переменная, то после щелчка по соответствующей строке меню в рабочем документе отображается результат выполнения операции относительно выделенной переменной. Примеры использования этих пунктов меню приведены в разд. 1.8 и 3.1.

В пункте **Matrix**(рис. 1.23) объединены символьные вычисления с матрицами:

- **Transpose** (Транспонирование);
- **Invert** (Обращение) — вычисление обратной матрицы;
- **Determinant** (Определитель) — вычисление определителя квадратной матрицы.

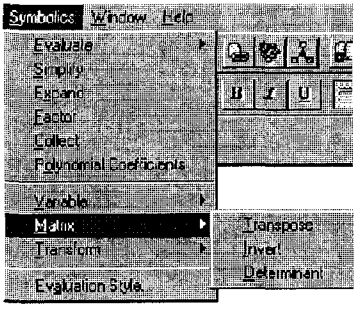


Рис. 1.23. Меню символьных операций с матрицами

Операции этой группы выполняются, только если в рабочем документе выделена матрица. Тогда после щелчка по строке меню в рабочем документе отображается результат выполнения соответствующей операции. Примеры использования этих пунктов меню приведены в разд. 2.1.

В пункте **Transform** объединены символьные вычисления прямых и обратных интегральных преобразований (рис. 1.24) — **Fourier** и **Inverse Fourier** (преобразование Фурье), **Laplace** и **Inverse Laplace** (преобразование Лапласа), **Z** и **Inverse Z** (Z-преобразование) — вычисление производящей функции.

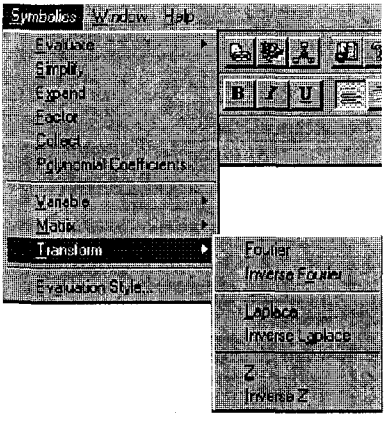


Рис. 1.24. Меню интегральных операций

Щелчком по строке меню **Evaluation Style** (Стиль выражения) открывается окно, в котором определяется формат вывода результатов символьных вычислений (рис. 1.25).

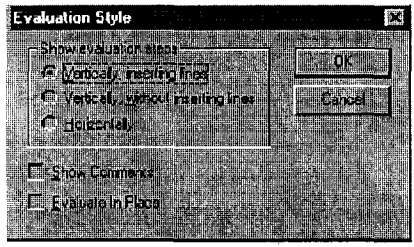


Рис. 1.25. Параметры формата символьных результатов

В поле **Show evaluation steps** (Показать результаты вычислений) можно установить режим отображения результатов символьных вычислений в строке, расположенной непосредственно под исходным выражением (**Vertically, inserting lines**), прямо под исходным выражением (**Vertically, without inserting lines**) или справа от исходного выражения (**Horizontally**).

Меню Window (Окно). Это меню (рис. 1.26) позволяет устанавливать стиль расположения окон, содержащих различные рабочие документы Mathcad. Окна можно расположить "каскадом", чтобы они перекрывались, но при этом были видны заголовки окон (**Cascade**), без перекрытия по горизонтали (**Tile Horizontal**) или по вертикали (**Tile Vertical**); можно также упорядочить ярлычки окон в панели задач (**Arrange Icons**). В нижней части меню расположен список всех окон, открытых в текущий момент. Щелчком по соответствующей строке можно вызвать на экран любое из окон.

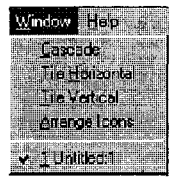


Рис. 1.26. Меню Окно

1.6 ПАНЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ MATHCAD

В окне Mathcad обычно располагаются три кнопочные панели инструментов (рис. 1.27).

Верхняя — панель **Toolbar** (Панель инструментов), большая часть кнопок которой стандартные для windows-приложений кнопки работы с файлами и текстом.

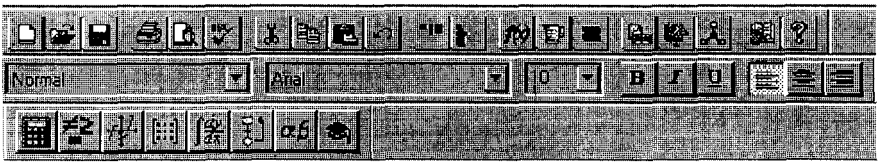


Рис. 1.27. Панели инструментов

Средняя — панель **Format Bar** (Панель форматирования), содержащая кнопки выбора шрифтов, размеров шрифтов, стиля (полужирный, наклонный, с подчеркиванием), а также кнопки форматирования текста на странице (выравнивание по левому краю, центрирование и выравнивание по правому краю);

Нижняя — **Math Palette** (Математическая палитра), каждая кнопка которой открывает дополнительную панель, содержащую кнопки операций с математическими объектами определенного класса.

Правила работы со всеми панелями одинаковы: щелчком по кнопке открываем вспомогательную панель, щелчком по кнопке выбираем в ней нужную операцию и заполняем в рабочем документе помеченные позиции для ввода данных, аргументов или параметров операции.

Панель Toolbar. Большинство кнопок этой панели дублируют меню **File** и **Edit** (они описаны в разд. 1.5). Кнопка выполняет операцию вставки гипертекстовых ссылок, кнопка открывает интерактивный диалог вставки компонент, кнопка — окно **Math Connex**. Следующие две кнопки относятся к справочному режиму и будут описаны ниже (см. разд. 1.7).

Панель Math Palette. Это панель математических инструментов (дословно "математическая палитра") — наиболее часто используемая панель, поскольку именно здесь расположены кнопки вычислительных операций и операций конструирования вычислительных процедур.

Панель математических инструментов содержит восемь кнопок, каждая из которых открывает дополнительную панель математических операций. Далее, в начале каждой главы, описаны дополнительные панели математических операций, наиболее часто используемые при решении задач главы. Здесь же просто перечислены кнопки панели математических операций и приведен вид каждой дополнительной панели.

Кнопка — **Arithmetic Palette** (Калькулятор) открывает панель простейших вычислений (рис. 1.28).

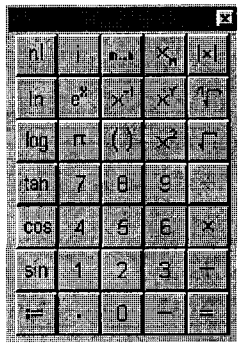


Рис. 1.28. Панель калькулятора

Щелчком по кнопке этой панели в рабочий документ вставляем имя функции, символ, цифру или знак операции с помеченными для ввода позициями:

$|\blacksquare|$ $\sqrt{\blacksquare}$ $\blacksquare^{\blacksquare}$ $\sqrt[\blacksquare]{\blacksquare}$ $(\blacksquare)$ $\blacksquare^{-1}$ $e^{\blacksquare}$ $\ln(\blacksquare)$ $\blacksquare_{\blacksquare}$ $\blacksquare..\blacksquare$

Кнопка — **Evaluation and Boolean Palette** (Панель равенств и отношений) открывает панель, изображенную на рис. 1.29.

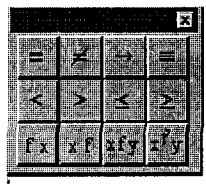


Рис. 1.29. Панель отношений

Щелчком по кнопкам этой панели в рабочий документ вставляются соответствующие знаки отношений:

$\blacksquare=\blacksquare$ $\blacksquare\neq\blacksquare$ $\blacksquare\rightarrow$ $\blacksquare\equiv\blacksquare$ $\blacksquare<\blacksquare$ $\blacksquare>\blacksquare$ $\blacksquare\leq\blacksquare$ $\blacksquare\geq\blacksquare$ $\blacksquare\,\blacksquare$ $\blacksquare\,\blacksquare\,\blacksquare$ $\blacksquare$ $\wedge$ $\blacksquare\quad\blacksquare$

Кнопка — **Graph Palette** (Панель графиков) открывает панель, изображенную на рис. 1.30.

Щелчком по кнопке этой панели в рабочий документ вставляем поле графика соответствующего типа. Правила и примеры построения графиков разных типов приведены в разд. 1.8 и 3.1.

Кнопка — **Vector and Matrix Palette** (Панель векторных и матричных операций) открывает панель, изображенную на рис. 1.31.

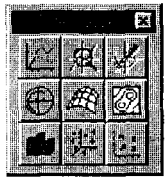


Рис. 1.30. Панель графиков

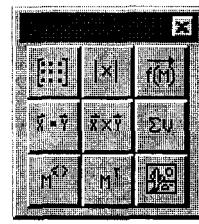


Рис. 1.31. Панель матричных операций

Кнопки этой панели и правила выполнения соответствующих операций с векторами и матрицами описаны в разд. 2.1.

Кнопка — **Calculus Palette** (Панель операций математического анализа) открывает панель, изображенную на рис. 1.32.

Кнопки этой панели и правила выполнения соответствующих операций описаны в разд. 3.1.

Кнопка — **Programming Palette** (Панель программирования) открывает панель, представленную на рис. 1.33.

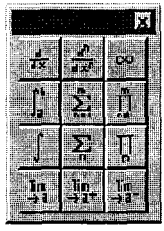


Рис. 1.32. Панель операций математического анализа

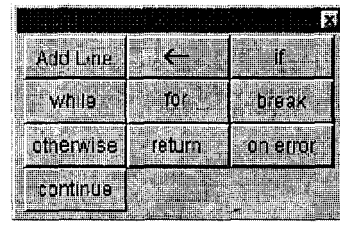


Рис. 1.33. Панель программирования

Щелчком по кнопкам этой панели вставляем в рабочий документ соответствующую программную конструкцию. В разд. 6.1 и 3.1 описано использование операций **Add Line** (Добавить линию) и **if** (если) для ввода функций, имеющих на разных промежутках различные аналитические выражения. Ниже приведен пример программы решения методом Ньютона с погрешностью ε уравнения $f(x) = 0$, поясняющий, как выполняются операции, закрепленные за кнопками панели. Рядом изображен фрагмент рабочего документа Mathcad с помеченными полями ввода.

```
newton(f, df, xold, ε) := | ■
                          | while ■
                          |     | ■ ← ■
                          |     | ■ ← ■
                          | ■
```

$$\text{newton}(f, df, xold, \varepsilon) := \left| \begin{array}{l} xnew \leftarrow xold - \dfrac{f(xold)}{df(xold)} \\ \text{while } |xnew - xold| > \varepsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} xold \leftarrow xnew \\ xnew \leftarrow xold - \dfrac{f(xold)}{df(xold)} \end{array} \right. \\ xnew \end{array} \right.$$

$$f(x) := \exp(-x) + 10 \cdot x \qquad df(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\text{newton}(f, df, 0, 0.001) = -0.112$$

$$f(\text{newton}(f, df, 0, 0.001)) = 2.909 \cdot 10^{-7}$$

Кнопка [αβ] — **Greek Symbol Palette** (Панель греческих букв) открывает панель, изображенную на рис. 1.34.

Щелчком по кнопке с соответствующим символом вставляем его в нужное место рабочего документа.

Кнопка [🎓] — **Symbolic Keyword Palette** (Ключевые слова символьных вычислений) открывает панель, изображенную на рис. 1.35.

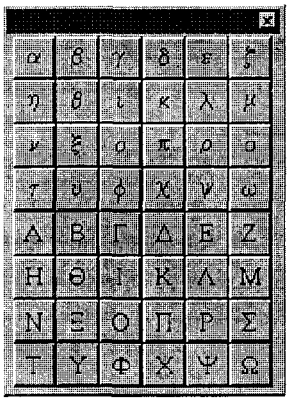


Рис. 1.34. Панель греческих букв

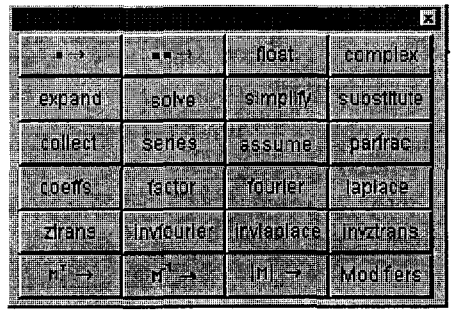


Рис. 1.35. Панель ключевых слов

Видно, что кнопки панели дублируют соответствующие пункты меню символьных операций, описанные в разд. 1.5. Щелчком по кнопке вставляем в рабочий документ ключевое слово с помеченными позициями для ввода данных. Ниже приведены текст, который вставляется в рабочий документ после щелчка по кнопке **Factor** (Разложить на множители), и результат выполнения операции после заполнения полей ввода.

$$\blacksquare \text{ factor}, \blacksquare \rightarrow$$

$$x^2 - 2\cdot x + 3\cdot x - 2 \text{ factor}, x - 1 \rightarrow (x+2)\cdot(x-1)$$

Примеры использования панели символьных операций приведены в разд. 1.8.

1.7 РЕЖИМ СПРАВКИ

Mathcad предоставляет пользователю несколько чрезвычайно удобных способов получения справки.

Щелчком по пункту **Help** (Помощь) в меню окна Mathcad открывается меню справочного режима (рис. 1.36).

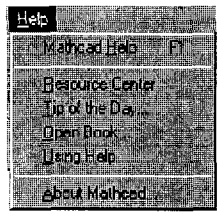


Рис. 1.36. Меню справочного режима

Щелчок по первой строке — **Mathcad Help** (Справка Mathcad) открывает окно диалога справочного режима со стандартными закладками **Содержание**, **Предметный указатель**, **Поиск** и кнопками управления (рис. 1.37).

Такое же действие — открыть окно справки — выполняется щелчком по кнопке [?] в панели **Toolbar** или, как и во всех windows-приложениях, нажатием на клавиатуре клавиши <F1>.

В справочном режиме можно получить подробное описание всех правил и приемов работы в Mathcad. В режиме поиска можно получить справку по введенному ключевому слову. Для примера на рисунках приведены фрагмент справки об импорте данных из других приложений (рис. 1.38) и окно поиска справки по графикам (рис. 1.39).

Щелчок по строке **Resource Center** (Центр ресурсов) открывает окно содержания **Resource Center** (рис. 1.40), содержащее разделы **Overview** (Обзор), **Tutorial** (Учебник), **Quick Sheets** (Шпаргалки), Web Library (Библиотека в Internet), **Reference Tables** (Справочные таблицы), **Practical Statistics** (Справочник по прикладной статистике), **The Treasury Guide to Solving** (Путеводитель по методам

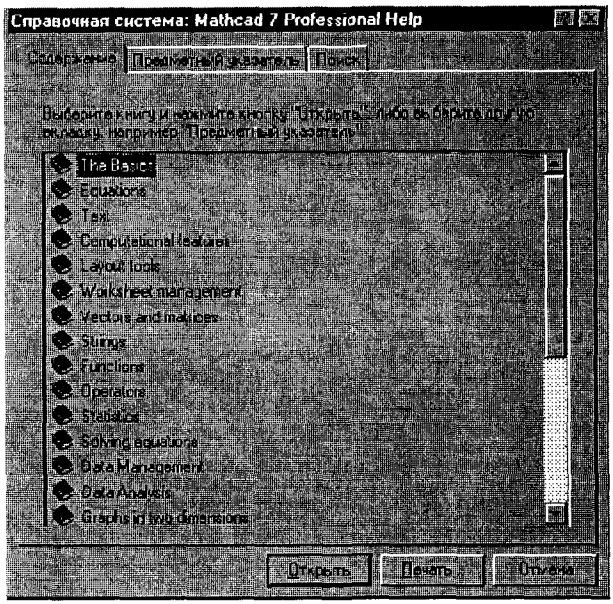


Рис. 1.37. Окно справочного режима

решения уравнений), **The Treasury Guide to Programming** (Путеводитель по программированию).

Раздел **Overview** представляет собой интерактивный справочник, описывающий основные возможности Mathcad. Он написан настолько просто, что будет понятен пользователю, не владеющему английским языком. Ниже приведен фрагмент **Overview**, демонстрирующий визуализацию цифровой информации, сохраненной в матрице M.

$$M := \begin{array}{|c|c|} \hline 143.00 & 147.00 \\ \hline \end{array}$$

$$T(x) := \mathrm{if}(x < 120, 0, x) \qquad S := \overrightarrow{T(M)}$$

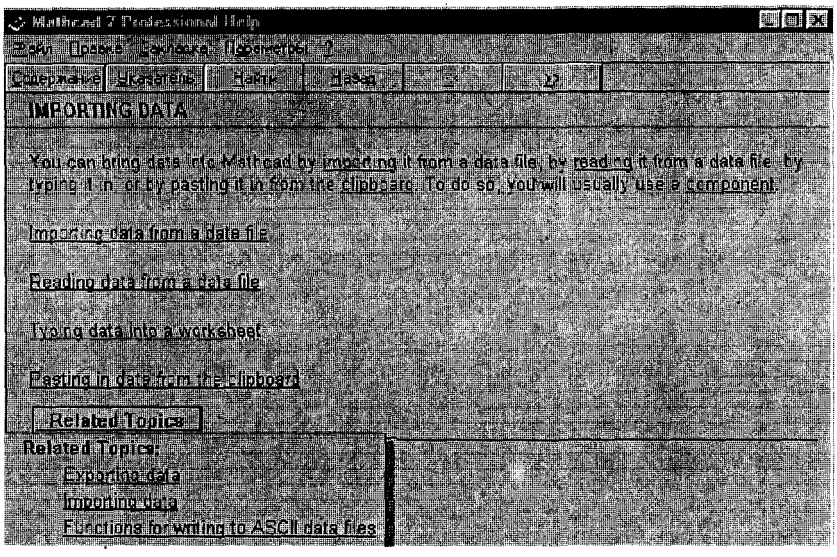


Рис. 1.38. Фрагмент справки об импорте данных

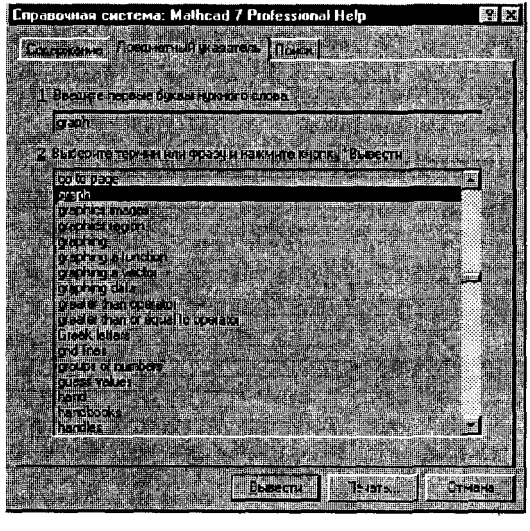


Рис. 1.39. Окно справки в режиме поиска по ключевому слову

Любой фрагмент **Overview** можно скопировать в рабочий документ и использовать в дальнейших вычислениях.

Tutorial — это встроенный учебник, вид окна которого с выведенным в нем содержанием приведен на рис. 1.41. В **Tutorial** содержатся описания всех основных приемов работы в среде пакета, правила ввода выражений с клавиатуры и с помощью панелей инструментов, разобраны простейшие примеры. Как и в **Overview**, в примерах **Tutorial**

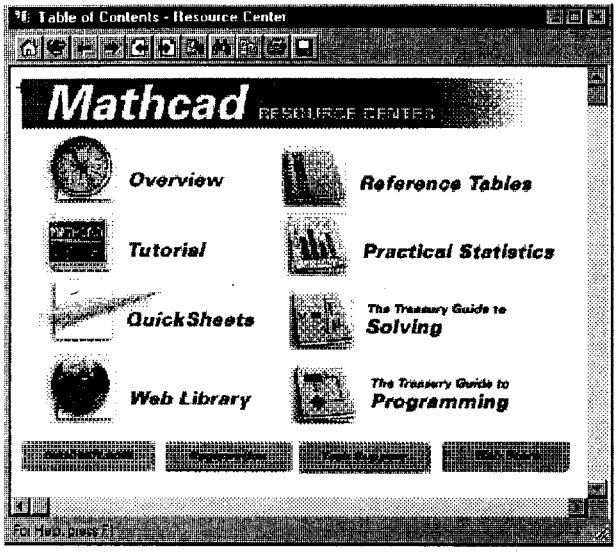


Рис. 1.40. Окно содержания Resource Center

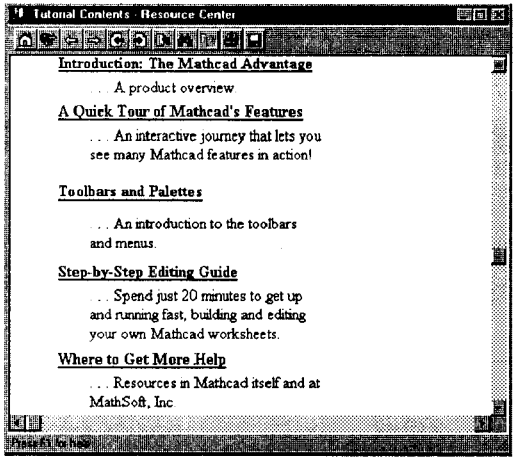


Рис. 1.41. Фрагмент оглавления встроенного учебника Mathcad

можно изменить параметры операторов и наблюдать последующие изменения. Окно **Tutorial** имеет стандартные для справочных режимов windows-приложений кнопки управления, смысл которых понятен из пиктограмм и надписей на кнопках.

Quick Sheets — это справочник функций Mathcad для тех, кто предпочитает учиться на примерах. Он содержит сборник примеров решения задач из самых разнообразных приложений. На рис. 1.42 приведено оглавление раздела **Бизнес и финансы**. Каждый раздел со-

держит во всех подробностях разобранный пример решения типичной задачи с необходимыми теоретическими и техническими указаниями.

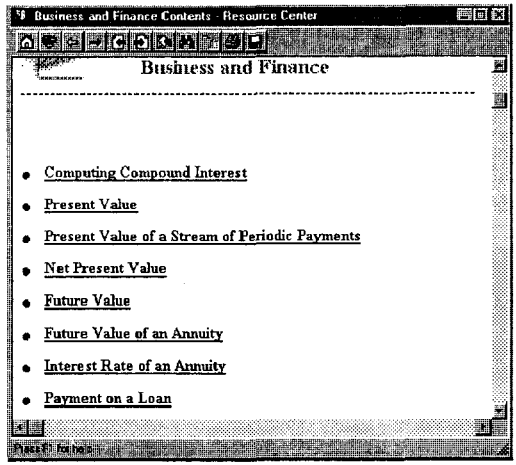


Рис. 1.42. Оглавление одного из разделов режима подсказок

Web Library — библиотека электронных книг, расположенная на сервере MathSoft, которая доступна пользователям, подключенным к сети Internet. Общение с **Web Library** предполагает минимальные познания в английском языке, поэтому приводим на рис. 1.43 страничку **Web Library** без комментариев.

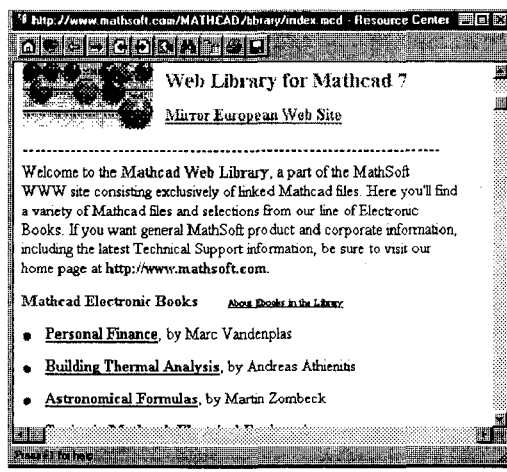
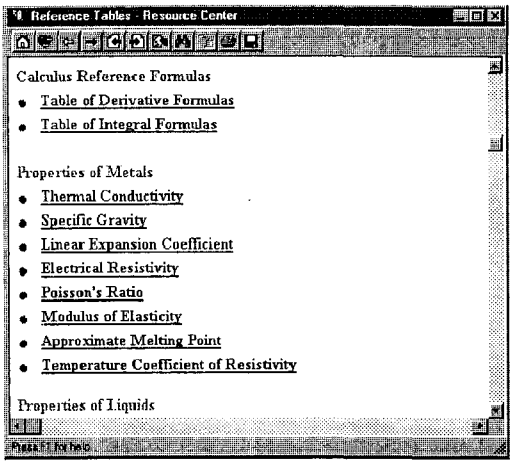


Рис. 1.43. Фрагмент первой страницы библиотеки электронных книг

Reference Tables — это богатое собрание справочников по самым разнообразным областям знаний: математические формулы, физические, химические константы, свойства материалов и т.п. Фрагмент

оглавления **Reference Tables** и фрагмент таблицы свойств металлов приведены на рис. 1.44.



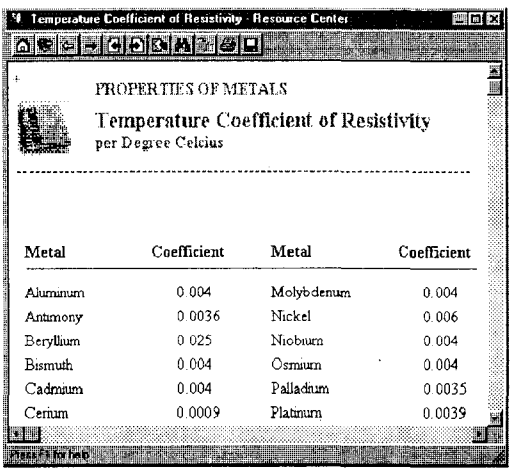


Рис. 1.44. Фрагменты текстов из встроенного справочника

Practical Statistics (Справочник по прикладной статистике), **The Treasury Guide to Solving** (Путеводитель по методам решения уравнений), **The Treasury Guide to Programming** (Путеводитель по программированию) — совершенно аналогично устроенные интерактивные справочные пособия.

Остальные строки меню **Help** открывают доступ к полезным советам, к общей информации о Mathcad, а также позволяют открыть электронные книги — электронные учебники по различным областям знания, подготовленные специальными средствами Mathcad и предназначенные для изучения предмета с его, Mathcad, использованием.

Помимо описанных в меню возможностей справочного режима, в Mathcad реализована контекстно-зависимая справка: нажав на клавиатуре клавиши <Shift>+<F1> в момент, когда курсор установлен в рабочем документе на операторе (функции, выражении), пользователь получает справку из соответствующего раздела.

Если указатель мыши размещается на кнопке или на другом элементе управления окна, то через некоторое время на экране в специальном временном окошке появляется название этого элемента управления.

И, наконец, в нижней, информационной строке окна Mathcad всегда размещена информация о текущей операции или приглашение к следующей операции.

Завершая краткое описание справочного режима пакета, отметим, что пользователь, не имеющий навыков работы в среде Mathcad, у которого возникла потребность выполнить технический расчет, обратившись за помощью к встроенному справочнику Mathcad, получит все необходимые инструкции и справится со своей задачей. Естественно, что несколько быстрее с задачей справится пользователь, владеющий английским языком.

Можно смело утверждать, что вдумчивая работа в справочном режиме позволяет в полной мере овладеть искусством работы в среде пакета и научиться выполнять достаточно сложные вычисления.

1.8 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ В MATHCAD

Завершая первое знакомство с Mathcad, попробуем решить в среде пакета несколько простейших задач элементарной математики.

Для того чтобы преобразовать алгебраическое выражение, вычислить значение функции, построить график функции или решить уравнение, необходимо прежде всего ввести соответствующее выражение в рабочий документ Mathcad. Правила ввода выражений в Mathcad описаны в разд. 1.1. Последовательность действий при вводе выражений будет описана для каждого конкретного примера.

Как отмечалось выше, большинство вычислений в Mathcad можно выполнить тремя способами — выбором операции в меню, с помощью кнопочных панелей инструментов или обращением к соответствующим функциям. Далее, при решении каждой конкретной задачи, выбран один из возможных способов действий, но в совокупности будут продемонстрированы разные способы вычислений.

Преобразование алгебраических выражений

В Mathcad можно выполнить следующие символьные преобразования алгебраических выражений:

symplify (упростить) — выполнить арифметические операции, привести подобные, сократить дроби, использовать для упрощения основные тождества (формулы сокращенного умножения, тригонометрические тождества и т.п.);

expand (развернуть) — раскрыть скобки, перемножить и привести подобные;

factor (разложить на множители) — представить, если возможно, выражение в виде произведения простых сомножителей;

substitute (подставить) — заменить в алгебраическом выражении букву или выражение другим выражением;

convert to partial fraction — разложить рациональную дробь на простейшие дроби.

Если Mathcad не может выполнить требуемую операцию, то он выводит в качестве результата вычислений исходное выражение.

Все приведенные вычисления выполнены в предположении, что в меню **Math** установлен автоматический режим вычислений и отключен режим оптимизации (см. разд. 1.4).

Следует помнить, что Mathcad далеко не всегда преобразует выражение к самому простейшему виду.

Пример 1*. Упростите выражение

$$\left(1+\frac{2}{3x-1}\right)\left(1-\frac{9x-9x^2}{3x+1}\right)+1.$$

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$\left(1+\frac{2}{3\cdot x-1}\right)\cdot\left(1-\frac{9\cdot x-9\cdot x^2}{3\cdot x+1}\right)+1 \qquad 3\cdot x$$

Указание. Установите режим отображения результатов вычислений по горизонтали. Для этого щелкните по строке **Evaluation Style** в меню **Symbolic** и установите, как показано на рис. 1.45, соответствующие метки в окне диалога. Для того чтобы ввести выражение, щелкните левой клавишей мыши по свободному месту в рабочем документе и введите выражение с клавиатуры. Сначала введите

*Этот пример предлагался на вступительном экзамене одного из московских инженерных вузов.

первый сомножитель — нажмите на клавиатуре клавиши в следующей последовательности:

<1> <+> <2> </> <3> <*> <-> <1>

Прежде чем вводить знак умножения и второй сомножитель, нажмите несколько раз клавишу <Space> (Пробел); нажимайте пробел до тех пор, пока весь первый сомножитель не будет заключен в выделяющую рамку (см. рис. 1.45). Затем введите знак умножения и второй сомножитель — нажмите на клавиатуре клавиши в следующей последовательности:*

<*> <(> <1> <-> <9> <*> <x> <-> <9> <*> <x> <^> <2>
<Space>...<Space>(выделить $9x - 9x^2$) </> <3> <*> <x> <+> <1>
<Space>...<Space> (выделить второй сомножитель) <+> <1>.

Для того чтобы упростить введенное выражение, используйте меню символьных операций: щелкните справа внизу у последнего символа выражения и выделите его, нажимая клавиу <Space> (см. рис. 1.45). Затем щелкните в меню **Symbolics** по строке **Simplify**. Результат (преобразованное выражение) будет отображен в рабочем документе справа от исходного выражения.

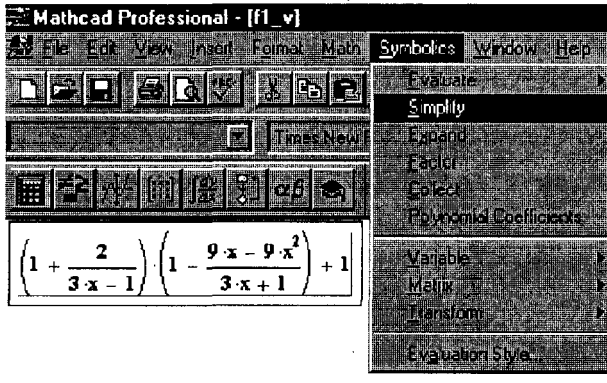


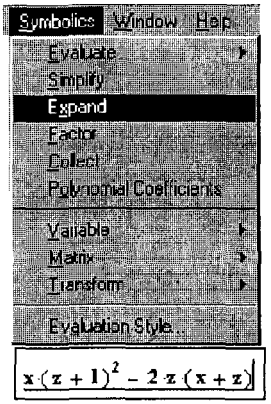
Рис. 1.45. Упрощение алгебраических выражений через меню **Symbolics**

Пример 2. Раскройте скобки и приведите подобные в выражении $x(z+1)^2 - 2z(x+z)$.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и изображением использованного меню приведен на рис. 1.46.

Указание. Сначала, как и в предыдущем примере, установите в меню **Symbolics** — режим отображения результатов вычислений по горизонтали (см. рис. 1.45). Затем введите выражение для преобразования, выделите его и щелкните по строке **Expand** в меню **Symbolics** (см. рис. 1.46). Результат (преобразованное выражение) отображается в рабочем документе справа от исходного выражения.

*Запись <Space>...<Space> означает, что пробел нужно нажимать до тех пор, пока соответствующее выражение не будет заключено в выделяющую угловую рамку.



$x\cdot(z+1)^2 - 2\cdot z\cdot(x+z)$ $\qquad$ $x\cdot z^2 + x - 2\cdot z^2$

Рис. 1.46. Упрощение выражений с использованием операции **Expand**

Пример 3. Разложите на множители выражение $a^2 + ab^2 + 2abc + b^2c + a^2c + ac^2 + bc^2$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$a^2\cdot b + a\cdot b^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot c + b^2\cdot c + a^2\cdot c + a\cdot c^2 + b\cdot c^2 \qquad (a+b)\cdot(c+a)\cdot(c+b)$$

Указание. Введите выражение для преобразования, выделите его и щелкните по строке **Factor** в меню **Symbolics**. Результат отображается в рабочем документе справа от исходного выражения. При вводе выражения не забывайте вводить знак умножения (<*>), а после ввода показателя степени (<^>) нажимать клавишу <Space>.

Пример 4. Разложите на простейшие дроби рациональную дробь

$$\frac{x^2 - 3x + 7}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$\frac{x^2 - 3\cdot x + 7}{(x-1)^2\cdot(x^2+x+1)} \qquad \frac{5}{(3\cdot(x-1)^2)} - \frac{2}{(x-1)} + \frac{2}{3}\cdot\frac{(5+3\cdot x)}{(x^2+x+1)}$$

Указание. Введите описанным выше способом выражение для преобразований, выделите переменную x и щелкните по строке **Convert to Partial Fraction** в пункте **Variable** меню **Symbolics**.

Определение, построение таблиц значений и графиков функций

Пример 5. Постройте таблицу значений функции $f(x) = x\sin\sqrt{|x|}$ на отрезке $[0, 4\pi^2]$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$f(x) := x\cdot\sin\left(\sqrt{|x|}\right) \qquad i := 0..20 \qquad x_i := i\cdot\frac{4\cdot\pi^2}{20} \qquad F_i := f(x_i)$$

F =

	0
0	0
1	1.947
2	3.611
3	3.852
4	2.571
5	$1.209\cdot10^{-15}$

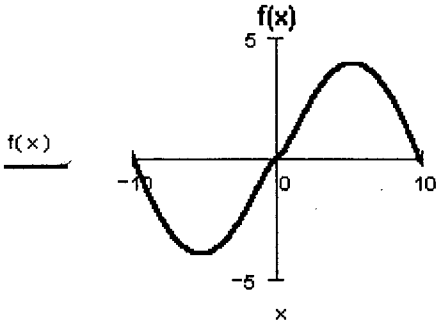
Указание. Определите функцию $f(x) = x\sin\sqrt{|x|}$. Для этого введите с клавиатуры имя функции и имя аргумента, заключенное в круглые скобки, знак присваивания (введите с клавиатуры знак равенства или нажмите на клавиатуре клавиши <Shift>+<:> и следом — выражение для функции. Чтобы ввести знак квадратного корня, щелкните в панели калькулятора по кнопке $\sqrt{\ }$. Подкоренное выражение введите в позиции, указанной меткой. Знак абсолютной величины вводите аналогично, щелчком по кнопке $|x|$. Определите диапазон изменения индекса i узлов сетки x_i на заданном отрезке. Для этого введите с клавиатуры: i = 0 ; 20*. Определите узлы сетки $x_i = i\frac{4\pi^2}{20}$, для этого введите с клавиатуры: x [i <Space> = i * 4 * (<Ctrl>+<p>)^2 <Space...Space> / 2 0 . Определите матрицу-столбец F для хранения таблицы значений функции в узлах сетки: $F_i = f(x_i)$. Для этого введите с клавиатуры: F [i Space : f (x [i <Space>) . Чтобы вывести таблицу значения функции на экран, введите с клавиатуры: F = . В рабочем документе появится таблица значений функции. Щелкните по полю таблицы — в рабочем документе откроется окно для просмотра всей таблицы со стрелками прокрутки.

Пример 6. Постройте график функции $f(x) = x\sin\sqrt{|x|}$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими определениями и графиком.

*При вводе с клавиатуры символа <;> в рабочем документе отображается символ, разделяющий границы диапазона <..>.

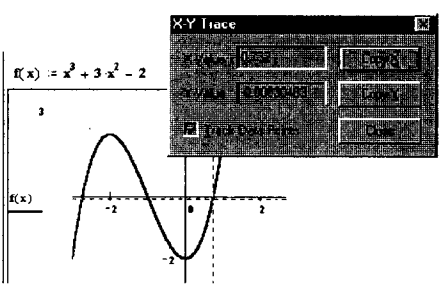
$$f(x) := x \cdot \sin\left(\sqrt{|x|}\right)$$

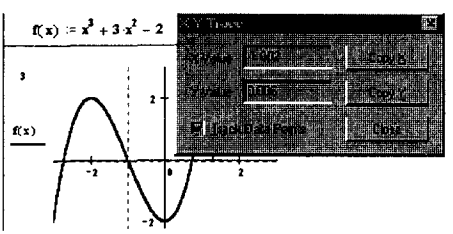


Указание. Определите функцию $f(x)$, как в предыдущем примере, щелкните по свободному месту в рабочем документе правее и ниже определения функции $f(x)$, затем щелкните по кнопке декартова графика в панели графиков и введите в позиции, указанной меткой возле оси абсцисс, имя аргумента x, а возле оси ординат имя функции — $f(x)$. График будет построен после щелчка по рабочему документу вне поля графиков. Параметры изображения можно изменить, щелкнув дважды по полю графиков и определив параметры (вид отображения осей, толщину и цвет линии, надпись на графике). На рис. 1.47 изображены окна диалога с параметрами настройки графика, изображенного выше.

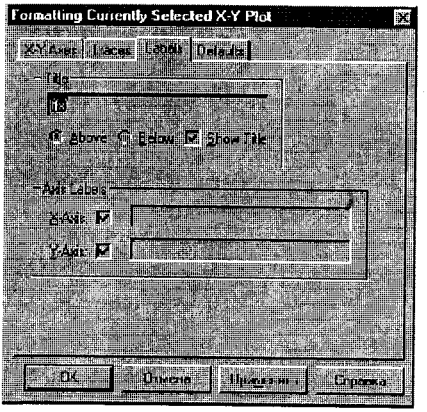
Пример 7. Решите графически уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$.

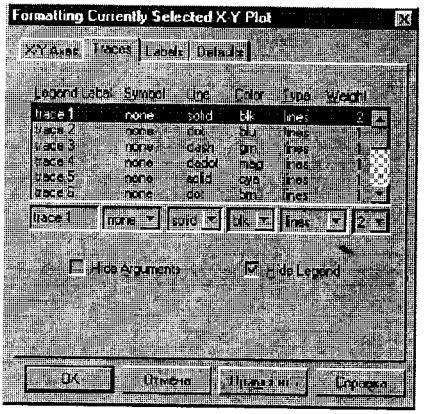
Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими определениями, графиками и окнами диалога приведен ниже.





Указание. Определите функцию $f(x)$ и постройте ее график, действуя, как в предыдущем примере. Для того чтобы найти корни уравнения — абсциссы точек пересечения графика функции с осью $y = 0$, щелкните по строке **Trace** в пункте **Graph** меню **Format** (см. разд. 1.5). Затем щелкните по полю графиков и установите (стрелками клавиатуры или мышью) маркер (перекрещивающиеся пунктирные линии) в точке пересечения графика функции с осью абсцисс. В окне диалога отображаются координаты маркера: значение координаты x в окне и есть искомое приближенное значение корня.





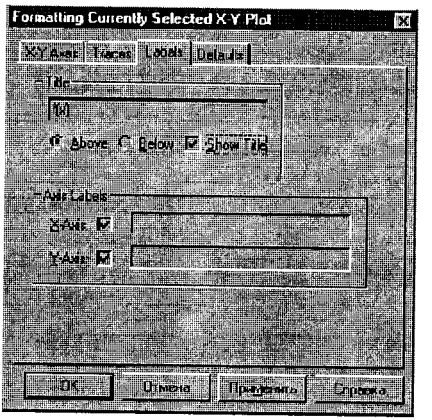


Рис. 1.47. Окна диалога настройки параметров декартова графика

Символьное решение уравнений и систем

Пример 8. Решите уравнение $\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2} = 0$.

Символьное решение этого уравнения в Mathcad занимает одну строчку.

$$\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}\ \text{solve}, x \rightarrow \frac{5}{2}$$

Указание. Щелкните по кнопке решения уравнений solve в панели символьных вычислений. Введите в помеченной позиции слева от ключевого слова **solve** (решить) выражение для правой части уравнения, а в позиции справа от **solve** — имя переменной, относительно которой нужно решить уравнение, и щелкните по свободному месту в рабочем документе. Результат — значение корня уравнения — будет отображен в рабочем документе справа от стрелки.

Пример 9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(z+1)^2 - 2z(x+z) = 0, \\ (1+x^2)\sqrt[4]{y-2} - 2x^2 = 0, \\ \sqrt{y-2}\,(z-2) + z = 0. \end{cases}$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

Given

$$x\cdot(z+1)^2 - 2\cdot z\cdot(x+z)=0$$

$$(1+x^2)\cdot\sqrt[4]{y-2} - 2\cdot x^2=0$$

$$\sqrt{y-2}\cdot(z-2) + z=0$$

$$\mathrm{Find}(x,y,z) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Указание. Введите с клавиатуры ключевое слово Given (дано), затем правее и ниже ключевого слова — левую часть первого уравнения системы, далее — символьный знак равенства (нажмите на клавиатуре клавиши <Ctrl>+<=>) и правую часть уравнения (нуль). Аналогично введите остальные два уравнения системы. Правее и ниже последнего уравнения системы введите имя функции Find (найти), перечислите в скобках имена переменных, значения которых нужно вычислить, выделите Find(x,y,z), щелкните по кнопке [▪→] в панели [ ]. Вычисленное решение системы будет отображено *после щелчка мышью вне выделяющей рамки* в рабочем документе справа от стрелки — в виде матрицы, каждый столбец которой содержит одно из решений системы. В приведенном выше фрагменте рабочего документа найдены два решения системы: $x=0$, $y=2$, $z=0$ и $x=1$, $y=3$, $z=1$.

ГЛАВА 2
ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1
ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ MATHCAD

Приступая к непосредственному решению в Mathcad задач линейной алгебры, познакомимся с инструментами, которые предоставляет пакет для этой цели.

В задачах линейной алгебры практически всегда возникает необходимость выполнять различные операции с матрицами. Предварительно матрицу нужно определить и ввести в рабочий документ Mathcad. Для того чтобы определить матрицу, введите с клавиатуры имя матрицы и знак присваивания — нажмите на клавиатуре комбинацию клавиш <Shift>+<:>*. Затем щелкните по кнопке в панели математических инструментов, чтобы открыть панель операций с матрицами и векторами (рис. 2.1).

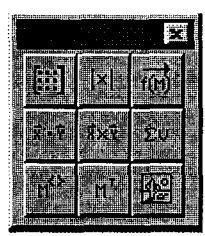


Рис. 2.1. Панель операций с матрицами и векторами

Откройте щелчком по кнопке окно диалога (рис. 2.2), определите число строк (**Rows**), число столбцов (**Columns**) и закройте окно диалога, щелкнув по кнопке OK.

В рабочем документе справа от знака присваивания открывается поле ввода матрицы с помеченными позициями для ввода элементов. Для того чтобы ввести элемент матрицы, установите курсор в помеченной позиции и введите с клавиатуры число или выражение. Фраг-

*Нажмите клавиши <Shift> и <:> одновременно.

мент рабочего документа Mathcad в момент ввода элементов матрицы приведен ниже.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$$

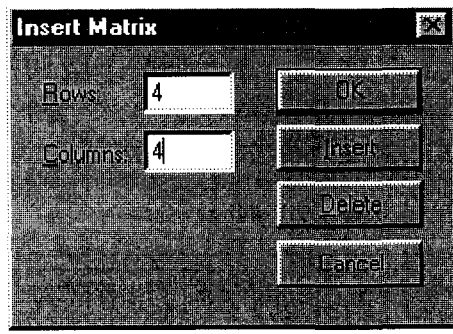


Рис. 2.2. Окно диалога определения размеров матрицы

Большинство вычислений с матрицами, как и другие вычисления в Mathcad, можно выполнить тремя способами — с помощью панелей инструментов, выбором операции в меню или обращением к соответствующей функции.

Панель операций с матрицами и векторами открывается щелчком по кнопке в панели математических инструментов. За кнопками панели (см. рис. 2.1) закреплены следующие функции:

— определение размеров матрицы;

— вычисление определителя матрицы: $|A| = \det A$; вычисление длины вектора $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{x}|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$;

— поэлементные операции с матрицами: если $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$, то $\overline{AB} = \{a_{ij}b_{ij}\}$;

— вычисление скалярного произведения векторов: $\boldsymbol{xy} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$;

— вычисление векторного произведения двух векторов: $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$;

— вычисление суммы компонент вектора: $\sum v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$;

— определение столбца матрицы: $M^{<j>}$ — j-й столбец матрицы;

— транспонирование матрицы: $M = \{m_{ij}\}$, $M^T = \{m_{ji}\}$;

— визуализация цифровой информации, сохраненной в матрице.

Для того чтобы выполнить какую-либо операцию с помощью панели инструментов, нужно выделить матрицу и щелкнуть в панели по кнопке операции либо щелкнуть по кнопке в панели и ввести в помеченной позиции имя матрицы.

Меню символьных операций с матрицами (рис. 2.3) содержит три функции — транспонирование (**Transpose**), обращение матрицы (**Invert**) и вычисление определителя матрицы (**Determinant**).

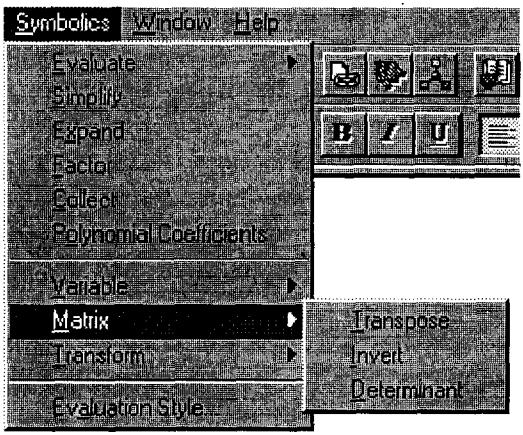


Рис. 2.3. Меню символьных операций с матрицами

Если требуется произвести какую-либо операцию через меню, нужно выделить матрицу и щелкнуть в меню по строке операции.

Функции, предназначенные для решения задач линейной алгебры, можно разделить на три группы: функции определения матриц и операции с блоками матриц, функции вычисления различных числовых характеристик матриц и функции, реализующие численные алгоритмы решения задач линейной алгебры. Опишем наиболее часто используемые функции.

Функции определения матриц и операции с блоками матриц:

matrix(m, n, f) — создает и заполняет матрицу размерности m × n, элемент которой, расположенный в i-й строке, j-м столбце, равен значению f(i, j) функции f(x, y);

diag(v) — создает диагональную матрицу, элементы главной диагонали которой хранятся в векторе v;

identity(n) — создает единичную матрицу порядка n;

augment(A, B) — формирует матрицу, в первых столбцах которой содержится матрица A, а в последних — матрица B (матрицы A и B должны иметь одинаковое число строк);

stack(A, B) — формирует матрицу, в первых строках которой содержится матрица A, а в последних — матрица B (матрицы A и B должны иметь одинаковое число столбцов);

submatrix(A, ir, jr, ic, jc) — формирует матрицу, которая является блоком матрицы A, расположенным в строках с ir по jr и в столбцах с ic по jc, $ir \le jr$, $ic \le jc$.

Номер первой строки (столбца) матрицы или первой компоненты вектора хранится в Mathcad в переменной ORIGIN. По умолчанию в Mathcad координаты векторов, столбцы и строки матрицы нумеруются начиная с 0 (ORIGIN := 0). Поскольку в математической записи чаще используется нумерация с 1, здесь и в дальнейшем перед началом работы с матрицами будем определять значение переменной ORIGIN равным 1, т.е. будем прежде всего выполнять команду ORIGIN := 1.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий примеры исполнения перечисленных выше функций, приведен ниже.

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$\mathbf{f}(x,y) := x + y \qquad A := \mathbf{matrix}(3,4,\mathbf{f}) \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$i := 1..4 \quad v_i := i \qquad B := \mathbf{diag}(v) \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$E := \mathbf{identity}(3) \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D := \mathbf{augment}(A,E) \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F := \mathbf{stack}(A, B) \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$G := \mathbf{submatrix}(F, 4, 5, 1, 2) \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Функции вычисления различных числовых характеристик матриц:

last(v) — вычисление номера последней компоненты вектора v;

length(v) — вычисление количества компонент вектора v;

rows(A) — вычисление числа строк в матрице A;

cols(A) — вычисление числа столбцов в матрице A;

max(A) — вычисление наибольшего элемента в матрице A;

tr(A) — вычисление следа квадратной матрицы A (след матрицы равен сумме ее диагональных элементов);

rank(A) — вычисление ранга матрицы A (определение ранга матрицы см. в разд. 2.5);

norm1(A), norm2(A), norme(A), normi(A) — вычисление норм квадратной матрицы A (определение норм матрицы см. в разд. 2.4).

Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий примеры использования названных функций для матриц, определенных в приведенном ранее рабочем документе.

last(v) = 4 **length(v) = 4**

rows(D) = 3 **cols(D) = 7** **max(D) = 5**

tr(B) = 10 **rank(A) = 2**

norm1(B) = 4 **norm2(B) = 4** **normi(B) = 4** **norme(B) = 5.477**

Функции, реализующие численные алгоритмы решения задач линейной алгебры:

rref(A) — приведение матрицы к ступенчатому виду с единичным базисным минором (выполняются элементарные операции со строками матрицы);

eigenvals(A) — вычисление собственных значений квадратной матрицы A (определение собственных значений см. в разд. 2.7);

eigenvecs(A) — вычисление собственных векторов квадратной матрицы A; значением функции является матрица, столбцы которой есть собственные векторы матрицы A, причем порядок следования векторов отвечает порядку следования собственных значений, вычисленных функцией eigenvals(A);

eigenvec(A, l) — вычисление собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению l;

lsolve(A, b) — решение системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий примеры использования перечисленных функций, приведен ниже.

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{eigenvals}(C) = \begin{bmatrix} 5.439 \\ 0.271 \\ -2.71 \end{bmatrix} \qquad L := \mathbf{eigenvals}(C)$$

$$\mathbf{eigenvecs}(C) = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.76 & -0.415 \\ 0.321 & -0.611 & -0.432 \\ 0.711 & 0.222 & 0.801 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{eigenvec}(C, L_2) = \begin{bmatrix} -0.76 \\ 0.611 \\ -0.222 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix} \qquad X := \mathbf{lsolve}(C, b) \qquad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Вычисления с использованием описанных функций выполняются стандартным для Mathcad способом (см. гл.1). Чтобы обратиться к функции, введите с клавиатуры имя функции, перечислите в скобках ее аргументы, введите знак равенства и щелкните по свободному месту в рабочем документе вне выделяющей рамки. Результат вычислений в соответствующем виде (число, вектор, матрица) будет отображен в рабочем документе справа от знака равенства. Если предполагается использовать результаты в дальнейших вычислениях, им следует присвоить имя*. Для этого введите с клавиатуры имя переменной и знак присваивания, а справа от него — имя функции со списком аргументов в круглых скобках. Если теперь ввести с клавиатуры имя переменной, знак равенства и щелкнуть по свободному месту в рабочем документе вне выделяющей рамки, то результат вычислений будет отображен

*На самом деле происходит следующее: Mathcad сохраняет результаты вычислений в переменной, имя которой указано слева от знака присваивания.

справа от знака равенства. Имя функции можно вставить из списка: щелкните по месту вставки, затем — по строке **Function** в меню **Insert**, выберите в окне списка стрелками прокрутки нужную функцию и подтвердите выбор щелчком по кнопке [OK] в окне диалога (рис. 2.4).

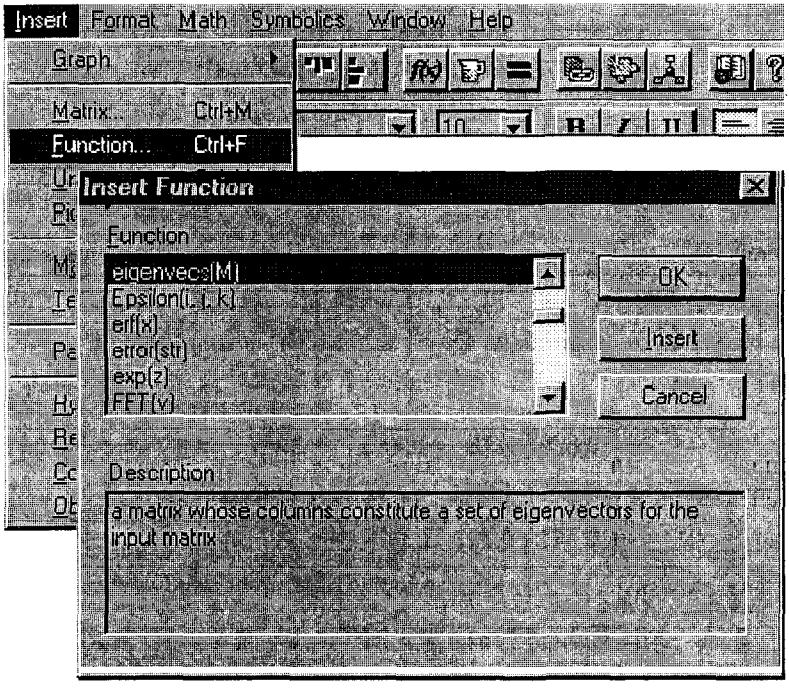


Рис. 2.4. Меню и окно диалога выбора функции

При выполнении символьных операций через меню можно изменить режим отображения результатов вычислений — результат может быть отображен ниже или справа от матрицы, над которой выполнены операции. Режим отображения результатов символьных вычислений определяется в пункте **Evaluation Style** (Стиль выражения) меню **Symbolics** как **Verticaly** (Вертикальный) или **Horizontally** (Горизонтальный). Вид меню и окна диалога настройки режима отображения результатов приведен в гл. 1.

Вычисления могут производиться в двух режимах — автоматическом и последовательном. В первом случае операция выполняется сразу после ввода команды и щелчка по рабочему документу вне выделяющей рамки, во втором — после команды **Calculate** (Вычислить). Режим вычислений устанавливается в меню **Math** (рис. 2.5). По умолчанию включен режим автоматических вычислений (строка меню помечена

символом $\surd$). Если автоматический режим отключен, результат будет вычислен после щелчка по строке **Calculate** в меню **Math**.

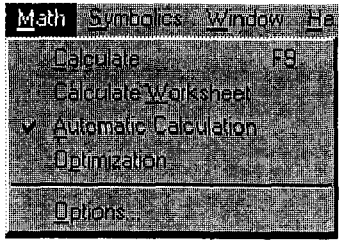


Рис. 2.5. Настройка режима вычислений

2.2 ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

Основные матричные операции

Основными матричными операциями являются умножение матрицы на число, сложение и перемножение двух матриц.

По определению, чтобы *умножить матрицу на число*, нужно умножить на это число все элементы матрицы.

Суммой двух матриц одинаковой размерности называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

Операция *умножения матрицы на матрицу* определяется более сложным образом. Пусть заданы две матрицы A и B, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй. Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix},$$

то *произведением матриц* A и B называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, k.$$

Произведение матриц A и B обозначается AB, т.е. $C = AB$. Оно, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными*.

В множестве квадратных матриц определена *единичная матрица* — квадратная матрица, все диагональные элементы которой — единицы, а остальные — нули:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица чаще всего обозначается буквой E или E_n, где n — порядок матрицы. Непосредственным вычислением легко проверить основное свойство единичной матрицы: $AE = EA = A$.

Скалярной матрицей называется диагональная матрица с одинаковыми числами на главной диагонали; единичная матрица — частный случай скалярной матрицы.

Из приведенных ниже вычислений видно, что умножением на матрицы специального вида можно переставить в матрице столбцы или строки, вычислить сумму элементов любых строки или столбца, получить матрицу, равную каким-либо строке или столбцу матрицы, реализовать операцию умножения матрицы на число.

$$D := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Суммирование элементов по столбцам

$$Crow := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Crow \cdot D = \begin{bmatrix} 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

Выделение одного столбца

$$C3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D \cdot C3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Суммирование элементов по строкам

$$Ccol := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D \cdot Ccol = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Выделение одной строки

$$C1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C1 \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C2 \cdot D = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Умножение на единичную матрицу

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad D \cdot E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Умножение на число, умножение на скалярную матрицу

$$2\cdot D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix} \qquad E2 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad E2\cdot D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

Перестановка двух строк

$$C12 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C12\cdot D = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad C23 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C23\cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Перестановка двух столбцов

$$D\cdot C12 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad D\cdot C23 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

ЗАДАНИЕ 2.1

Умножая на матрицы специального вида, сформируйте матрицу-столбец и матрицу-строку, соответственно равные столбцу и строке матрицы A с заданными в условии номерами. Вычислите суммы элементов столбца и строки, номера которых указаны в задании. Переставьте указанные в задании строки и столбцы матрицы.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматического выполнения вычислений.
2. Определите и введите матрицу A.
3. Введите матрицу, умножение на которую выделяет столбец и строку матрицы с указанным номером. Выполните умножение.
4. Введите матрицу, умножение на которую суммирует элементы указанных столбца и строки. Выполните умножение.
5. Введите матрицу, умножение на которую переставляет указанные столбцы и строки. Выполните умножение.

Пример выполнения задания

Выше приведен пример выполнения задания для матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Транспонирование. Вычисление обратной матрицы. Ортогональные матрицы

Для прямоугольных матриц определена операция транспонирования. Рассмотрим произвольную прямоугольную матрицу A. Матрица, получающаяся из матрицы A заменой строк столбцами, называется *транспонированной* по отношению к матрице A и обозначается A^T:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *обратимой*, если существует квадратная матрица X, удовлетворяющая соотношениям $AX = XA = E$. Матрица X называется *обратной* к матрице A и обозначается A^{-1}, т.е. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Квадратная матрица A, для которой $A^T = A$, называется *симметричной*. Элементы такой матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны.

Квадратная матрица U, для которой $U^{-1} = U^T$, называется *ортогональной* матрицей. Модуль определителя ортогональной матрицы равен единице; сумма квадратов элементов любого столбца ортогональной матрицы равна единице; сумма произведений элементов любого столбца ортогональной матрицы на соответствующие элементы другого столбца равна нулю*. Такими же свойствами обладают строки ортогональной матрицы.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий символьные вычисления с ортогональной матрицей, приведен ниже.

Ортогональная матрица

$$U = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Определитель

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \qquad \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 \qquad 1$$

*Это означает, что в соответствующем евклидовом пространстве n-мерных векторов (см. разд. 2.6) столбцы ортогональной матрицы образуют ортонормированную систему.

Транспонирование

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Обращение

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos(\alpha)}{(\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2)} & \dfrac{-\sin(\alpha)}{(\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2)} \\ \dfrac{\sin(\alpha)}{(\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2)} & \dfrac{\cos(\alpha)}{(\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2)} \end{bmatrix}$$

Повторное обращение

$$(U^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Указание. Для определения символьной матрицы введите с клавиатуры ее имя, символьный знак равенства (нажмите на клавиатуре одновременно клавиши <Ctrl> и <=> — на экране будет отображен знак равенства), определите размеры матрицы и введите ее элементы. Ввести букву греческого алфавита можно, щелкнув по кнопке с нужной буквой в панели [αβ]. Символьные операции с матрицами (транспонирование, вычисление определителя и обращение) выполняются через меню символьных операций **Symbolics**. Заключите символьную матрицу в выделяющую рамку (щелкните по любому элементу и нажимайте клавишу <Space> пока выделяющая рамка не охватит всю матрицу), затем выберите нужную операцию в пункте **Matrix** меню **Symbolics**. Чтобы упростить выражение для определителя матрицы U, заключите выражение в выделяющую рамку и выберите пункт **Symplify** в меню **Symbolics**. Для ввода A^T щелкните по кнопке транспонирования [M'] в панели [⁞⁞⁞].

ЗАДАНИЕ 2.2

Докажите, что матрица $H = E - 2\frac{vv^T}{|v|^2}$ (v — вектор-столбец) — ортогональная матрица. Проверьте для нее свойства ортогональной матрицы. В качестве v возьмите первый столбец матрицы A из задания 2.1.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Введите матрицу-столбец V и единичную матрицу E соответствующей размерности.

4. Вычислите матрицу H.
5. Вычислите произведения $H^T H$ и $H H^T$.
6. Вычислите H^{-1}. Сравните H^{-1} и H^T.
7. Покажите, что векторы-столбцы матрицы H имеют единичную длину и попарно ортогональны. Убедитесь, что выполняется равенство $|\det H| = 1$.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad с отчетом о выполнении задания 2.2 для вектора $v = (1\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^T$ приведен ниже.

$$V := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad E := \mathrm{identity}(4) \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Вычисление матрицы H $\quad H := E - \dfrac{2}{(|V|)^2} \cdot V \cdot V^T$

$$H = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{bmatrix} \qquad H^T = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{bmatrix}$$

Доказательство ортогональности матрицы H

$$H \cdot H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H^T \cdot H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{bmatrix} \qquad H^{-1} - H^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Проверка свойств ортогональной матрицы

ORIGIN := 1

$H^{\langle 1\rangle}\cdot H^{\langle 1\rangle} = 1 \quad H^{\langle 1\rangle}\cdot H^{\langle 2\rangle} = 0 \quad H^{\langle 2\rangle}\cdot H^{\langle 3\rangle} = 0$

$H^{\langle 2\rangle}\cdot H^{\langle 2\rangle} = 1 \quad H^{\langle 1\rangle}\cdot H^{\langle 3\rangle} = 0 \quad H^{\langle 2\rangle}\cdot H^{\langle 4\rangle} = 0$

$H^{\langle 3\rangle}\cdot H^{\langle 3\rangle} = 1 \quad H^{\langle 1\rangle}\cdot H^{\langle 4\rangle} = 0 \quad H^{\langle 3\rangle}\cdot H^{\langle 4\rangle} = 0$

$H^{\langle 4\rangle}\cdot H^{\langle 4\rangle} = 1 \quad |H| = -1$

Указание. Для того чтобы вычислить сумму квадратов элементов одного столбца или сумму произведений соответственных элементов двух столбцов, перемножьте столбцы матрицы скалярно — щелкните по кнопке в панели и введите в помеченных позициях имена сомножителей. Для определения столбца матрицы нажмите на клавиатуре клавиши <Ctrl>+<6> и введите в помеченной позиции номер столбца. Символом |H| в рабочем документе Mathcad обозначен определитель матрицы H.

Вычисление степени матрицы. Некоторые специальные матрицы

Для квадратных матриц определена операция *возведения в целую неотрицательную степень*:

$$A^0 = E, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad \ldots, \quad A^n = A^{n-1}.$$

Матрица P называется *идемпотентной*, если $P^2 = P$.
Матрица I называется *инволютивной*, если $I^2 = E$.

ЗАДАНИЕ 2.3

Докажите, что матрица P идемпотентна. Вычислите ее определитель*. Покажите, что матрица $I = 2P - E$ инволютивна. Вычислите ее определитель и обратную матрицу.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Введите матрицу P.
3. Вычислите P^2 и $P^2 - P$.
4. Вычислите $\det P$ и P^{-1}.
5. Введите единичную матрицу E той же размерности, что и матрица P.

*Об определителях матрицы см. разд. 2.3.

6. Вычислите матрицу $I = 2P - E$.
7. Вычислите матрицу I^2.
8. Вычислите $\det I$ и I^{-1}.

Пример выполнения задания

Докажите, что матрица

$$P = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

идемпотентна. Вычислите ее определитель. Покажите, что матрица $I = 2P - E$ инволютивна. Вычислите ее определитель и обратную матрицу.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$P := \begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix}$$

Матрица P идемпотентна

$$P^2 = \begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix} \qquad P^2 - P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{bmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{bmatrix} \right| = -4.263 \cdot 10^{-14} \qquad P^{-1} \text{ не существует}$$

$$E := \text{identity}(3) \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I := 2 \cdot P - E$$

Матрица I инволютивна

$$I = \begin{bmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{bmatrix} \qquad I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Вычисление определителя и обратной матрицы для I

$$\left|\begin{bmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{bmatrix}\right| = -1 \quad I^{-1} = \begin{bmatrix} -53 & -36 & -54 \\ 42 & 29 & 42 \\ 24 & 16 & 25 \end{bmatrix}$$

Указание. Для того чтобы вычислить P^2, нажмите на клавиатуре клавиши <P><^><2>. Матрица P не имеет обратной, потому что вычисленное значение определителя матрицы P с точностью до погрешностей округления равно нулю. В разд. 2.4 показано, что матрицы с нулевым определителем не имеют обратных.

2.3
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

Вычисление определителей

Пусть A — квадратная матрица порядка n, $n > 1$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определителем квадратной матрицы A порядка n, $n > 1$, называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{j+1} M_1^{<j>},$$

где $M_1^{<j>}$ — определитель квадратной матрицы порядка $n-1$, полученной из матрицы A вычеркиванием первой строки и j-го столбца.

Из приведенного определения легко получить простое выражение определителя квадратной матрицы *второго порядка* через элементы матрицы*:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

поскольку $M_1^{<1>} = a_{22}$, $M_1^{<2>} = a_{21}$.

*Полагаем, что матрицей порядка $n-1$ является число и определитель такой матрицы равняется этому числу.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисления определителя квадратной матрицы второго порядка (символьное и численное), приведен ниже.

Символьное вычисление определителя матрицы второго порядка

$$\left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right| \rightarrow a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} \qquad \textbf{Числовой пример:} \left|\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right| \rightarrow -2$$

Формулу $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{j+1}M_1^{<j>}$ называют формулой вычисления определителя *разложением по первой строке*. Число $(-1)^{j+1}M_1^{<j>}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{1j}.

Пусть $M_i^{<j>}$ — определитель квадратной матрицы порядка $n-1$, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца; число $(-1)^{i+j}M_i^{<j>}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A. Справедливо следующее утверждение.

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е. для произвольной квадратной матрицы порядка n для всех i, $1 \le i \le n$, и для всех j, $1 \le j \le n$, справедливы формулы:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_i^{<k>} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j}M_k^{<j>}.$$

Приведенные формулы называют формулами вычисления определителя *разложением по i-й строке* и *разложением по j-му столбцу* соответственно.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление определителя четвертого порядка разложением по первой строке, приведен ниже.

ORIGIN := 1

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 10 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

```
M11 := submatrix(A,2,4,2,4)

M12 := augment(submatrix(A,2,4,1,1),submatrix(A,2,4,3,4))

M13 := augment(submatrix(A,2,4,1,2),submatrix(A,2,4,4,4))

M14 := (submatrix(A,2,4,1,3))
```

$$M11 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 10 & 12 & 13 \end{bmatrix} \qquad M12 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -7 & 6 & 7 \\ 3 & 12 & 13 \end{bmatrix} \qquad M13 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -7 & 5 & 7 \\ 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

$$M14 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -7 & 5 & 6 \\ 3 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

$$detA := 1 \cdot |M11| - (-2) \cdot |M12| + 3 \cdot |M13| \qquad detA = 477 \qquad |A| = 477$$

Указание. Для того чтобы столбцы и строки матрицы нумеровались, начиная с единицы, присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице. Затем определите и введите матрицу A. Для определения блоков M11, M12, M13, M14, полученных вычеркиванием 1-й строки из матрицы A и соответственно 1-, 2-, 3-и 4-го столбцов, используйте функции submatrix и augment. Функция submatrix(A, 2, 4, 2, 4) формирует матрицу третьего порядка M11, содержащую элементы 2–4-й строк 2–4-го столбцов матрицы A, т.е. матрицу, полученную вычеркиванием 1-й строки и 1-го столбца; функция augment(submatrix(A,2,4,1,1), submatrix(A,2,4,3,4)) формирует матрицу третьего порядка M12 — матрицу, полученную вычеркиванием 1-й строки и 2-го столбца: к блоку, содержащему элементы 2–4-й строк 1-го столбца матрицы A, дописываем справа элементы 2–4-й строк 3-го и 4-го столбцов матрицы A. Аналогично сформируйте блоки M13 и M14. Когда все нужные матрицы третьего порядка сформированы и выведены на экран, вычислите определитель разложением по 1-й строке. Введите с клавиатуры имя detA, знак присваивания и выражение $detA = 1 \cdot detM11 - (-2) \cdot M12 + 3 \cdot M13 - detM14$. Выведите на экран вычисленное значение определителя. Затем вычислите определитель матрицы, используя панель матричных операций, и сравните полученные результаты.

ЗАДАНИЕ 2.4

Вычислите разложением по указанной строке (столбцу) определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Выполните вычисления для матрицы H, построенной в задании 2.2, разложением по 2-й строке (варианты 1–10), по 2-му столбцу (варианты 11–20).

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное 1.
3. Введите матрицу.
4. Запишите в тетради выражение для вычисления определителя матрицы разложением по указанной в задании строке (столбцу).
5. Сформируйте матрицы, полученные вычеркиванием соответствующих строк и столбцов заданной матрицы, и выведите их на экран.
6. Введите выражение для вычисления определителя, вычислите и выведите на экран его значение.
7. Вычислите определитель матрицы, используя функцию Mathcad. Сравните результаты.

Пример выполнения задания

Выше приведен пример вычисления определителя матрицы A, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -7 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 10 & 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера

При решении задач линейной алгебры необходимость вычислять определитель возникает достаточно часто. Наиболее распространенные приложения определителя — исследование и решение линейных систем. Исследованию линейных систем посвящен специальный раздел. Здесь рассмотрим решение линейных систем по формулам Крамера. Пусть

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

система n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей системы*, а вектор-столбец $\boldsymbol{b} = (b_1 \;\; b_2 \;\; \ldots \;\; b_n)^T$ — *столбцом правых частей системы*. Рассмотренная система линейных алгебраических уравнений может быть записана в матричной форме в виде $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{x}$ — вектор-столбец неизвестных, $\boldsymbol{x} = (x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n)^T$.

Справедливо следующее утверждение. Если определитель $\Delta = \det A$ матрицы системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ отличен от нуля, то система имеет единственное решение $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяемое формулами Крамера $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i — определитель матрицы n-го порядка, полученной из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом правых частей.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение линейной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10, \\ -x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10. \end{cases}$$

ORIGIN := 1

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad \Delta := |A| \qquad \Delta = -4$$

Определитель отличен от нуля,
система имеет единственное решение

$$\Delta 1 := \left| \begin{bmatrix} 30 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Delta 1 = -4 \qquad \Delta 2 := \left| \begin{bmatrix} 1 & 30 & 3 & 4 \\ -1 & 10 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right| \quad \Delta 2 = -8$$

$$\Delta 3 := \left|\begin{bmatrix} 1 & 2 & 30 & 4 \\ -1 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}\right| \quad \Delta 3 = -12 \qquad \Delta 4 := \left|\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right| \quad \Delta 4 = -4$$

$$x1 := \frac{\Delta 1}{\Delta} \qquad x1 = 1 \qquad x2 := \frac{\Delta 2}{\Delta} \qquad x2 = 2$$

$$x3 := \frac{\Delta 3}{\Delta} \qquad x3 = 3 \qquad x4 := \frac{\Delta 4}{\Delta} \qquad x4 = 1$$

Указание. Для вычисления определителей $\Delta 1$, $\Delta 2$, $\Delta 3$, $\Delta 4$ проще всего скопировать матрицу A в буфер обмена, затем щелкнуть по кнопке $\boxed{|\times|}$ в панели $\boxed{\vdots}$, вставить в помеченной позиции матрицу из буфера обмена (<Ctrl>+<C> или пункт **Insert** меню **Edit**) и затем заменить элементы соответствующего столбца элементами столбца правых частей.

ЗАДАНИЕ 2.5

Исследуйте и, если решение существует, найдите по формулам Крамера решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматического выполнения вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Введите матрицу системы и столбец правых частей.
4. Вычислите определитель матрицы системы. Система имеет единственное решение, если определитель отличен от нуля.
5. Вычислите определители матриц, полученных заменой соответствующего столбца столбцом правых частей.
6. Найдите решение системы по формулам Крамера.

Пример выполнения задания

Выше приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10, \\ \quad - \ x_2 - \ x_3 + \ x_4 = \ 3, \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 + \ x_4 = 10. \end{cases}$$

2.4 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Матричная форма записи линейных систем. Решение матричных уравнений

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Эта система в "свернутом" виде может быть записана в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В соответствии с правилом умножения матриц (см. разд. 2.2) рассмотренная система линейных уравнений может быть записана в матричном виде $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A, столбцами которой являются коэффициенты при соответствующих неизвестных, а строками — коэффициенты при неизвестных в соответствующем уравнении, называется *матрицей системы*; матрица-столбец $\boldsymbol{b}$, элементами которой являются правые части урав-

нений системы, называется *матрицей правой части* или просто *правой частью* системы. Матрица-столбец $\boldsymbol{x}$, элементы которой — искомые неизвестные, называется *решением системы*.

Таким образом, система линейных алгебраических уравнений может быть записана в матричном виде — в виде простейшего матричного уравнения* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Если матрица системы невырождена**, то у нее существует обратная матрица и тогда решение системы легко получить, умножив обе части уравнения $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ слева на матрицу A^{-1}: $A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{b}$, а поскольку $A^{-1}A = E$ и $E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, то $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение системы трех линейных уравнений относительно трех неизвестных, приведен ниже.

$$\begin{aligned} x + 2\cdot y + 3\cdot z &= 7 \\ x - 3\cdot y + 2\cdot z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned} \qquad A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x := A^{-1}\cdot b \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A\cdot x - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x := \mathrm{lsolve}(A, b) \qquad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Указание. В приведенном документе для сравнения найдено решение системы с использованием функции решения систем линейных алгебраических уравнений lsolve(A, b) (см. разд. 2.1).

ЗАДАНИЕ 2.6

Решите как матричное уравнение $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ систему линейных алгебраических уравнений из задания 2.5.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Введите матрицу системы и матрицу-столбец правых частей.

*Матричным уравнением называется уравнение, коэффициенты и неизвестные которого — прямоугольные матрицы соответствующей размерности.

** *Невырожденной* называется матрица, определитель которой отличен от нуля.

3. Вычислите решение системы по формуле $x = A^{-1}b$.
4. Проверьте правильность решения умножением матрицы системы на вектор-столбец решения.
5. Найдите решение системы с помощью функции lsolve и сравните результы вычислений.

Пример выполнения задания

Выше приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение системы

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ x - 3y + 2z = 5, \\ x + \ \ y + \ \ z = 3. \end{cases}$$

Решение линейной системы методом Гаусса

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений можно разделить на точные и приближенные.

Метод решения задачи относят к классу точных, если в предположении отсутствия округлений с его помощью можно найти решение в результате конечного числа арифметических и логических операций.

В разд. 2.3 рассмотрен точный метод решения линейной системы — решение системы по формулам Крамера.

Метод Гаусса — точный метод решения невырожденной* системы линейных алгебраических уравнений. *Метод Гаусса*, его еще называют *методом гауссовых исключений*, состоит в том, что систему n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных x_1, x_2, ..., x_n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = d_n, \end{cases}$$

---

* *Невырожденной* называется система n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных с невырожденной матрицей системы.

решение которой находят по рекуррентным формулам

$$x_n = d_n, \qquad x_i = d_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

В матричной записи это означает, что сначала (прямой ход метода Гаусса) элементарными операциями* над строками приводят расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A_{\text{р}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \ldots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & d_n \end{pmatrix},$$

а затем (обратный ход метода Гаусса) эту ступенчатую матрицу преобразуют так, чтобы в первых n столбцах получилась единичная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & x_n \end{pmatrix}.$$

Последний, $(n+1)$-й столбец этой матрицы содержит решение системы.

В Mathcad прямой и обратный ходы метода Гаусса выполняет функция rref(A).

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение методом Гаусса системы трех линейных уравнений относительно трех неизвестных.

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$\mathbf{Ar} := \mathbf{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \qquad \mathbf{Ar} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**Элементарными операциями над строками матрицы* называются следующие операции: перестановка строк, умножение строки на отличное от нуля число, сложение любой строки матрицы с другой строкой, умноженной на отличное от нуля число. Доказано, что после элементарных операций над строками расширенной матрицы системы получается расширенная матрица эквивалентной системы.

$$\mathbf{Ag} := \mathbf{rref}(\mathbf{Ar}) \qquad \mathbf{Ag} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} := \mathbf{submatrix}(\mathbf{Ag}, 1, 3, 4, 4) \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Указание. Для того чтобы сформировать расширенную матрицу системы, используйте функцию augment(A, b), которая формирует матрицу, добавляя к столбцам матрицы системы A справа столбец правых частей b (в приведенном документе расширенной матрице системы присвоено имя Ar). Функция rref(Ar) выполняет элементарные операции со строками расширенной матрицы системы Ar — приводит ее к ступенчатому виду с единичной матрицей в первых столбцах, т.е. выполняет прямой и обратный ходы гауссова исключения, Ag — имя результата (ступенчатой формы матрицы Ar). Функция submatrix(Ag, 1, 3, 4, 4), выделяя последний столбец матрицы Ag, формирует столбец решения системы. Проверка (вычисление Ax − b) позволяет убедиться в правильности решения.

ЗАДАНИЕ 2.7

Найдите методом Гаусса решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

из задания 2.5.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Введите матрицу системы и матрицу-столбец правых частей.
4. Сформируйте расширенную матрицу системы.
5. Приведите расширенную матрицу системы к ступенчатому виду.
6. Сформируйте столбец решения системы.
7. Проверьте правильность решения умножением матрицы системы на вектор-столбец решения.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий пример решения системы третьего порядка, приведен выше.

Решение системы линейных алгебраических уравнений методом простых итераций

Точные методы решения линейных систем применяют для решения линейных систем относительно небольшой размерности (до 10^3). Для решения систем большей размерности (10^3–10^6) используют итерационные методы*. Итерационные методы хороши для систем с разреженными** матрицами. Рассмотрим простейший итерационный метод решения линейной системы — метод простых итераций.

Метод состоит в том, что система уравнений $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ преобразуется к виду $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + A\boldsymbol{x}$ и ее решение вычисляется как предел последовательности

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{b} + A\boldsymbol{x}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Преобразовать систему $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ к виду $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + A\boldsymbol{x}$ можно, выделив диагональные элементы:

$$x_i = \frac{1}{c_{ii}}\Big(d_i - \sum_{i \neq j} c_{ij} x_j\Big), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для того чтобы сформулировать достаточное условие сходимости метода, напомним определения норм, наиболее часто употребляемых при исследовании линейных систем. Понятие нормы позволяет оценить степень близости двух векторов. В частности, если норма разности точного и приближенного решений системы мала, то, по-видимому, приближенное решение хорошо аппроксимирует точное решение.

Существует много способов введения нормы вектора. Чаще всего используются следующие три нормы:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}; \quad \|\boldsymbol{x}\|_i = \max_i |x_i|,$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Внешне столь различные, эти нормы эквивалентны: когда некоторая последовательность векторов по одной из этих норм стремится к нулю, то она стремится к нулю и по другой норме.

Если для векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ введена норма $\|\boldsymbol{x}\|$, то согласованной с ней нормой матриц называют величину

$$\|A\| = \sup_{\boldsymbol{x} \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}.$$

---

*Для решения систем еще больших размерностей применяют специальные методы, которые здесь не рассматриваются.

**_Разреженными_ называют матрицы, большинство элементов которых — нули.

Так, в случае нормы $\|\boldsymbol{x}\|_1$ согласованная норма матрицы равна $\|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, а в случае нормы $\|\boldsymbol{x}\|_i$ согласованная норма матрицы равна $\|A\|_i = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Обе этих нормы легко вычислить.

Сложнее дело обстоит с вычислением нормы $\|A\|_2$, согласованной с нормой векторов $\|\boldsymbol{x}\|_2$. Точная формула для нее имеет вид $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(AA^T)}$, где $\lambda_{\max}(AA^T)$ — максимальное собственное значение матрицы AA^T.

Вычисление нормы $\|A\|_2$ — трудоемкая задача. Однако, поскольку справедливо неравенство $\|A\|_2 \le \|A\|_e$, где норма $\|A\|_e = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ вычисляется просто, в оценках вместо $\|A\|_2$ можно использовать $\|A\|_e$. Норму $\|A\|_e$ называют *евклидовой нормой матрицы.*

Для сходимости метода простых итераций $\boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{b} + A\boldsymbol{x}^{(k-1)}$ достаточно, чтобы выполнялось условие $\|A\| < 1$ по какой-либо норме матрицы, согласованной с нормой векторов. В качестве условия окончания итерационного процесса можно взять условие

$$\frac{\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\right\|}{\left\|\boldsymbol{x}^{(k)}\right\|} \le \varepsilon,$$

где ε — заданная погрешность приближенного решения $\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{x}^{(k)}$.

ЗАДАНИЕ 2.8

Найдите методом простых итераций приближенное решение линейной системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Преобразуйте исходную систему $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ к виду $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + A\boldsymbol{x}$.
3. Введите матрицы A и $\boldsymbol{b}$.
4. Проверьте достаточное условие сходимости.
5. Определите нулевое (начальное) приближение решения.
6. Задайте количество итераций.
7. Введите формулу вычисления последовательных приближений решения и вычислите их.

8. Выведите на экран матрицу приближенных решений.
9. Вычислите погрешность найденного приближения.

Пример выполнения задания

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение методом простых итераций линейной системы

$$\begin{cases} 100x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 200, \\ 6x_1 + 200_2 - 10x_3 = 600, \\ x_1 + 2x_2 - 100x_3 = 500. \end{cases}$$

Преобразованная система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0.06x_2 + 0.02x_3, \\ x_2 = 3 - 0.03x_1 + 0.05x_3, \\ x_3 = 5 - 0.01x_1 - 0.02x_2. \end{cases}$$

$$b := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad A := \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{norm1}(A) = 0.08 \quad \mathrm{norm2}(A) = 0.070975$

$\mathrm{norme}(A) = 0.088882 \quad \mathrm{normi}(A) = 0.08$

$x^{\langle 0 \rangle} := b \quad k := 1..10 \qquad x^{\langle k \rangle} := b + A \cdot x^{\langle k-1 \rangle}$

x =

	6	7	8	9
0	1.907024	1.907024	1.907024	1.907024
1	3.188647	3.188647	3.188647	3.188647
2	4.917157	4.917157	4.917157	4.917157

$$\varepsilon := \frac{\left| x^{\langle 10 \rangle} - x^{\langle 9 \rangle} \right|}{\left| x^{\langle 9 \rangle} \right|} \qquad \varepsilon = 8.662467 \cdot 10^{-15}$$

Указание. Для проверки выполнения достаточного условия сходимости метода можно ограничиться любой из описанных выше норм. Здесь для примера вычислены нормы матрицы всеми имеющимися в Mathcad встроенными функциями. Для реализации итерационных вычислений с векторами в Mathcad удобно использовать описание вектора-столбца прямоугольной матрицы. В качестве нулевого приближения здесь выбран вектор правых частей преобразованной системы.

Затем вычислены десять приближений решения, которые сохраняются в матрице x так, что k-е приближение хранится в ее k-м столбце $x^{<k>}$. Для того чтобы вывести на экран все найденные приближения, введите с клавиатуры имя матрицы решений x и знак равенства. При выводе на экран больших матриц в рабочем документе открывается окно с полосами прокрутки. Чтобы вычислить норму вектора для оценки погрешности, щелкните по кнопке |x| в панели матричных инструментов и введите в помеченной позиции имя вектора (в оценке погрешности использована норма $\|x\|_e$).

Приведенные в документе вычисления реализованы с помощью встроенных функций пакета. Если использовать возможности программирования в Mathcad, то можно организовать процесс вычисления последовательных приближений так, чтобы вычисления автоматически заканчивались при выполнении условия окончания вычислений с заданным значением погрешности ε.

2.5 ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Решением системы называется совокупность n значений неизвестных

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad \ldots, \quad x_n = x_n',$$

при подстановке которых все уравнения системы обращаются в тождества.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*, система, не имеющая ни одного решения, — *несовместной*.

Система линейных уравнений может быть записана в матричном виде: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, где A — матрица системы, $\boldsymbol{b}$ — правая часть, $\boldsymbol{x}$ — искомое решение, A_p — расширенная матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Однородные системы линейных алгебраических уравнений

Однородной системой линейных уравнений называется система, правая часть которой равна нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, поскольку имеет по крайней мере одно решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$.

Если однородная система имеет единственное решение, то это единственное решение — нулевое, и система называется *тривиально совместной.* Если же однородная система имеет более одного решения, то среди них есть ненулевые и в этом случае система называется *нетривиально совместной.* Доказано, что при $m = n$ для нетривиальной совместности системы необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы системы был равен нулю.

Применив к матрице системы алгоритм гауссовых исключений, описанный в предыдущем разделе, приведем матрицу системы к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Число r ненулевых строк в ступенчатой форме матрицы называется *рангом матрицы*, обозначаем $r = \mathrm{rg}(A)$ или $r = \mathrm{Rg}(A)$.

Справедливо следующее утверждение. Для того чтобы однородная система была нетривиально совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг r матрицы системы был меньше числа неизвестных n.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с исследованием на совместность однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

В Mathcad ранг матрицы можно вычислить с помощью функции rank(A).

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$|\mathbf{A}| = 136$ $\quad$ $\mathbf{rank(A)} = 4$ $\quad$ **Система тривиально совместна, имеет только нулевое решение**

Указание. Вставьте в рабочий документ через меню имя функции: щелкните по свободному месту в рабочем документе, затем — по строке **Function** в меню **Insert**, выберите в списке функций имя rank и введите с клавиатуры в помеченной позиции имя матрицы A*.

Если однородная система нетривиально совместна, то она имеет бесконечное множество решений, причем линейная комбинация любых решений системы тоже является ее решением. Доказано, что среди бесконечного множества решений однородной системы можно выделить ровно $n-r$ линейно независимых решений. Совокупность $n-r$ линейно независимых решений однородной системы называется *фундаментальной системой решений*; любое решение системы линейно выражается через фундаментальную систему. Таким образом, если ранг r матрицы A однородной линейной системы $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ меньше числа неизвестных n и векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-r}$ образуют ее фундаментальную систему решений ($A\boldsymbol{e}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \ldots, n-r$), то любое решение $\boldsymbol{x}$ системы $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + c_{n-r}\boldsymbol{e}_{n-r},$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ — произвольные постоянные.

*В приведенном фрагменте помимо ранга матрицы вычислен определитель матрицы. Отличие от нуля определителя матрицы системы также является доказательством тривиальной совместности системы.

Выражение

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + c_{n-r}\boldsymbol{e}_{n-r}$$

называется *общим решением* однородной системы.

Исследовать однородную систему — это значит установить, является ли она нетривиально совместной, и если является, то найти фундаментальную систему решений и записать выражение для общего решения системы.

Исследуем однородную систему методом Гаусса.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad —$$

матрица исследуемой однородной системы, ранг которой $r < n$.

Такая матрица гауссовыми исключениями приводится к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_{1,r+1} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & c_{2,r+1} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{r,r+1} & \ldots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая эквивалентная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n = 0, \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n = 0. \end{cases}$$

Отсюда легко получить выражения для переменных x_1, x_2, ..., x_r через x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n. Переменные x_1, x_2, ..., x_r называют *базисными переменными*, а переменные x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n — *свободными переменными*.

Перенеся свободные переменные в правую часть, получим формулы

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{rn}x_n, \end{cases}$$

которые определяют общее решение системы.

Положим последовательно значения свободных переменных равными

$$\begin{array}{lllll} x_{r+1}=1, & x_{r+2}=0, & x_{r+3}=0, & \ldots, & x_n=0, \\ x_{r+1}=0, & x_{r+2}=1, & x_{r+3}=0, & \ldots, & x_n=0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{r+1}=0, & x_{r+2}=0, & x_{r+3}=0, & \ldots, & x_n=1 \end{array}$$

и вычислим соответствующие значения базисных переменных. Полученные $n-r$ решений линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений исследуемой однородной системы:

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \ldots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \ldots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-r-1}=\begin{pmatrix} -c_{1,n-1} \\ -c_{2,n-1} \\ \ldots \\ -c_{r,n-1} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_{n-r}=\begin{pmatrix} -c_{1,n} \\ -c_{1,n} \\ \ldots \\ -c_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 2.9

Исследуйте однородную систему линейных алгебраических уравнений $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Введите матрицу системы.
3. Вычислите ранг матрицы системы.
4. Приведите матрицу системы к ступенчатому виду.
5. Определите базисные и свободные переменные.
6. Запишите полученную эквивалентную систему.
7. Используя символьные вычисления, решите полученную систему относительно базовых переменных.
8. Запишите общее решение системы.
9. Найдите фундаментальную систему решений.

Пример выполнения задания

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий исследование однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0, \\ -3x_1 + 12x_2 + 6x_3 - 8x_5 = 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \\ 3 & 12 & 6 & 0 & -8 \\ 2 & 10 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

rank(A) = 3 Система нетривиально совместна.
Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$Ag := \mathrm{rref}(A) \qquad Ag = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Свободные переменные x3, x4, базисные переменные x1, x2, x5,
Запишем и решим эквивалентную систему:

$$\text{Given} \quad x1 - 2\cdot x3 - 8\cdot x4 = 0 \qquad x2 + x3 + 2\cdot x4 = 0 \qquad x5 = 0 \qquad \mathrm{Find}(x1, x2, x5) \rightarrow \begin{bmatrix} 2\cdot x3 + 8\cdot x4 \\ -x3 - 2\cdot x4 \\ x5 \end{bmatrix}$$

Запишем общее решение системы:

$$X(x3, x4) := \begin{bmatrix} 2\cdot x3 + 8\cdot x4 \\ -x3 - 2\cdot x4 \\ x3 \\ x4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Найдем фундаментальную систему решений:

$$X(1,0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X(0,1) = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Указание. Для того чтобы символьно решить систему относительно базисных переменных, используйте функцию Find. Введите с клавиатуры ключевое слово Given, затем — уравнения системы: сначала левую часть уравнения, далее символьный знак равенства (<Ctrl>+<=>) и нулевую правую часть. Разрешите систему относительно базисных переменных x1, x2, x3: введите функцию Find(x1, x2, x3), знак символьных вычислений (<Ctrl>+<.>) и щелкните по свободному месту в рабочем документе. Общее решение системы определите как вектор-функцию, зависящую от свободных переменных x4, x5. Для этого введите с клавиатуры имя вектор-функции X(x4, x5), знак присваивания, определите матрицу из пяти строк и одного столбца, скопируйте в первые три строки выражения для базисных переменных x1, x2, x3, вычисленных функцией Find(x1, x2, x3), и введите с клавиатуры в последних двух строках имена свободных переменных x4, x5. Определенное таким способом выражение можно использовать для вычисления любого частного решения. Так, векторы X(1,0) и X(0,1) — решения, полученные при x4=1, x5=0 и при x4=0, x5=1 соответственно. Эти два решения линейно независимы, они образуют искомую фундаментальную систему решений.

Неоднородные системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим неоднородную систему m линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad \|\boldsymbol{b}\| \neq 0.$$

В отличие от однородной системы эта система совместна не всегда. Справедливо следующее утверждение (теорема Кронекера — Капелли): для того чтобы неоднородная система линейных алгебраических уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы совпадал с рангом матрицы системы.

Исследовать неоднородную систему — это значит установить, является ли она совместной, и если является — найти выражение для общего решения системы.

Исследуем неоднородную систему методом Гаусса.

Пусть

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad —$$

расширенная матрица исследуемой системы, ранг которой r равен рангу матрицы системы и $r < n$.

Такая матрица гауссовымм исключениями приводится к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая эквивалентная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n = d_r. \end{cases}$$

Из этой системы легко получить выражения базисных переменных $x_1, x_2, \dots, x_r$ через свободные переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$. Формулы

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = d_2 - c_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - c_{rn}x_n \end{cases}$$

определяют общее решение системы. Положив свободные переменные равными нулю, $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 0$, $\dots$, $x_n = 0$, и вычислив соответствующие значения базисных переменных, получим частное решение исследуемой системы:

$$x_1 = d_1, \quad x_2 = d_2, \quad \dots, \quad x_r = d_r, \quad x_{r+1} = 0, \quad x_n = 0.$$

ЗАДАНИЕ 2.10

Исследуйте однородную систему линейных алгебраических уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ для двух различных правых частей $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{(1)}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{(2)}$.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Введите матрицу системы и расширенные матрицы системы для обеих правых частей.
3. Вычислите ранги основной матрицы и ранги расширенных матриц обеих систем.
4. Сформулируйте и запишите в рабочем документе соответствующий вывод.
5. Приведите расширенную матрицу совместной системы к ступенчатому виду.
6. Определите базисные и свободные переменные.
7. Запишите эквивалентную систему и разрешите ее относительно базисных переменных.
8. Запишите общее решение системы.
9. Найдите два различных частных решения системы.
10. Проверьте правильность найденных решений.

Пример выполнения задания

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий иссследование однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = b_2, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = b_3, \\ 2x_1 \quad 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = b_4, \\ 3x_1 \quad 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = b_5, \end{cases} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b1} := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b2} := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Ar1} := \mathbf{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{b1})$ $\qquad$ $\mathbf{Ar2} := \mathbf{augment}(\mathbf{A}, \mathbf{b2})$

$$\mathbf{Ar1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Ar2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

rank(A) = 3 rank(Ar1) = 4 rank(Ar2) = 3

rg(A)=3, rg(Ar1)=4, rg(A) отличен от rg(Ar1), система Ax=b1 несовместна; rg(A)=rg(Ar2)=3, система Ax=b2 совместна.

Приведем матрицу системы к ступенчатой форме

$$\mathrm{rref}(Ar2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Свободные переменные x4, x5, базисные переменные x1,x2,x3. Запишем и решим эквивалентную систему

$$\text{Given} \quad \begin{aligned} &x1 - x4 - x5 = 2 \\ &x2 + x4 + x5 = -1 \\ &x3 = 3 \end{aligned} \qquad \mathrm{Find}(x1, x2, x3) \rightarrow \begin{bmatrix} x4 + x5 + 2 \\ -x4 - x5 - 1 \\ x3 \end{bmatrix}$$

Общее решение: **Частные решения:**

$$X(x4, x5) := \begin{bmatrix} x4 + x5 + 2 \\ -x4 - x5 - 1 \\ 3 \\ x4 \\ x5 \end{bmatrix} \qquad X(1,0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X(0,1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Указание. Для того чтобы сформировать расширенную матрицу системы, используйте функцию augment(A, b), которая добавляет к столбцам матрицы A справа столбец b (в рассмотренном случае матрица Ar1 получена добавлением к матрице A столбца правых частей b1, а матрица Ar2 — добавлением столбца b2).

2.6
ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть M — множество элементов произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения на действительное число:

- паре элементов $x \in M$, $y \in M$ отвечает элемент $x + y \in M$, называемый суммой элементов x и y;
- паре x, α, где $x \in M$ и α — любое действительное число, отвечает элемент $\alpha x \in M$, называемый произведением числа α и элемента x.

Будем называть множество M *линейным пространством*, если для всех его элементов определены операции сложения и умножения на действительное число и для любых элементов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in M$ и произвольных чисел α, β справедливо:

1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$, сложение коммутативно;
2) $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$, сложение ассоциативно;
3) существует нулевой элемент $\mathbf{0} \in M$ такой, что $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$;
4) для каждого элемента существует противоположный элемент $-\boldsymbol{x}$ такой, что $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$;
5) $\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}$, умножение на число ассоциативно;
6) $1 \cdot \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;
7) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$, умножение на число дистрибутивно относительно сложения элементов;
8) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$, умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел.

Равенства 1–8 называют *аксиомами линейного пространства.*

Линейное пространство часто называют *векторным пространством*, а его элементы — *векторами.*

Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора в заданном базисе

Говорят, что элемент (вектор) линейного пространства L *линейно выражается* через элементы (векторы) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in L$, если его можно представить в виде *линейной комбинации* этих элементов, т.е. представить в виде $\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n$.

Если хотя бы один вектор системы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ векторов линейного пространства L линейно выражается через остальные векторы системы, то система векторов называется *линейно зависимой.* Система векторов, которая не является линейно зависимой, называется *линейно независимой.*

Справедливо следующее утверждение.

Система $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ *векторов линейного пространства* L *линейно независима тогда и только тогда, когда из равенства* $\alpha_1\boldsymbol{e}_1+$ $+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n=\mathbf{0}$ *следует равенство нулю всех коэффициентов*: $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, ..., $\alpha_n=0$.

Если в линейном пространстве L существует линейно независимая система из n векторов, а любая система из $(n+1)$-го вектора линейно зависима, то число n называется *размерностью пространства* L и обозначается $n=\dim(L)$. В этом случае пространство $L=L_n$ называют *n-мерным линейным пространством* или *n-мерным векторным пространством.*

Любая упорядоченная линейно независимая система n векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ n-мерного линейного пространства L образует *базис пространства*, и любой вектор $\boldsymbol{x} \in L$ единственным образом выражается через векторы базиса: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют *координатами вектора* $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и обозначают $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При этом для любых двух произвольных векторов n-мерного линейного пространства $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и произвольного числа α справедливо: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ и $\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$. Это означает, что все n-мерные линейные пространства "устроены" одинаково: как пространство $\mathbb{R}^n$ векторов-столбцов из n действительных чисел, т.е. что все они *изоморфны* пространству $\mathbb{R}^n$.

Линейные пространства X и Y называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что если векторам $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ из X соответствуют векторы $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{y}'$ из Y, то вектору $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'$ соответствует вектор $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}'$ и при любом α вектору $\alpha\boldsymbol{x} \in X$ соответствует вектор $\alpha\boldsymbol{y} \in Y$.

Изоморфизм n-мерных линейных пространств пространству $\mathbb{R}^n$ означает, что соотношения между элементами n-мерного линейного пространства и операции с ними можно изучать как соотношения между векторами из $\mathbb{R}^n$ и операции с ними и что всякое утверждение относительно векторов из $\mathbb{R}^n$ справедливо для соответствующих элементов любого n-мерного линейного пространства.

Например, доказано, что система векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ из $\mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ \ldots \\ e_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ \ldots \\ e_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \\ \ldots \\ e_{nn} \end{pmatrix}$$

образует базис в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда отличен от нуля определитель матрицы со столбцами $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\det A = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \ldots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \ldots & e_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{n1} & e_{n2} & \ldots & e_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ из L_n это означает, что они образуют базис в L_n тогда и только тогда, когда отличен от нуля определитель матрицы, столбцами которой являются компоненты векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ — два базиса в L_n.

Матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ называется матрица C, столбцами которой являются координаты векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= f_{11}\boldsymbol{e}_1 + f_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + f_{n1}\boldsymbol{e}_n, & \boldsymbol{f}_1 &= (f_{11}\ \ f_{21}\ \ \ldots\ \ f_{n1})^T, \\ \boldsymbol{f}_2 &= f_{12}\boldsymbol{e}_1 + f_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + f_{n2}\boldsymbol{e}_n, & \boldsymbol{f}_2 &= (f_{12}\ \ f_{22}\ \ \ldots\ \ f_{n2})^T, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{f}_n &= f_{1n}\boldsymbol{e}_1 + f_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + f_{nn}\boldsymbol{e}_n, & \boldsymbol{f}_n &= (f_{1n}\ \ f_{2n}\ \ \ldots\ \ f_{nn})^T, \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{pmatrix}, \quad \det C \neq 0.$$

Вектор линейно выражается через векторы обоих базисов. Тогда, если $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{f}_n$, то координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и его координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix},$$

или $\boldsymbol{x}_e = C\boldsymbol{x}_f$, $\boldsymbol{x}_f = C^{-1}\boldsymbol{x}_e$, если ввести обозначения $\boldsymbol{x}_e = (x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n)^T$ и $\boldsymbol{x}_f = (y_1\ \ y_2\ \ \ldots\ \ y_n)^T$ для векторов-столбцов координат вектора $\boldsymbol{x}$ в соответствующих базисах*.

ЗАДАНИЕ 2.11

Докажите, что векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$ образуют базис в пространстве L_4, и найдите координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в этом базисе.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Введите матрицу C со столбцами $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$.
3. Покажите, что определитель матрицы C отличен от нуля.
4. Вычислите матрицу, обратную к матрице C.
5. Запишите выражение и вычислите координаты вектора в базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$.
6. Проверьте вычисления, выполнив обратный переход.

---

*Матрица C^{-1} существует, поскольку векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ линейно независимы и, следовательно, $\det C \neq 0$.

Пример выполнения задания

Докажите, что векторы

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве L_4, и найдите координаты вектора $x = (1 \ \ -1 \ \ 3 \ \ -2)^T$ в этом базисе. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

Матрица перехода

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Координаты вектора x в старом базисе

$$|C| = 12 \qquad xe := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Координаты x вектора в новом базисе

$$xf := C^{-1} \cdot xe \qquad xf = \begin{bmatrix} 0.083 \\ 1.333 \\ -0.417 \\ 0.333 \end{bmatrix}$$

Проверка

$$C \cdot xf = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Указание. Проверка подтверждает правильность вычислений, поскольку если xf — координаты вектора x в базисе f_1, f_2, f_3, f_4, то произведение $C \cdot xf$ — координаты вектора x в исходном базисе.

Исследование линейной зависимости. Ранг матрицы

Пусть A — прямоугольная матрица размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы можно рассматривать как векторы из $\mathbb{R}^m$:

$$A^{<j>} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad A^{<j>} \in \mathbb{R}^m$$

и исследовать их на линейную зависимость. Исследовать систему векторов на линейную зависимость — это значит установить, является система векторов линейно зависимой или нет.

Доказано, что ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы. Это утверждение позволяет исследовать систему векторов $\mathbb{R}^n$ на линейную зависимость следующим образом. Пусть $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k$ — исследуемая система векторов. Запишем матрицу F, столбцами которой являются векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_k$: $F^{<j>} = \boldsymbol{f}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, и вычислим ее ранг: $r = \mathrm{Rg}(F)$. Если $r = k$, то исследуемая система векторов линейно независима, если же $r < k$, то она линейно зависима*.

Более того, если матрица F приведена к ступенчатому виду элементарными операциями со *строками*

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1,r+1} & \ldots & \alpha_{1k} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_{2,r+1} & \ldots & \alpha_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{r,r+1} & \ldots & \alpha_{rk} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

то векторы-столбцы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_r$, входящие в базисный минор**, образуют линейно независимую подсистему, а векторы $\boldsymbol{f}_{r+1}, \boldsymbol{f}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{f}_k$ следующим образом линейно выражаются через базисные векторы:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{r+1} &= \alpha_{1,r+1}\boldsymbol{f}_1 + \alpha_{2,r+1}\boldsymbol{f}_2 + \ldots + \alpha_{r,r+1}\boldsymbol{f}_r, \\ \boldsymbol{f}_{r+2} &= \alpha_{1,r+2}\boldsymbol{f}_1 + \alpha_{2,r+2}\boldsymbol{f}_2 + \ldots + \alpha_{r,r+2}\boldsymbol{f}_r, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{f}_k &= \alpha_{1,k}\boldsymbol{f}_1 + \alpha_{2,k}\boldsymbol{f}_2 + \ldots + \alpha_{r,k}\boldsymbol{f}_r. \end{aligned}$$

ЗАДАНИЕ 2.12

Исследуйте на линейную зависимость системы векторов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4$ и $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4$. Выделите в линейно зависимой системе линейно независимую подсистему. Найдите линейные выражения всех векторов линейно зависимой системы через векторы линейно независимой подсистемы.

---

*Аналогично можно исследовать линейную зависимость строк матрицы, поскольку ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк и столбцов.

****Базисный минор** матрицы, ранг которой равен r, — это любой, отличный от нуля минор порядка r. Столбцы, входящие в базисный минор, называют *базисными столбцами*.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Введите матрицы C и D, столбцами которых являются векторы f_1, f_2, f_3, f_4 и g_1, g_2, g_3, g_4 соответственно.
4. Найдите ранги матриц C и D.
5. Сформулируйте вывод о линейной зависимости исследуемых систем векторов.
6. Приведите матрицу линейно зависимой системы к ступенчатому виду и выделите линейно независимую подсистему.
7. Запишите выражения для всех векторов линейно зависимой системы через линейно независимую подсистему и проверьте их.

Пример выполнения задания

Исследуйте на линейную зависимость системы векторов

$$\begin{aligned} f_1 &= (1\ 1\ 1\ 1\ 2)^T, \\ f_2 &= (1\ 1\ 1\ 2\ 3)^T, \\ f_3 &= (1\ 1\ 2\ 3\ 4)^T, \\ f_4 &= (1\ 1\ 2\ 2\ 3)^T \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} g_1 &= (1\ 1\ 1\ 1\ 2)^T, \\ g_2 &= (1\ 1\ 1\ 2\ 3)^T, \\ g_3 &= (1\ 1\ 2\ 3\ 4)^T, \\ g_4 &= (1\ 2\ 3\ 4\ 5)^T. \end{aligned}$$

Выделите в линейно зависимой системе линейно независимую подсистему. Найдите линейные выражения всех векторов линейно зависимой системы через векторы линейно независимой подсистемы.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

ORIGIN := 1

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} f1 &= C^{\langle 1 \rangle} \\ f2 &= C^{\langle 2 \rangle} \\ f3 &= C^{\langle 3 \rangle} \\ f4 &= C^{\langle 4 \rangle} \end{aligned} \qquad D := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} g1 &= D^{\langle 1 \rangle} \\ g2 &= D^{\langle 2 \rangle} \\ g3 &= D^{\langle 3 \rangle} \\ g4 &= D^{\langle 4 \rangle} \end{aligned}$$

rank(C) = 3 **Векторы-столбцы матрицы C линейно зависимы**

rank(D) = 4 **Векторы-столбцы матрицы D линейно независимы**

$$\mathrm{rref}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Первые три столбца матрицы C линейно независимы

Выражение векторов линейно-зависимой системы f1, f2, f3, f4 через векторы линейно независимой подсистемы f1, f2, f3

f1=f1

f2=f2

f3=f3

f4=f1 - f2 + f3

Проверка

$$f4 := C^{\langle 1 \rangle} - C^{\langle 2 \rangle} + C^{\langle 3 \rangle} \quad f4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Указание. Для того чтобы определить вектор-столбец матрицы, используйте панель матричных операций. Введите с клавиатуры имя матрицы, щелкните по кнопке $\boxed{M^{\langle\rangle}}$ в панели матричных операций и введите в помеченной позиции номер столбца. Функция rref приводит матрицу к ступенчатому виду элементарными операциями со строками матрицы (не переставляет столбцы). Запишите выражение для линейно зависимых векторов (в приведенном фрагменте это вектор f4).

Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы

Линейное пространство E называется *евклидовым*, если каждой паре векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ из этого пространства поставлено в соответствие действительное число $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, называемое *скалярным произведением*, и при этом для любых $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ из E и любого действительного числа α справедливы следующие равенства:

1) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$;
2) $(\alpha \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$;
3) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$;
4) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} > 0$ при $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$, $\mathbf{0}$ — нулевой вектор.

Число $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ называется *длиной* вектора $\boldsymbol{x}$; число $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}$ — *расстоянием* между векторами $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$; угол $\varphi \in [0, \pi]$, косинус которого $\cos\varphi = \dfrac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|}$, — *углом* между векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$.

Векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ из евклидова пространства E называются *ортогональными*, если $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$.

Система $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ векторов евклидова пространства называется *ортонормированной*, если векторы системы попарно ортогональны и имеют единичную длину.

Базис конечномерного евклидова пространства называется *ортонормированным базисом*, если образующие его векторы попарно ортогональны и имеют единичную длину. Поскольку доказано, что *в любом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис*, будем рассматривать в n-мерном евклидовом пространстве E_n только ортонормированные базисы.

Простейший пример евклидова пространства дает нам пространство E_n — пространство столбцов $\mathbb{R}^n$, в котором скалярное произведение введено формулой $xy = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Тогда для любых $\boldsymbol{x} = (x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_1 \ y_2 \ \ldots \ y_n)^T$ из $\mathbb{R}^n$ справедливы формулы:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad |\boldsymbol{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}, \quad \cos\varphi = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}}.$$

Все евклидовы пространства размерности n устроены так же, как пространство E_n.

Величины $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$ и $\cos\varphi$ характеризуют взаимное расположение векторов и не зависят от выбранного ортонормированного базиса.

Если $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ — два ортонормированных базиса в n-мерном евклидовом пространстве, то матрица перехода от одного из этих базисов к другому — ортогональная* матрица.

ЗАДАНИЕ 2.13

Заданы векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ и $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$ евклидова пространства E_4. Докажите, что векторы $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$ образуют ортонормированный базис в E_4. Вычислите $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$ и $\cos\varphi$. Найдите координаты векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ в базисе $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$ и вычислите $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$ и $\cos\varphi$. Сравните полученные величины. Докажите, что матрица перехода к базису $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4$ — ортогональная матрица. Выполните вычисления для $\boldsymbol{x} = (1 \ 1 \ 1 \ 2)^T$, $y = (1 \ 1 \ 2 \ 2)^T$ и векторов $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4$ из предыдущего задания.

---

*Матрица U называется *ортогональной*, если $U^{-1} = U^T$.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Введите векторы-столбцы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$.
4. Определите матрицу U, столбцами которой являются векторы $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$, и вычислите ее ранг.
5. Вычислите длины и попарные скалярные произведения векторов $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$, вычислите U^{-1} и U^T. Сформулируйте вывод об ортогональности матрицы U.
6. Вычислите $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$, $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$, $\cos\varphi$.
7. Вычислите координаты векторов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ в базисе $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$.
8. Вычислите $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$, $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$, $\cos\varphi$ в базисе $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$.

Пример выполнения задания

Докажите, что векторы

$$\boldsymbol{g}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T,\quad \boldsymbol{g}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T,$$
$$\boldsymbol{g}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T,\quad \boldsymbol{g}_4=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T$$

образуют ортонормированный базис в E_4. Вычислите $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$, $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$, $\cos\varphi$ для векторов $\boldsymbol{x}=(1\ 1\ 1\ 2)^T$, $\boldsymbol{y}=(1\ 1\ 2\ 2)^T$. Найдите их координаты в базисе $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$ и вычислите в новом базисе $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$, $|\boldsymbol{x}|$, $|\boldsymbol{y}|$, $\cos\varphi$. Сравните полученные числа. Докажите, что матрица перехода к базису $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$, $\boldsymbol{g}_4$ — ортогональная матрица. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

ORIGIN := 1

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix}1\\1\\1\\2\end{bmatrix}\quad \mathbf{y} := \begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}\quad \mathbf{U} := \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{g1}=\mathbf{U}^{\langle 1\rangle}$

$\mathbf{g2}=\mathbf{U}^{\langle 2\rangle}$

$\mathbf{g3}=\mathbf{U}^{\langle 3\rangle}$

$\mathbf{g4}=\mathbf{U}^{\langle 4\rangle}$

Столбцы матрицы U единичной длины и попарно ортогональны

$$U^{\langle 1\rangle}\cdot U^{\langle 1\rangle}=1 \quad U^{\langle 2\rangle}\cdot U^{\langle 2\rangle}=1 \quad U^{\langle 3\rangle}\cdot U^{\langle 3\rangle}=1 \quad U^{\langle 4\rangle}\cdot U^{\langle 4\rangle}=1$$

$$U^{\langle 1\rangle}\cdot U^{\langle 2\rangle}=0 \quad U^{\langle 1\rangle}\cdot U^{\langle 3\rangle}=0 \quad U^{\langle 1\rangle}\cdot U^{\langle 4\rangle}=0$$

$$U^{\langle 2\rangle}\cdot U^{\langle 3\rangle}=0 \quad U^{\langle 2\rangle}\cdot U^{\langle 4\rangle}=0 \quad U^{\langle 3\rangle}\cdot U^{\langle 4\rangle}=0$$

Транспонированная матрица U **Обратная матрица**

$$U^T=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5\\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix} \qquad U^{-1}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5\\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$x\cdot y=8 \qquad \sqrt{x\cdot x}=2.646 \qquad \sqrt{y\cdot y}=3.162 \qquad \frac{x\cdot y}{\sqrt{x\cdot x}\cdot\sqrt{y\cdot y}}=0.956$$

Координаты векторов x и y в базисе g1, g2, g3, g4

$$xg:=U^T\cdot x \quad xg=\begin{bmatrix}2.5\\ -0.5\\ 0.5\\ 0.5\end{bmatrix} \qquad yg:=U^T\cdot y \quad yg=\begin{bmatrix}3\\ -1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$xg\cdot yg=8 \quad \sqrt{xg\cdot xg}=2.646 \quad \sqrt{yg\cdot yg}=3.162 \quad \frac{xg\cdot yg}{\sqrt{xg\cdot xg}\cdot\sqrt{yg\cdot yg}}=0.956$$

Указание. Для того чтобы вычислить скалярное произведение векторов, щелкните по кнопке вычисления скалярного произведения в панели матричных инструментов и введите с клавиатуры в помеченных позициях имена сомножителей, выделите выражение, введите с клавиатуры знак равенства и щелкните по рабочему документу вне выделяющей рамки. Чтобы вычислить длину вектора, щелкните в панели математических инструментов по кнопке в панели и определите подкоренное выражение как скалярное произведение вектора на себя, выделите выражение, введите знак равенства и щелкните по рабочему документу вне выделяющей рамки. В приведенном документе именами xg и yg обозначены векторы-столбцы координат векторов x и y в базисе g_1, g_2, g_3, g_4. Вычисления подтверждают, что величина скалярного произведения векторов не зависит от базиса.

2.7
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть заданы линейные пространства X и Y. Правило, по которому каждому элементу $\boldsymbol{x} \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $\boldsymbol{y} \in Y$, называется оператором, действующим в линейных пространствах X, Y. Результат действия оператора $\mathcal{A}$ на элемент $\boldsymbol{x}$ обозначают $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}$ или $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$. Если элементы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ связаны соотношением $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}$, то $\boldsymbol{y}$ называют образом элемента $\boldsymbol{x}$, а $\boldsymbol{x}$ — прообразом $\boldsymbol{y}$.

Множество элементов линейного пространства X, для которых определено действие оператора $\mathcal{A}$, называют *областью определения* оператора $\mathcal{A}$ и обозначают $D(\mathcal{A})$.

Множество элементов линейного пространства Y, которые являются образами элементов из $D(\mathcal{A})$, называют *образом* оператора $\mathcal{A}$ и обозначают $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$. Если $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}$, то $\boldsymbol{x} \in D(\mathcal{A})$, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(\mathcal{A})$.

Оператор $\mathcal{A}$, действующий в линейных пространствах X, Y, называется *линейным оператором*, если

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{u}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) \qquad \text{и} \qquad \mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha\mathcal{A}(\boldsymbol{u})$$

для любых $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ из X и для любого числа α.

Если пространства X и Y совпадают, то говорят, что оператор действует в пространстве X. В дальнейшем ограничимся рассмотрением линейных операторов, действующих в линейном пространстве X.

Линейный оператор и его матрица. Переход к другому базису

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в конечномерном линейном пространстве X, $\dim(X) = n$, и пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис в X. Обозначим через

$$\mathcal{A}\boldsymbol{e}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \quad \mathcal{A}\boldsymbol{e}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \quad \ldots,$$
$$\mathcal{A}\boldsymbol{e}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$$

образы базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

столбцами которой являются координаты образов базисных векторов, называется *матрицей линейного оператора* в заданном базисе.

Доказано, что каждому линейному оператору, действующему в n-мерном линейном пространстве X, отвечает единственная квадратная матрица порядка n; и обратно — каждая квадратная матрица порядка n задает единственный линейный оператор, действующий в этом пространстве. При этом соотношения

$$\boldsymbol{y} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

с одной стороны, связывают координаты образа $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}$ с координатами прообраза $\boldsymbol{x}$, с другой стороны, описывают действие оператора, заданного матрицей A.

При изменении базиса линейного пространства матрица оператора, очевидно, изменяется. Пусть в пространстве X произошел переход от базиса $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ к базису $\boldsymbol{e}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_n\}$. Связь между матрицей A_e оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}$ и матрицей $A_{e'}$ этого оператора в базисе $\boldsymbol{e}'$ задается формулой $A_{e'} = P^{-1}_{e\to e'} A_e P_{e\to e'}$, $A_e = P^{-1}_{e\to e'} A_{e'} P^{-1}_{e\to e'}$.

Здесь $P_{e\to e'}$, $P^{-1}_{e\to e'}$ — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{e}'$ и обратная к ней.

ЗАДАНИЕ 2.14

Оператор $\mathcal{A}$, действующий в линейном пространстве X_n, задан своей матрицей. Найдите координаты образа $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}$ вектора $\boldsymbol{x} \in X_n$.

В линейном пространстве X_n введен новый базис. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{x} \in X_n$, координаты образа $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}$ и матрицу оператора в новом базисе.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Введите заданную матрицу оператора и вектор $\boldsymbol{x}$.
3. Вычислите координаты образа $\mathcal{A}\boldsymbol{x}$ вектора $\boldsymbol{x}$.
4. Введите матрицу P перехода к новому базису в пространстве X_n и найдите обратную к ней.
5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в новом базисе.
6. Найдите матрицу оператора в новом базисе.
7. Найдите координаты образа $\mathcal{A}\boldsymbol{x}$ в новом базисе.

Пример выполнения задания

Оператор $\mathcal{A}$, действующий в линейном пространстве X_4, задан своей матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 11 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите координаты образа вектора $\boldsymbol{x} = (1\ \ -1\ \ 2\ \ -2)^T$. В линейном пространстве X_4 введен новый базис $\boldsymbol{e}_1' = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$, $\boldsymbol{e}_2' = (1\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T$, $\boldsymbol{e}_3' = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 0)^T$, $\boldsymbol{e}_4' = (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{x}$, координаты образа $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}$ и матрицу оператора в новом базисе. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 11 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad x := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad y := A \cdot x \quad y = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 13 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad xnew := P^{-1} \cdot x \quad xnew = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$ynew := P^{-1} \cdot y \quad ynew = \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Anew := P^{-1} \cdot A \cdot P \quad Anew = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 11 \\ 4 & -4 & -13 & -13 \\ -9 & -8 & 0 & -2 \\ 5 & 9 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

Проверка:

$$\text{Anew}\cdot\text{xnew} = \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{P}\cdot\text{Anew}\cdot\text{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 11 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Указание. Для того чтобы проверить правильность вычислений, найдите по формуле $y_{e'} = A_{e'}x_{e'}$ координаты образа элемента x в новом базисе (в обозначениях, использованных в приведенном фрагменте, — Anew·xnew) и сравните с результатом, полученным выше; вычислите матрицу оператора в старом базисе по формуле $A_e = P_{e\to e'}A_{e'}P^{-1}_{e\to e'}$ и сравните с заданной матрицей.

Образ и ядро линейного оператора

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в конечномерном линейном пространстве X. Доказано, что *образ* $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ *линейного оператора* $\mathcal{A}$ — линейное пространство. Размерность образа линейного оператора называется *рангом оператора*, обозначается $\mathrm{Rg}(\mathcal{A})$: $r = \mathrm{Rg}(\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A}))$.

Ядром линейного оператора называется множество элементов из X, образом которых является нулевой элемент. Ядро оператора обозначают $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$: $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{x \in X\colon \mathcal{A}x = \mathbf{0}\}$. Ядро линейного оператора — линейное пространство; размерность ядра линейного оператора называется *дефектом оператора*, обозначается $\mathrm{Def}(\mathcal{A})$: $d = \mathrm{Def}(\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A}))$.

Для линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в n-мерном линейном пространстве X_n, справедливы следующие утверждения:

- сумма ранга и дефекта оператора $\mathcal{A}$ равна размерности пространства, в котором действует оператор: $\mathrm{Def}(\mathcal{A}) + \mathrm{Rg}(\mathcal{A}) = n$;
- ранг оператора равен рангу его матрицы;
- ядро оператора совпадает с множеством решений линейной однородной системы, матрицей которой является матрица оператора; размерность пространства решений этой системы равна дефекту оператора, а ее фундаментальная система решений образует базис в ядре оператора;
- столбцы, входящие в базисный минор матрицы оператора, образуют базис в образе оператора.

Сформулированные утверждения позволяют описать структуру образа и ядра линейного оператора*, заданного матрицей, на языке матричных преобразований и общей теории линейных систем.

*Под *описанием* структуры линейного пространства в данном случае понимается определение его размерности и построение какого-либо базиса.

ЗАДАНИЕ 2.15

Опишите структуру образа и ядра линейного оператора, действующего в линейном пространстве X, заданного своей матрицей. Проверьте, принадлежат ли векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ядру оператора, а векторы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ — его образу.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Введите матрицу оператора и векторы-столбцы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.
4. Вычислите ранг матрицы оператора. Сформулируйте вывод о ранге и дефекте оператора.
5. Приведите матрицу оператора к ступенчатому виду.
6. Укажите базис в образе оператора.
7. Запишите линейную однородную систему, которая описывает ядро оператора, и разрешите ее относительно базисных переменных.
8. Найдите базис в ядре оператора.
9. Проверьте принадлежность векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ядру оператора.
10. Проверьте принадлежность векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ образу оператора.

Пример выполнения задания

Опишите структуру образа и ядра линейного оператора, действующего в линейном пространстве X_4, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверьте, принадлежат ли векторы $\boldsymbol{x}=(1\ 1\ 3\ 4)^T$ и $\boldsymbol{y}=(1\ -1\ 0\ 0)^T$ ядру оператора, а векторы $\boldsymbol{u}=(4\ 5\ 6\ 9)^T$ и $\boldsymbol{v}=(1\ 2\ 3\ 4)^T$ — его образу. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

ORIGIN := 1

Матрица оператора

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} := \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

rank(A) = 3 Ранг оператора r=3, дефект оператора d=n-r=4-3=1

$$\mathrm{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

В базисный минор входят 2-й, 3-й и 4-й столбцы матрицы, они образуют базис в образе оператора

Базис в образе оператора образуют векторы

$$A^{\langle 2 \rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A^{\langle 3 \rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A^{\langle 4 \rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Базисные переменные x2, x3, x4, свободная переменная x1

$$\text{Given} \quad \begin{aligned} x1 + x2 &= 0 \\ x3 &= 0 \\ x4 &= 0 \end{aligned} \qquad \mathrm{Find}(x2, x3, x4) \rightarrow \begin{bmatrix} -x1 \\ 0 \\ x4 \end{bmatrix}$$

Базис в ядре оператора - вектор $E1 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 12 \\ 17 \end{bmatrix} \qquad A \cdot y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Вектор Ax отличен от нуля, x не принадлежит Ker(A), Ay=0, y принадлежит Ker(A)

rank(augment(submatrix(A, 1, 4, 2, 4), u)) = 3

Базисные столбцы матрицы оператора и вектор u образуют линейно зависимую систему; вектор u принадлежит Im(A)

rank(augment(submatrix(A, 1, 4, 2, 4), v)) = 4

Базисные столбцы матрицы оператора и вектор v образуют линейно независимую систему; вектор v не принадлежит Im(A)

Указание. Используйте функцию rank(A) для вычисления ранга матрицы оператора. Для того чтобы найти базис в образе оператора, приведите матрицу оператора к ступенчатому виду функцией rref(A), которая приводит матрицу к ступенчатому виду, не переставляя столбцы. Поэтому столбцы, входящие в базисный минор ступенчатой формы матрицы, образуют базис в образе оператора (в приведенном фрагменте это 2–4-й столбцы). Для того чтобы найти базис в ядре оператора, запишите, используя ступенчатый вид матрицы, эквивалентную систему и найдите ее фундаментальную систему решений (см. разд. 2.4). Чтобы проверить принадлежность векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ядру оператора, найдите образы $\mathcal{A}\boldsymbol{x}$ и $\mathcal{A}\boldsymbol{y}$. Вектор принадлежит ядру, если его образ — нулевой вектор. Для проверки принадлежности вектора образу оператора вычислите ранг матрицы, столбцами которой являются базисные столбцы матрицы оператора и исследуемый вектор. Если ранг такой матрицы равен рангу матрицы оператора, то исследуемый вектор линейно выражается через базисные столбцы и, следовательно, принадлежит образу оператора. Если же ранг построенной матрицы больше ранга оператора, то ее столбцы линейно независимы и исследуемый вектор не выражается через базисные столбцы, т.е. не принадлежит образу оператора. В приведенном фрагменте вычисляются ранги матриц, построенных с помощью функций augment(submatrix(A,1,4,2,4),u) и augment(submatrix(A,1,4,2,4),v). Функция submatrix(A,1,4,2,4) формирует матрицу, содержащую 2-, 3- и 4-й (базисные) столбцы матрицы A, а функция augment(submatrix(A,1,4,2,4),u) дописывает к ним справа вектор-столбец u.

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в линейном пространстве.

Число λ называется *собственным значением*, а ненулевой вектор $\boldsymbol{x}$ — соответствующим *собственным вектором* линейного оператора $\mathcal{A}$, если они связаны между собой соотношением $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Пусть A — матрица оператора в некотором базисе. Собственные значения оператора и соответствующие им собственные векторы связаны соотношением $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, где $\mathcal{I}$ — единичный оператор, а $\mathbf{0}$ — нулевой элемент пространства X. Это означает, что собственный вектор оператора является ненулевым решением линейной однородной системы $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, которое существует тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = \mathbf{0}$. Следовательно, собственные значения линейного оператора могут быть вычислены как корни уравнения $\det(A - \lambda E) = \mathbf{0}$, а собственные векторы — как решения соответствующих однородных систем.

Уравнение $\det(A - \lambda E) = \mathbf{0}$ называется *характеристическим уравнением* оператора, а многочлен $\det(A - \lambda E)$ — *характеристическим многочленом* оператора.

Для собственных значений и собственных векторов линейного оператора справедливы следующие утверждения:

- характеристический многочлен $\det(A - \lambda E)$ оператора, действующего в n-мерном линейном пространстве, является многочленом n-й степени относительно λ;
- линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве, имеет не более n различных собственных значений;
- собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы;
- если линейный оператор, действующий в n-мерном линейном пространстве X, имеет n различных собственных значений, то в пространстве X существует базис из собственных векторов оператора; этот базис называют *собственным базисом* оператора; матрица оператора в базисе из его собственных векторов имеет диагональную форму с собственными значениями на диагонали.

ЗАДАНИЕ 2.16

Найдите собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей. Запишите матрицу оператора в базисе из собственных векторов, если таковой существует. Запишите матрицу перехода к собственному базису.

Выполните вычисления для оператора $\mathcal{A}$ из задания 2.14.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Введите матрицу оператора $\mathcal{A}$.
4. Запишите характеристический многочлен оператора и найдите его корни.
5. Для каждого собственного значения λ найдите собственные векторы — фундаментальную систему решений однородной системы $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (см. разд. 2.5).
6. Проверьте подстановкой правильность вычислений.
7. Запишите матрицу оператора в базисе из собственных векторов.
8. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора, используя встроенные функции Mathcad.
9. Сравните результаты вычислений.

Пример выполнения задания

Найдите собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Запишите матрицу оператора в базисе из собственных векторов и матрицу перехода к собственному базису. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} := \mathbf{identity}(4) \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \quad (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)^2 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{rref}(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{E}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E1} := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E2} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{rref}(\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{E}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E3} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E4} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{E2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{E3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{E4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$As := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C := \text{eigenvals}(A) \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$EC := \text{eigenvecs}(A) \qquad EC = \begin{bmatrix} 1 & 0.707 & 0 & 0.408 \\ 0 & 0.707 & 0.894 & 0 \\ 0 & 0 & -0.447 & 0.816 \\ 0 & 0 & 0 & -0.408 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot EC^{\langle 1 \rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A \cdot EC^{\langle 3 \rangle} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.894 \\ -0.447 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot EC^{\langle 2 \rangle} = \begin{bmatrix} 1.414 \\ 1.414 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A \cdot EC^{\langle 4 \rangle} = \begin{bmatrix} 0.816 \\ 0 \\ 1.633 \\ -0.816 \end{bmatrix}$$

Указание. Введите единичную матрицу с именем E той же размерности, что и матрицы A, используя функцию identity(n) (см. разд. 2.1). Определите и введите матрицу $A - \lambda E$. Чтобы вычислить характеристический многочлен, вычислите символьно определитель матрицы $A - \lambda E$, используя меню символьных операций (см. разд. 2.1). Корни характеристического уравнения найдите*, используя символьную операцию Solve (см. гл. 1). Приведите матрицы $A - \lambda E$ к ступенчатому виду, используя функцию rref, для $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$. Запишите соответствующую эквивалентную систему и найдите ее фундаментальную систему решений. Для того чтобы проверить вычисления, умножьте собственные векторы слева на матрицу A и убедитесь в справедливости равенств $A \cdot E1 = E1$, $A \cdot E2 = E2$, $A \cdot E3 = E3$, $A \cdot E4 = 2E4$. Полученные собственные векторы образуют базис в пространстве X_4, матрица оператора в этом базисе имеет диагональную форму. В приведенном фрагменте эта матрицы введена с именем As. Теперь вычислите собственные значения и собственные векторы, используя встроенные функции eigenvals(A) и eigenvecs(A). Полученные с помощью встроенных функций собственные векторы отличны от тех, которые представлены выше**.

---

*В рассмотренном случае очевидно, что корни характеристического уравнения равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

**Собственные векторы линейного оператора, отвечающие определенному собственному значению, образуют линейное пространство. Разные способы вычислений соответствующих собственных векторов дают разные базисы этого пространства. Заметим, что даже одна и та же процедура вычисления собственных векторов на различных компьютерах дает, вообще говоря, разные результаты — разные базисы в соответствующем пространстве собственных векторов.

2.8 МАТРИЧНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Модель межотраслевого баланса Леонтьева. Вычисление совокупного выпуска по заданному спросу

Межотраслевой баланс в экономике, как известно, — это метод анализа взаимосвязей между различными секторами экономической системы.

Предположим, что исследуемую экономическую систему можно разделить на несколько отраслей (секторов), производящих определенные товары и услуги (сельское хозяйство, промышленность, транспорт, энергетика и т.п.). При производстве товаров и услуг в каждом секторе расходуются ресурсы в виде сырья, рабочей силы, оборудования и др., которые производятся как в других секторах хозяйства, так и в данном секторе. Это означает, что каждый сектор экономики выступает в системе межотраслевых связей одновременно производителем и потребителем.

Цель балансового анализа — *определить, сколько продукции должен произвести каждый сектор для того, чтобы удовлетворить все потребности экономической системы в его продукции.*

Рассмотрим упрощенную модель межотраслевого баланса — баланс экономики*, состоящей из трех секторов — из сельского хозяйства, промышленности и домашних хозяйств. В качестве единицы измерения объемов товаров и услуг каждого сектора выберем их стоимость. Предположим, что вся продукция сельского хозяйства составляет 200 денежных единиц, из них 50 единиц потребляется внутри самого сектора, 40 единиц — в промышленности и 110 — в домашних хозяйствах. Продукция промышленности составляет 250 единиц, из них 70 единиц потребляются в сельскохозяйственном производстве, 30 — в секторе промышленности и 150 — в домашних хозяйствах. Домашние хозяйства производят 300 единиц продукции, из них 80 единиц потребляются в сельском хозяйстве, 180 — в промышленности и 40 — внутри самого сектора. Эти данные сведены в *таблицу межотраслевого баланса* приведенную на рис. 2.6.

Числа, расположенные в строках таблицы, показывают, как распределяется произведенная продукция каждого сектора, последний элемент строки — объем произведенной сектором продукции (общий выпуск). Данные, расположенные в столбцах показывают, какую

*Примеры и модели взяты из книги В. Леонтьева "Межотраслевая экономика" [21].

продукцию потребляет каждый сектор в процессе производства, последнее число в столбце — суммарные затраты сектора. На рис. 2.6 представлена таблица межотраслевых связей экономической системы, в которой все секторы являются производящими, вся произведенная продукция потребляется этими же производящими секторами. Такая модель межотраслевых связей называется *замкнутой*. В замкнутой модели объем затрат каждого сектора (сумма элементов в столбце таблицы) равен объему произведенной продукции (сумма элементов в соответствующей строке).

	Сельское хозяйство	Промышленность	Домашние хозяйства	Общий выпуск
Сельское хозяйство	50	40	110	**200**
Промышленность	70	30	150	**250**
Домашние хозяйства	80	180	40	**300**
Затраты	**200**	**250**	**300**	

Рис. 2.6. Таблица межотраслевого баланса для простейшей модели народного хозяйства

Таблицы межотраслевого баланса описывают потоки товаров и услуг между секторами экономики в течение фиксированного промежутка времени, например в течение года.

Данные, сохраняемые в таблицах, естественно описывать и анализировать в терминах матричной алгебры.

Если обозначить через $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ матрицу, элемент которой b_{ij} — количество товаров и услуг i-го сектора экономики, потребляемого в j-м секторе, то в замкнутой экономической системе баланс между совокупным выпуском и затратами каждого сектора можно описать равенствами

$$\sum_{j=1}^{n} b_{kj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрица B называется *матрицей межотраслевого баланса* (ее также называют *матрицей Леонтьева*).

Рассмотрим *открытую* систему межотраслевых связей, в которой вся произведенная продукция (совокупный продукт) разделяется на две части: одна часть продукции (промежуточный продукт) идет на потребление в производящих секторах, а другая ее часть (конечный продукт*) потребляется вне сферы материального производства — в

*Иногда используется термин *конечный спрос*. Если модель описывает экономику государства, то сумма платежей всех производственных секторов в сектор конечного спроса называется *национальным доходом*.

секторе конечного спроса; при этом потребление в секторе конечного спроса может меняться.

Обозначим:

x_i — объем выпуска i-го сектора (объем товаров и услуг, произведенных в одном из n производящих секторов), $i = 1, 2, \ldots, n$;

b_{ij} — объем товаров и услуг i-го сектора, потребляемых в j-м секторе;

y_i — конечный продукт i-го сектора (объем продукции i-го сектора, потребляемой в секторе конечного спроса);

$a_{ij} = \dfrac{b_{ij}}{x_j}$ — количество продукции i-го сектора, которое расходуется при производстве одной единицы продукции j-го сектора (*коэффициенты прямых затрат**).

Межотраслевой баланс — это равенство объема выпуска каждого производящего сектора суммарному объему его продукции, потребляемой производственными секторами и сектором конечного спроса. В приведенных обозначениях имеем *соотношения баланса***:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Соотношения баланса, записанные через коэффициенты прямых затрат, имеют вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

или, что то же самое,

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Последние равенства описывают технологию производства и структуру экономических связей и означают, что в сектор конечного спроса от каждого производственного сектора поступает та часть произведенной продукции, которая остается после того, как обеспечены потребности производящих секторов.

Если обозначить вектор выпуска через X, вектор спроса (вектор конечного продукта) — через Y, а *структурную матрицу экономики* — матрицу, элементами которой являются коэффициенты прямых

*Коэффициенты прямых затрат называют еще *технологическими коэффициентами*.

**Все величины, входящие в уравнения, выражены в единицах стоимости.

затрат* a_{ij}, — через A, то соотношения баланса в матричной форме будут иметь вид:

$$(E-A)X=Y.$$

Одна из основных задач межотраслевого баланса — *найти при заданной структурной матрице экономической системы в условиях баланса совокупный выпуск, необходимый для удовлетворения заданного спроса.*

Предположим, что в течение некоторого промежутка времени коэффициенты прямых затрат a_{ij} остаются постоянными, а конечный спрос изменяется. Это означает, что существует *линейная связь* между выпуском и затратами и изменение выпуска хотя бы в одном секторе экономики влечет за собой *пропорциональное* изменение затрат всех производящих секторов. Коэффициентами пропорциональности этой связи являются элементы структурной матрицы. То есть в линейной модели "затраты — выпуск" соотношения баланса описывают связь неизвестного выпуска с заданным спросом. Эти соотношения позволяют определить, каким должен быть совокупный выпуск в каждом секторе, чтобы удовлетворить изменившиеся потребности общества.

На языке линейной алгебры это значит, что требуется решить систему линейных уравнений $(E-A)X=Y$ относительно неизвестного вектора X при заданной матрице системы $E-A$ и правой части Y. Решение такой задачи описано в разд. 2.4. Если матрица $E-A$ обратима, то $X=(E-A)^{-1}Y$.

Обозначим $D=(E-A)^{-1}=\{D_{ij}\}$.

Если записать выражение компонент вектора выпуска X через компоненты вектора конечного спроса Y:

$$\begin{cases} x_1=d_{11}y_1+d_{12}y_2+\ldots+d_{1n}y_n, \\ x_2=d_{21}y_1+d_{22}y_2+\ldots+d_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=d_{n1}y_1+d_{n2}y_2+\ldots+d_{nn}y_n, \end{cases}$$

то становится понятным, что элемент d_{ij} матрицы $(E-A)^{-1}$ показывает, на сколько нужно увеличить выпуск i-го сектора x_i при увеличении на единицу конечного спроса y_j на продукцию j-го сектора.

Матрица $D=(E-A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат.*

В экономической системе с заданной структурной матрицей A спрос всегда удовлетворяется, если для любого вектора спроса Y существует вектор выпуска $X=(E-A)^{-1}Y$, все компоненты которого

*Структурную матрицу экономики называют еще *матрицей прямых затрат* или *технологической матрицей.*

неотрицательны. Доказано, что для этого необходимо выполнение условий Хаукинса — Саймона

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1-a_{nn} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1,n-1} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n-1,1} & -a_{n-1,2} & \dots & 1-a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\dots$$

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$1-a_{11} > 0.$$

Можно сформулировать более простое достаточное условие неотрицательности элементов матрицы $(E-A)^{-1}$: если сумма элементов столбцов структурной матрицы A не превышает единицы и хотя бы одна из этих сумм строго меньше единицы, то элементы d_{ij} матрицы $(E-A)^{-1}$ неотрицательны: если $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$, $j=1, 2, \dots, n$, и существует такое k, $1 \le k \le n$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik} < 1$, то элементы d_{ij} матрицы $(E-A)^{-1}$ неотрицательны, $d_{ij} \ge 0$.

ЗАДАНИЕ 2.17

Исследуйте заданную таблицей межотраслевого баланса модель экономической системы. Найдите объем выпуска каждой отрасли по заданному конечному спросу. Найдите зависимость выпуска каждой отрасли от конечного спроса. Укажите, как должен измениться выпуск каждого сектора при указанном изменении спроса на продукцию одного из производящих секторов.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений и режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Составьте и введите матрицу межотраслевого баланса.

4. Вычислите объем выпуска и платежи в сектор конечного спроса для каждой отрасли.
5. Составьте структурную матрицу экономики A.
6. Проверьте справедливость условия Хаукинса — Саймона.
7. Найдите матрицу $(E - A)^{-1}$.
8. Вычислите объем выпуска для каждого сектора экономики по заданному конечному спросу.
9. Вычислите увеличение выпуска продукции при заданном изменении начального спроса на продукцию указанного сектора.
10. Сохраните результаты вычислений в файле.

Пример выполнения задания

Рассматривается модель экономики, в которой выделены четыре сектора: три производящих сектора (промышленность, сельское хозяйство, транспорт) и домашние хозяйства в качестве сектора конечного спроса. Структура экономики описана в таблице межотраслевого баланса, приведенной на рис. 2.7 (объемы указаны в единицах стоимости).

	Сельское хозяйство	Промышленность	Транспорт	Домашние хозяйства (сектор конечного спроса)	Общий выпуск
Сельское хозяйство	50	16	120	60	246
Промышленность	30	10	180	100	320
Транспорт	15	14	140	80	249

Рис. 2.7. Межотраслевой баланс открытой трехсекторной экономики

Вычислите вектор выпуска для вектора конечного спроса $Y = (100\ 150\ 120)^T$. Как должен измениться выпуск каждого сектора, если спрос на транспортные услуги увеличится на 5%?

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и комментариями приведен ниже.

ORIGIN := 1

Матрица межотраслевого баланса

$$B := \begin{bmatrix} 50 & 16 & 120 & 60 \\ 30 & 10 & 180 & 100 \\ 15 & 14 & 140 & 80 \end{bmatrix}$$

Вектор выпуска $X := B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 246 \\ 320 \\ 249 \end{bmatrix}$

Построение структурной матрицы

$i := 1..3 \qquad X1_i := \dfrac{1}{X_i} \qquad A := \mathrm{submatrix}(B, 1, 3, 1, 3) \cdot \mathrm{diag}(X1)$

Структурная матрица $A = \begin{bmatrix} 0.20325 & 0.05 & 0.48193 \\ 0.12195 & 0.03125 & 0.72289 \\ 0.06098 & 0.04375 & 0.56225 \end{bmatrix}$

Матрица E-A

$EA := \mathrm{identity}(3) - A \qquad EA = \begin{bmatrix} 0.79675 & -0.05 & -0.48193 \\ -0.12195 & 0.96875 & -0.72289 \\ -0.06098 & -0.04375 & 0.43775 \end{bmatrix}$

Проверка условия Хаукинса - Саймона

$|EA| = 0.27677$

$|\mathrm{submatrix}(EA, 1, 2, 1, 2)| = 0.76575$

$|\mathrm{submatrix}(EA, 1, 1, 1, 1)| = 0.79675$

Вычисление выпуска при конечном спросе

$AEinv := (EA)^{-1} \qquad AEinv = \begin{bmatrix} 1.41796 & 0.15526 & 1.81745 \\ 0.35215 & 1.15401 & 2.29338 \\ 0.23271 & 0.13696 & 2.76677 \end{bmatrix}$

$Y := \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \end{bmatrix} \qquad X := AEinv \cdot Y \qquad X = \begin{bmatrix} 383.17958 \\ 483.52147 \\ 375.82706 \end{bmatrix}$

Элементы 3-го столбца матрицы AEinv указывают на изменение выпуска в производственных секторах при увеличении на одну единицу потребности в услугах транспорта.

Увеличение потребности в транспортных услугах на 5% составляет $0.05 \cdot X_3 = 18.79135$

Соответствующее увеличение выпуска равно

$$0.05 \cdot X_3 \cdot AEinv^{\langle 3 \rangle} = \begin{bmatrix} 34.15239 \\ 43.09576 \\ 51.99133 \end{bmatrix}$$

Указание. Определите матрицу межотраслевого баланса B — щелкните по первой верхней кнопке в панели [::] и введите размеры матрицы в окне диалога. Вычислите вектор выпуска X — суммы элементов строк матрицы B, умножив матрицу B справа на вектор-столбец с единичными элементами*. Для того чтобы найти структурную матрицу, разделите элементы каждого столбца матрицы B на соответствующий (имеющий тот же номер) элемент вектора выпуска X. Это можно сделать так: определите вектор Xinv, элементы которого — числа, обратные элементам вектора выпуска, и умножьте матрицу B справа на диагональную матрицу с диагональю Xinv. Определите вектор-столбец конечного спроса Y. Затем воспользуйтесь функцией identity(3) для определения матрицы AE $= E - A$. Для проверки условия Хаукинса — Саймона вычислите главные миноры матрицы AE. Для этого щелкните по кнопке [|x|] в панели [::] и введите в помеченной позиции имя или определение матрицы (в приведенном документе функция submatrix(AE, 1, i, 1, i) определяет главный минор i-го порядка матрицы AE). Определите матрицу AEinv, обратную к матрице AE, и вычислите вектор выпуска X, умножив матрицу AEinv справа на вектор конечного спроса Y. Вычислите, сколько единиц составляют 5% транспортных услуг, указанных в исходной матрице B, умножив третий элемент вектора выпуска X на 0.05, и найдите соответствующее увеличение выпуска, умножив на полученное число третий столбец матрицы AEinv. Чтобы определить столбец матрицы, щелкните по кнопке [M<>] в панели [::] и введите в помеченной позиции номер столбца.

Цены в системе межотраслевых связей

Цены в рассмотренной выше открытой модели межотраслевых связей определяются из системы уравнений, каждое из которых устанавливает, что цена единицы продукции производящего сектора должна быть равна совокупным издержкам производства в расчете на единицу выпущенной в этом секторе продукции. В издержки входит не только плата за ресурсы, приобретенные в данном секторе и других секторах, но и добавленная стоимость (заработная плата, прибыль предпринимателей, правительственные налоги, выплачиваемые правительству и другим секторам конечного спроса, и др.).

Обозначим:

v_i — суммарные платежи i-го сектора за одну единицу произведенной i-м сектором продукции;

p_j — цена единицы продукции j-го сектора;

*Такое произведение — вектор-столбец, элементы которого равны суммам элементов соответствующей строки первого сомножителя.

b_{ij} — объем товаров и услуг i-го сектора, потребляемых при производстве продукции в j-м секторе (как и выше).

Тогда $x_i p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ji} p_j + v_i x_i$, но поскольку $b_{ij} = a_{ij} x_i$, то $x_i p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji} x_i p_j + v_i x_i$.

Разделив на ненулевые x_i, получим для искомых цен систему уравнений

$$\begin{cases} (1-a_{11})p_1 - a_{21}p_2 - \ldots - a_{n1}p_n = v_1, \\ -a_{12}p_1 + (1-a_{22})p_2 - \ldots - a_{n2}p_n = v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{1n}p_1 - a_{2n}p_2 - \ldots + (1-a_{nn})p_n = v_n. \end{cases}$$

В матричной форме система уравнений для цен имеет вид

$$(E-A)^T P = V,$$

где A — структурная матрица экономики; V — заданный вектор платежей; P — искомый вектор цен. Тогда цены P можно найти по формуле* $P = \left((E-A)^T\right)^{-1} V$, или, что то же самое, $P = \left((E-A)^{-1}\right)^T V$.

Аналитические выражения цены P через платежи V имеют вид:

$$\begin{cases} p_1 = d_{11}v_1 + d_{21}v_2 + \ldots + d_{n1}v_n, \\ p_2 = d_{12}v_1 + d_{22}v_2 + \ldots + d_{n2}v_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = d_{1n}v_1 + d_{2n}v_2 + \ldots + d_{nn}v_n. \end{cases}$$

Из приведенных равенств видно, что элемент d_{ij} матрицы $(E-A)^{-1}$ показывает, как изменится цена p_i единицы продукции i-го сектора при изменении на единицу платежа v_j в j-м секторе.

Поскольку $X^T V = X^T (E-A)^T P = \left((E-A)X\right)^T = Y^T P$, то для рассмотренной модели межотраслевого баланса справедливо тождество $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i p_i$.

Левая часть этого тождества равна общей сумме добавленных стоимостей, выплачиваемых в сектор конечного спроса, а правая часть — суммарная стоимость продукции, поставленной производственными секторами в сектор конечного спроса. Другими словами, приведенное тождество подтверждает совпадение произведенного и использованного национального дохода.

---

*Напоминаем, что существование матрицы $(E-A)^{-1}$ обсуждалось выше при решении задачи о совокупном выпуске продукции.

ЗАДАНИЕ 2.18

Найдите цены на единицу продукции каждого производственного сектора модели экономики из задания 2.17 для заданного в условии вектора платежей. Укажите, как увеличиваются цены на транспортные услуги при увеличении на единицу платежей в сектор сельского хозяйства.

Порядок выполнения задания

1. Откройте файл, в котором сохранен рабочий документ с решением задачи задания 2.17.
2. Определите вектор конечного спроса и вектор платежей.
3. Вычислите цену единицы продукции каждого производственного сектора по заданным платежам, используя вычисленную ранее матрицу $(E-A)^{-1}$.

Пример выполнения задания

Решение задачи для модели из примера к заданию 2.17 при платежах $V=(0.4\ \ 0.1\ \ 0.5)^T$ приведено ниже.

$$V := \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad P := AEinv^T \cdot V \qquad P = \begin{bmatrix} 0.71875 \\ 0.24599 \\ 2.3397 \end{bmatrix}$$

$$AEinv^T = \begin{bmatrix} 1.41796 & 0.35215 & 0.23271 \\ 0.15526 & 1.15401 & 0.13696 \\ 1.81745 & 2.29338 & 2.76677 \end{bmatrix}$$

При увеличении на одну единицу платежей в сектор сельского хозяйства (1-й сектор в таблице) стоимость единицы транспортных услуг (3-й сектор в таблице) возрастает на величину $AEinv_{1,3} = 1.81745$

Простейшая модель экспорта и импорта

Рассмотрим открытую систему межотраслевых связей на государственном уровне. Если экономика государства перестает быть самообеспечивающейся и государство начинает импортировать и экспортировать продукцию производственных секторов, в то время как сектор конечного спроса потребляет те же количества продукции производственных секторов, то устанавливается новый баланс между затратами и выпуском. Структурная матрица экономики, а следовательно, и

матрица $(E-A)^{-1}$ остаются прежними, изменяется конечный спрос. К величине платежей в сектор конечного спроса каждого сектора нужно добавить объем экспорта и вычесть из него объем импорта*: $y_k = y'_k + e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Здесь y_k — неизменившийся заданный конечный спрос на продукцию k-го сектора; y'_k — объем конечного продукта k-го сектора при наличии экспорта и импорта, e_k — объем экспорта ($e_k > 0$) или импорта ($e_k < 0$) продукции k-го сектора.

Таким образом, в таблице межотраслевого баланса столбец сектора конечного спроса разбивается на три столбца: столбец заданного конечного спроса, столбец экспорта-импорта и столбец конечного продукта (рис. 2.8), причем каждый элемент последнего из этих трех столбцов равен сумме соответствующих чисел в предыдущих двух.

	Конечный спрос	Экспорт-импорт	Конечный продукт
Сельское хозяйство	60	−20	60 − 20
Промышленность	100	40	100 + 40
Транспорт	80	0	80 + 0

Рис. 2.8. Данные об экспорте и импорте

Выпуск X вычисляется по формуле

$$X = (E-A)^{-1}Y',$$

где $Y' = Y + EI$; Y — неизменившийся конечный спрос; EI — экспорт-импорт; A — структурная матрица экономики.

Вычислив вектор выпуска X, можно найти по формуле $b_{ij} = a_{ij}x_j$ элементы b_{ij} матрицы нового межотраслевого баланса B.

ЗАДАНИЕ 2.19

Исследуйте заданную структурной матрицей модель экономической системы. Найдите объем выпуска каждой отрасли по заданному конечному спросу при наличии экспорта и импорта. Найдите матрицу нового баланса. Проверьте правильность вычислений.

Порядок выполнения задания

1. Откройте файл, в котором сохранен рабочий документ с решением задачи задания 2.17.
2. Определите вектор экспорта-импорта и вычислите вектор конечного продукта.

*Импорт можно рассматривать как отрицательный экспорт.

3. Вычислите объем выпуска каждого сектора, используя вычисленную ранее матрицу $(E-A)^{-1}$ и новый вектор конечного продукта.
4. Вычислите матрицу нового баланса.
5. Проверьте правильность вычислений. Для этого найдите вектор выпуска для новой матрицы баланса и сравните его с вектором, вычисленным в п. 3.

Пример выполнения задания

Данные для вычисления выпуска в примере к заданию 2.17 при наличии экспорта и импорта приведены в таблице на рис. 2.8 (объемы указаны в единицах стоимости). Решение задачи в среде Mathcad представлено ниже.

Вычисление конечного продукта

$$EI := \begin{bmatrix} -20 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Y := B^{\langle 4 \rangle} + EI$$

Вычисление выпуска при конечном продукте

$$Y = \begin{bmatrix} 40 \\ 140 \\ 80 \end{bmatrix} \qquad X := AEinv \cdot Y \qquad X = \begin{bmatrix} 223.85138 \\ 359.11727 \\ 249.82434 \end{bmatrix}$$

Вычисление матрицы нового межотраслевого баланса

$$i := 1..3 \qquad j := 1..3 \qquad B_{i,j} := A_{i,j} \cdot X_j \qquad B^{\langle 4 \rangle} := Y$$

$$B = \begin{bmatrix} 45.49825 & 17.95586 & 120.39727 & 40 \\ 27.29895 & 11.22241 & 180.59591 & 140 \\ 13.64947 & 15.71138 & 140.46348 & 80 \end{bmatrix}$$

Проверка $$B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Линейная модель международной торговли

Рассмотрим модель международной торговли, в которой участвуют n стран.

Обозначим:

x_i — национальный доход i-й страны;

a_{ij} — доля национального дохода j-й страны, которую она расходует на закупку товаров i-й страны;

p_i — общая выручка от внутренней и внешней торговли.

Будем полагать, что каждое государство расходует весь свой национальный доход на закупку товаров внутри страны и на импорт из других стран. Это означает, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрица A, элементами которой являются коэффициенты a_{ij}, называется *структурной матрицей торговли.* Сумма элементов каждого столбца этой матрицы равна единице.

Предположим, что в течение определенного фиксированного промежутка времени структура международной торговли не меняется (не меняется структурная матрица торговли), а национальные доходы торгующих стран могут измениться.

Требуется определить, какими могут быть эти национальные доходы, чтобы международная торговля осталась сбалансированной, т.е. чтобы сумма платежей всех государств была равна суммарной выручке от внешней и внутренней торговли.

Общая выручка p_i от внешней и внутренней торговли i-го государства вычисляется по формуле $p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

В сбалансированной системе международной торговли не должно быть дефицита, т.е. у каждой страны выручка от торговли должна быть не меньше ее национального дохода: $p_i \geq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Однако, поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_j \geq \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Последнее неравенство справедливо только в случае, когда $p_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т.е. у всех торгующих стран выручка от внешней и внутренней торговли должна совпадать с национальным доходом.

В матричной записи это означает, что имеет место равенство $AX = X$, где A — структурная матрица международной торговли, а X — вектор национальных доходов.

Отсюда следует, что баланс в международной торговле будет достигнут, если единица является собственным значением структурной матрицы международной торговли, а вектор национальных доходов торгующих стран — собственным вектором, отвечающим этому единичному собственному значению.

ЗАДАНИЕ 2.20

Найдите национальные доходы торгующих стран в сбалансированной системе международной торговли с заданной структурной матрицей торговли.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Определите структурную матрицу торговли.
3. Найдите собственный вектор, отвечающий собственному значению структурной матрицы торговли, равному единице.

Пример выполнения задания

Найдите национальные доходы торгующих стран в сбалансированной системе международной торговли со структурной матрицей торговли

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Решение задачи в среде Mathcad приведено ниже.

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad \text{eigenvec}(A, 1) = \begin{bmatrix} 0.599 \\ 0.585 \\ 0.356 \\ 0.415 \end{bmatrix}$$

Из приведенных вычислений видно, что для сохранения баланса в системе международной торговли национальные доходы x_1, x_2, x_3, x_4 четырех торгующих стран должны удовлетворять условию $(x_1, x_2, x_3, x_4) = c(0.599, 0.585, 0.356, 0.415)$ с произвольной константой c.

2.9 ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В общем случае задача линейного программирования формулируется следующим образом. Найти величины x_1, x_2, ..., x_n, доставляющие минимум линейной функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

и удовлетворяющие условиям, которые могут быть только равенствами и неравенствами вида

$$\begin{aligned} &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \\ &a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ &a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n \ge b_p, \quad i \ne k \ne p. \end{aligned}$$

Среди ограничений часто встречаются условия неотрицательности всех или части переменных:

$$x_j \ge 0.$$

Хотя условия неотрицательности являются частным случаем ограничений общего вида, их принято выделять в особую группу.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *целевой функцией*.

Пример 1. Найти значения переменных x, y, которые доставляют максимум функции $f(x,y) = x + 2y$ при условиях

$$\begin{cases} -3x + 14y \le 1, \\ x + y \le 16, \\ x - y \le 3, \\ x + 4y \ge 4, \end{cases}$$
$$x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

Поскольку в задаче только две переменные, можно рассмотреть геометрическую интерпретацию данных задачи на плоскости и найти решение геометрическими методами.

Каждое неравенство означает, что *допустимые* значения переменных — координаты точек, лежащих в области, ограниченной координатными осями (условия $x \ge 0$, $y \ge 0$) ниже соответствующей прямой (для последнего неравенства — выше). Изображения соответствующих областей для каждого из трех условий, построенные в среде Mathcad, приведены на рис. 2.9.

Область изменения x, y, удовлетворяющих всем трем ограничениям, — многоугольник $ABCDE$, ограниченный пересекающимися прямыми и координатной осью Ox (рис. 2.10).

Линии уровня функции $f(x,y) = C$ — семейство параллельных прямых $x + 2y = C$. Чем больше значение константы C, тем правее расположена соответствующая прямая. Линии уровня для $C = 1, 3, 5, 7$ приведены на рис. 2.11 (они изображены толстой линией).

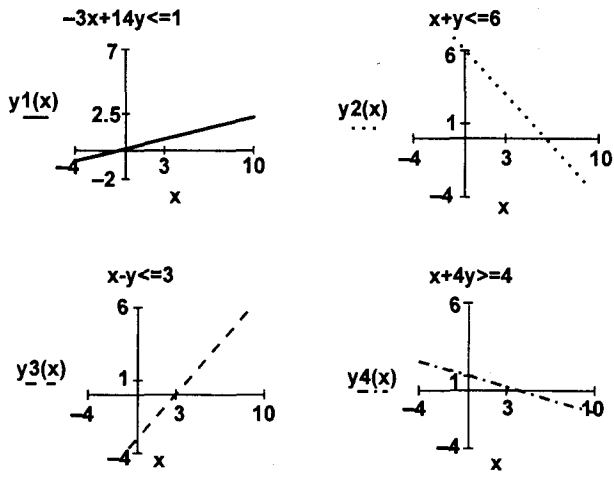


Рис. 2.9. Геометрическое изображение ограничений

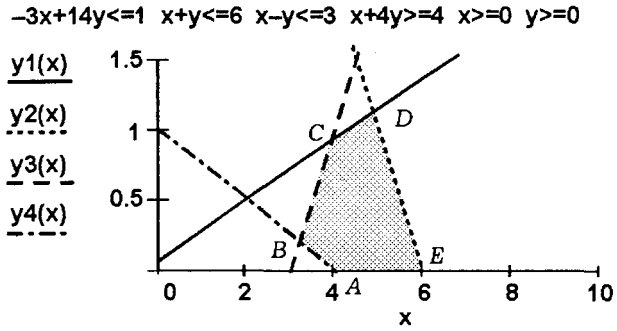


Рис. 2.10. Область допустимых значений

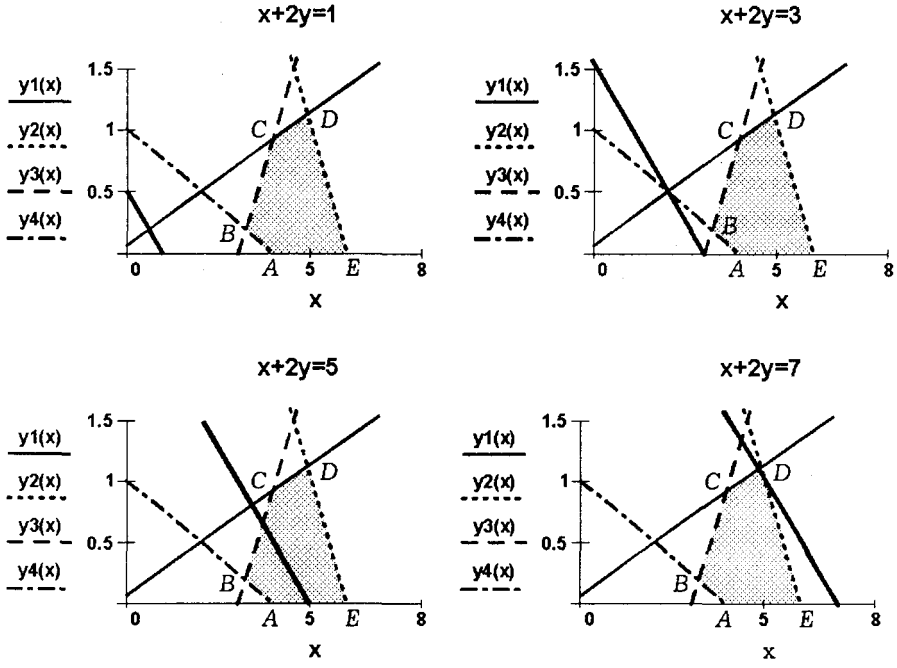


Рис. 2.11. Линии уровня $x + 2y = 1, 3, 5, 7$ целевой функции $f(x, y) = x + 2y$

Из рис. 2.11 видно, что целевая функция достигает наибольшего значения в самой правой верхней вершине многоугольника, в точке D (в точке пересечения прямых $-3x + 14y = 1$ и $x + y = 6$).

Mathcad позволяет легко вычислить координаты этой точки и значение целевой функции в ней. Фрагмент рабочего документа с вычислением координат точки максимума и значения целевой функции в ней приведен ниже.

$$\text{Given} \quad -3\cdot x + 14\cdot y = \qquad x + y = 6 \qquad \text{find}(x,y) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{83}{17} \\ \frac{19}{17} \end{bmatrix}$$

$$f(x,y) := x + 2y \qquad f\left(\frac{83}{17}, \frac{19}{17}\right) = 7.118$$

Таким образом, задача линейного программирования для двух переменных решена геометрически: найдено наибольшее допустимое значение целевой функции:

$$\max f(x,y) = \max(x + 2y) = f\left(\frac{83}{17}, \frac{19}{17}\right) \approx 7.118.$$

Легко видеть, что минимум целевой функции достигается в самой левой вершине многоугольника, в точке B.

Пример 2. Найти значения переменных x, y, которые доставляют максимум (минимум) функции $f(x,y) = 6x + 3y$ при условиях

$$\begin{cases} 2x + y \geq 2, \\ 3x - 4y \leq 12, \end{cases}$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

На рис. 2.12 изображена область допустимых значений переменных x и y, ограниченная прямыми $2x + y = 2$, $3x - 4y = 12$ и координатными осями.

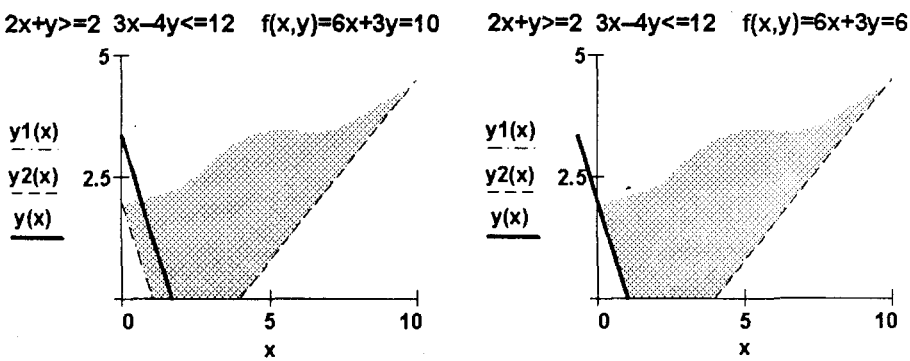


Рис. 2.12. Неограниченная область допустимых значений переменных

С увеличением значения константы C линия уровня целевой функции сдвигается вправо. Как видно из рис. 2.12, область допустимых значений не ограничена в этом направлении. Это означает, что целевая функция может принимать как угодно большие значения, т.е. задача об отыскании максимума целевой функции при заданных ограничениях не имеет решения. С другой стороны, с уменьшением C линия уровня целевой функции сдвигается влево и при $C = 6$ совпадает с границей области допустимых значений переменных. Последнее означает, что задача об отыскании минимума целевой функции имеет бесконечно много решений. Наименьшее допустимое значение целевой функции $f(x,y) = 6$ достигается на отрезке прямой $2x + y = 2$, $x \in [0, 2]$.

ЗАДАНИЕ

Найдите минимум целевой функции $f(x,y) = ax + by$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \le b_1, \quad a_{21}x + a_{22}y \le b_2, \quad a_{31}x + a_{32}y \le b_3, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Запишите в виде $y = kx + b$ уравнения прямых, ограничивающих область допустимых значений переменных.
3. Изобразите на графике соответствующие прямые и определите область допустимых значений переменных.
4. Постройте для одного или нескольких значений C линии уровня целевой функции $f(x,y) = C$ (столько, сколько понадобится, чтобы понять, имеет ли задача решение и где достигается искомый экстремум).
5. Если задача имеет единственное решение, найдите вершину, в которой достигается искомое экстремальное значение (максимум или минимум) целевой функции, и укажите ее координаты.
6. Вычислите значение целевой функции в найденной точке.
7. Если задача имеет бесконечное множество решений, экстремум достигается на отрезке, на полупрямой или на прямой, то вычислите соответствующее экстремальное значение целевой функции и опишите множество решений.
8. Сформулируйте и запишите в рабочем документе вывод.

Пример выполнения задания

Найти минимум целевой функции $f(x,y) = 2x + 3y$ при ограничениях

$$\begin{cases} x + y \le 5, \quad x + 2y \ge 4, \quad 2x + y \ge 5, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{cases}$$

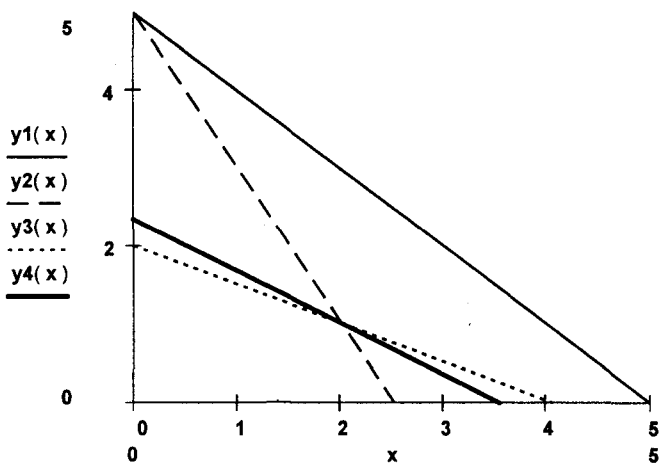
Фрагмент рабочего документа Mathcad с решением задачи приведен ниже.

$x + y = 5 \qquad -x + 5 \qquad y1(x) := -x + 5$

$x + 2 \cdot y = 4 \qquad \frac{-1}{2} \cdot x + 2 \qquad y2(x) := \frac{-1}{2} \cdot x + 2$

$2 \cdot x + y = 5 \qquad -2 \cdot x + 5 \qquad y3(x) := -2 \cdot x + 5$

$2 \cdot x + 3 \cdot y = c \quad \frac{-2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot c \qquad c := 7 \qquad y4(x) := \frac{-2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot c$



Задача имеет единственное решение. Минимум целевой функции достигается в точке пересечения прямых x+2=4, 2x+y=5.

$$\text{Given} \quad x + 2 \cdot y = 4 \qquad 2 \cdot x + y = 5 \qquad \text{Find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$f(x, y) := 2 \cdot x + 3 \cdot y \qquad fmin := f(2, 1) \qquad fmin = 7$

Минимальное значение целевой функции равно 7, оно достигается в точке x=2, y=1. fmin=f(2,1)=7.

Указание. Для того чтобы ввести и разрешить относительно y ограничение $x + y \leq 5$, введите левую часть неравенства, знак символьного равенства (<Ctrl>+<=>) и правую часть неравенства; пометьте выделяющей рамкой переменную y, щелкните в меню **Symbolic** по строке **Solve** — результат вычислений будет выведен в рабочем документе справа от уравнения; введите имя функции (в рассматриваем примере — y1(x)) и присвойте ей полученное выражение. Таким образом определено уравнение одной из прямых, ограничивающих область допустимых значений. Аналогично введите остальные ограничения. Введите уравнение $ax + by = C$ линии уровня целевой функции. Действуйте так же, как и при вводе ограничений, но, перед тем как разрешать уравнение относительно y, присвойте какое-нибудь значение константе C. Постройте графики — прямые, ограничивающие область допустимых значений, и линии уровня целевой функции (см. гл. 1). На рис. 2.13 изображено окно определения параметров графика, приведенного в рабочем документе. Изменяя значение константы* C, например $C = 2, 3, 4, \ldots, 10$, наблюдайте за движением прямой, определяющей линии уровня целевой функции, и сформулируйте вывод о разрешимости задачи. В приведенном фрагменте минимум целевой функции достигается в точке пересечения прямых $x + y = 5$, $x + 2y = 4$. Найдите координаты точки, используя функцию Find.

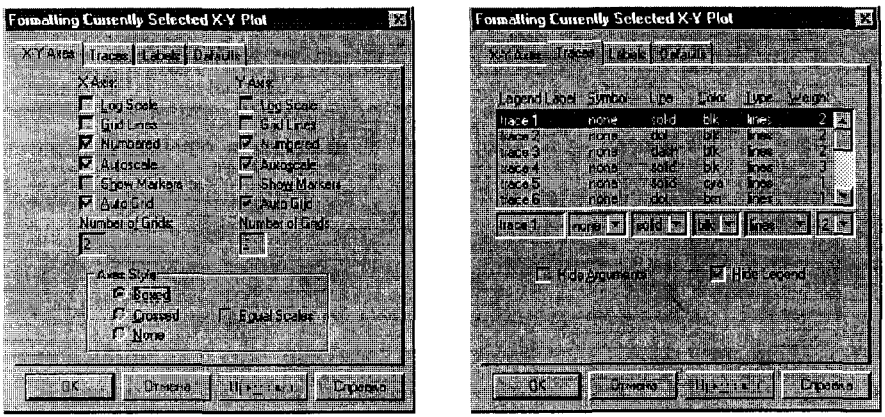


Рис. 2.13. Настройка параметров графиков

2.10
РЕШЕНИЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Проекции на подпространство и метод наименьших квадратов

В разд. 2.5 представлена структура решений совместной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Здесь будут рассмотрены задачи, в которых возникает необходимость решения несовместных систем.

*Поскольку установлен режим автоматических вычислений, измените в рабочем документе значение константы C и щелкните по свободному месту в рабочем документе левее и ниже окна графиков, график будет перерисован автоматически.

Обозначим буквой r *вектор невязки*: $\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$. Если система совместна и вектор $\boldsymbol{x}$ — ее решение, то $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, или, что то же самое, вектор невязки $\boldsymbol{r}$ равен нулю. Справедливо и обратное: если $\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ равен нулю, то $\boldsymbol{x}$ — решение системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Тогда можно сказать, что система $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *несовместна*, если для любого вектора $\boldsymbol{x}$ вектор невязки $\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ отличен от нуля. Отсюда следует парадоксальное утверждение о том, что *любая линейная система после ввода в память компьютера становится, вообще говоря, несовместной.* Действительно, поскольку при вводе правой части и матрицы системы в память компьютера появляются погрешности округления, точное равенство $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ нарушается и система уравнений становится несовместной. Если система $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ несовместна (не существует такого вектора $\boldsymbol{x}$, для которого справедливо равенство $\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$), то попытаемся найти такой вектор $\boldsymbol{x}^*$, при котором разность $A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ в каком-либо смысле минимальна.

Назовем *невязкой* длину $|\boldsymbol{r}|$ вектора невязки $\boldsymbol{r} = (r_1\ r_2\ \dots\ r_n)^T$, т.е. $|\boldsymbol{r}|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i^2$. Вектор $\boldsymbol{x}^*$, доставляющий минимум невязке $|\boldsymbol{r}| = |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$, называется *нормальным обобщенным решением системы* $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}| = |A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}|$. Очевидно, что в случае совместной системы $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}| = |A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}| = 0$ и обобщенное решение совпадает с обычным (классическим) решением.

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T$ и $A^{<1>}$, $A^{<2>}$, ..., $A^{<n>}$ — столбцы матрицы A. Тогда равенство $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ можно записать в виде $x_1 A^{<1>} + x_2 A^{<2>} + \ldots + x_n A^{<n>} = \boldsymbol{b}$, откуда следует, что линейная система $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ совместна тогда и только тогда, когда правая часть $\boldsymbol{b}$ принадлежит пространству столбцов матрицы* A.

Естественно предположить (рис. 2.14), что невязка $|\boldsymbol{r}|$ минимальна, когда вектор невязки $\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ ортогонален пространству столбцов матрицы A и вектор $A\boldsymbol{x}^*$— ортогональная проекция $A\boldsymbol{x}$ на пространство столбцов матрицы A, т.е. $\min\limits_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}| = \min\limits_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \sqrt{(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})}$.

В матричной форме это можно записать следующим образом.

Для произвольного $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ вектор $A\boldsymbol{y}$ ортогонален вектору $A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}$, откуда**:

$$(A\boldsymbol{y}) \cdot (A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) = 0, \quad (A\boldsymbol{y})^T (A\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) = 0,$$

$$\boldsymbol{y}^T (A^T A\boldsymbol{x}^* - A^T \boldsymbol{b}) = 0, \quad \boldsymbol{y}(A^T A\boldsymbol{x}^* - A^T \boldsymbol{b}) = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

*Пространство столбцов матрицы совпадает с пространством $\mathrm{Im}(A)$, т.е. условие совместности системы можно записать в виде $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{R}^n$.

**Напоминаем, что запись $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ означает скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Отметим, что если $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ для любого вектора $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, то $\boldsymbol{x}$ — нулевой вектор.

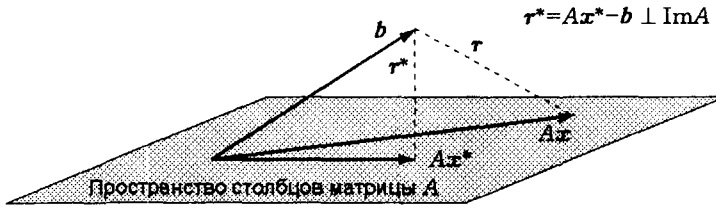


Рис. 2.14. Проекция правой части системы $Ax = b$ на пространство столбцов матрицы A

Следовательно,

$$A^T A\boldsymbol{x}^* - A^T\boldsymbol{b} = 0.$$

Таким образом, нормальное обобщенное решение системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ является решением системы

$$A^T A\boldsymbol{x}^* - A^T\boldsymbol{b} = 0$$

и, если матрица $A^T A$ обратима, его можно вычислить по формуле

$$\boldsymbol{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T\boldsymbol{b}.$$

Линейная система $A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$ называется *нормальной системой уравнений метода нименьших квадратов* для $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, а описанный метод решения линейной системы — *методом наименьших квадратов*, поскольку

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}| = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_j\Big)^2}.$$

ЗАДАНИЕ 2.21

Найдите нормальное обобщенное решение линейной системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ для $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{<1>}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{<2>}$. Вычислите классическое решение системы, если оно существует, и сравните его с обобщенным.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Введите матрицу системы и обе правые части.
4. Найдите матрицу и правые части нормальной системы метода наименьших квадратов.
5. Найдите нормальные обобщенные решения системы для обеих правых частей.

6. Найдите значения невязок, достигнутые на нормальных решениях.
7. Сформулируйте и запишите в рабочем документе вывод о совместности систем.
8. Найдите классическое решение совместной системы. Сравните его с обобщенным решением.
9. Найдите невязку для классического решения.
10. Сформулируйте вывод и запишите его в рабочем документе.

Пример выполнения задания

Найдите нормальное обобщенное решение линейной системы $Ax = b$ для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad b = b^{<1>} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad b = b^{<2>} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с решением задачи приведен ниже.

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b1} := \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b2} := \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AP} := \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \quad \mathbf{bp1} := \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b1} \quad \mathbf{bp2} := \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b2} \qquad \mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 10 & 22 & 35 \\ 22 & 49 & 77 \\ 35 & 77 & 123 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{xn1} := \mathbf{AP}^{-1} \cdot \mathbf{bp1} \qquad \mathbf{xn1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -9.76996 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{xn2} := \mathbf{AP}^{-1} \cdot \mathbf{bp2} \qquad \mathbf{xn2} = \begin{bmatrix} 2.66667 \\ 0.33333 \\ -8.43769 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix}$$

$r1 := |A \cdot xn1 - b1|$ $\qquad$ $r2 := |A \cdot xn2 - b2|$

$r1 = 2.70127 \cdot 10^{-13}$ $\qquad$ $r2 = 0.57735$

Минимум невязки для системы Ax=b1 с точностью до погрешностей округления равен нулю. Следовательно, система Ax=b1 совместна. Минимум невязки для системы Ax=b2 равен -0.57735, отличен от нуля, следовательно, система Ax=b2 несовместна

$$\mathrm{rref}(\mathrm{augment}(A, b1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad r := |A \cdot x - b1| \qquad r = 0$$

Классическое решение x совместной системы Ax=b1 совпадает с нормальным обобщенным решением xn1, минимум невязки для точного решения равен нулю

Указание. Для того чтобы вычислить минимум невязки, щелкните в панели матричных инструментов по кнопке $\boxed{|x|}$ и введите в помеченной позиции имя или выражение (в приведенном фрагменте это $A \cdot xn1 - b1$ и $A \cdot xn2 - b2$).

Точное решение системы $Ax = b1$ легко получить из ступенчатой формы расширенной матрицы системы (в приведенном фрагменте, очевидно, эквивалентная система имеет вид $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$).

Аппроксимация эмпирических данных методом наименьших квадратов

Необходимость решения несовместных систем достаточно часто возникает в практических расчетах, например при анализе эмпирических данных, в том числе и экономических.

В экономике рассматриваются связи между стоимостью продукции, объемом производства, ценой и прибылью. Несмотря на сложность этих связей, в определенных моделях они могут быть линейными (см. разд. 2.8). Пусть, например, выпуск t_1 экземпляров изделия обходится в сумму y_1, выпуск t_2 экземпляров — в сумму y_2 и т.д. Тогда производитель может оценить сумму издержек y на следующей неделе, предположив, что она линейно зависит от объема выпуска t: $y = ct + d$, и оценив значения коэффициентов c, d по уже

имеющимся данным. Коэффициент c называется *предельной стоимостью производства**, а коэффициент d определяет *накладные расходы*.

Предположив, что эмпирические данные (t_1, y_1), (t_2, y_2), ..., (t_n, y_n) подчиняются зависимости $y = ct + d$, получим относительно неизвестных c, d систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} ct_1 + d = y_1, \\ ct_2 + d = y_2, \\ \cdots\cdots \\ ct_n + d = y_n, \end{cases} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad A = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ t_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

в которой при $n > 2$ уравнений больше, чем неизвестных. Линейная система, число уравнений в которой больше числа неизвестных, называется *переопределенной*.

Если линейное соотношение действительно справедливо и эмпирические данные (t_1, y_1), (t_2, y_2), ..., (t_n, y_n) измерены точно, то полученная система совместна, ранг матрицы системы равен двум (число неизвестных) и значения коэффициентов линейной зависимости можно найти из первых двух уравнений системы. На практике такая ситуация невозможна — эмпирические данные по своей природе всегда содержат ошибку, а линейная модель лишь приближенно описывает реальные связи величин. Следовательно, система несовместна и ее нормальное обобщенное решение позволяет найти наилучшие приближенные значения коэффициентов линейной функции, поскольку в этом случае невязка минимальна. Построенному таким образом решению можно дать геометрическую интерпретацию. Поскольку $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} |A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}| = \min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (ct_i + d - y_i)^2}$, то линейная зависимость $y = ct + d$ — это прямая на плоскости переменных t, y, сумма квадратов расстояний до которой от заданных эмпирических точек (t_1, y_1), (t_2, y_2), ..., (t_n, y_n) минимальна.

Нормальное обобщенное решение в этом случае является решением нормальной системы метода наименьших квадратов:

$$(A^T A)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (A^T \boldsymbol{b}),$$

*Обычно важнее знать величину предельной стоимости c, чем накладные расходы d.

где

$$A^{<1>} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix}, \quad A^{<2>} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 2.22

Найдите методом наименьших квадратов значения коэффициентов линейной зависимости $y = ax + b$ по заданным эмпирическим данным. Используя найденную линейную зависимость, вычислите значение y в указанной точке x.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Введите векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, элементы которых — заданные эмпирические данные.
4. Определите матрицу A соответствующей линейной системы, первый столбец которой $A^{<1>} = \boldsymbol{x}$ а элементы второго — единицы.
5. Найдите решение нормальной системы метода наименьших квадратов, используя функцию lsolve.
6. Вычислите аппроксимирующую прямую, используя функции intersept(x, y) и slope(x, y), которые вычисляют по заданным векторам экспериментальных данных $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ коэффициенты b, a.
7. Изобразите графики полученных линейных функций и заданные экспериментальные точки.
8. Найдите значение $y = ax + b$ в указанной точке x.

Пример выполнения задания

Для изучения зависимости октанового числа бензина от чистоты катализатора (%) провели 11 измерений, приведенных ниже.

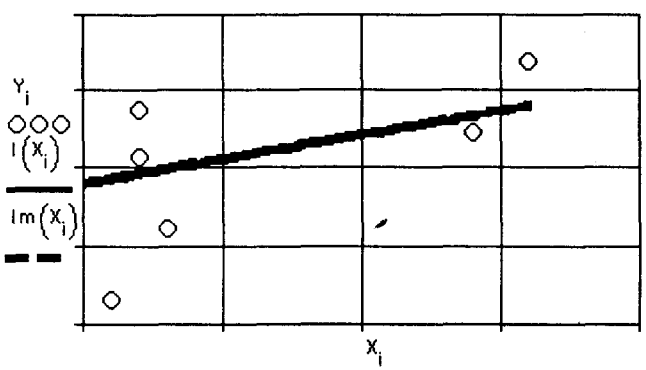
Октановое число	98.8	98.9	99.0	99.1	99.2	99.3	99.4	99.5	99.6	99.7	99.8
Чистота катализатора	87.1	86.6	86.4	87.3	86.1	86.8	87.2	88.4	87.2	86.4	88.6

Найдите коэффициенты a, b линейной зависимости $y = ax + b$ октанового числа от чистоты катализатора. Вычислите значение октанового числа для чистоты катализатора **87%**. Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий соответствующие вычисления и графики, приведен ниже.

$$X := \begin{bmatrix} 0.871 \\ 0.861 \\ 0.864 \\ 0.873 \\ 0.861 \\ 0.868 \\ 0.872 \\ 0.884 \\ 0.872 \\ 0.864 \\ 0.886 \end{bmatrix} \qquad Y := \begin{bmatrix} 0.988 \\ 0.989 \\ 0.990 \\ 0.991 \\ 0.992 \\ 0.993 \\ 0.994 \\ 0.995 \\ 0.996 \\ 0.997 \\ 0.998 \end{bmatrix} \qquad A^{\langle 1 \rangle} := X \qquad A^{\langle 2 \rangle} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} := \mathrm{lsolve}\left(A^T \cdot A, A^T \cdot Y\right) \qquad l(x) := a \cdot x + b$$

$$lm(x) := \mathrm{intercept}(X, Y) + \mathrm{slope}(X, Y) \cdot x \qquad i := 1 .. 11$$

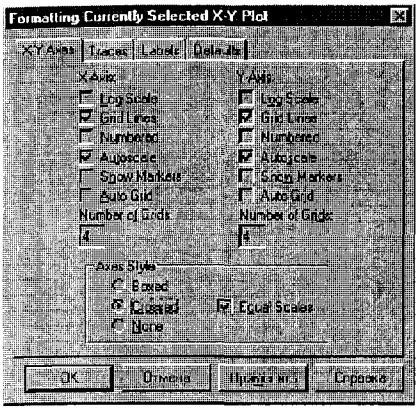


$l(0.870) = 0.993$ $\qquad$ $lm(0.870) = 0.993$

$a = 0.204$ $\qquad$ $b = 0.815$

$\mathrm{slope}(X, Y) = 0.204$ $\qquad$ $\mathrm{intercept}(X, Y) = 0.815$

Указание. Функция lsolve(A, b) возвращает вектор x решения системы $Ax = b$, найденного методом Гаусса с оценкой числа обусловленности. Здесь не используется явная формула решения нормальной обобщенной системы $x = (A^T A)^{-1} A^T b$, поскольку часто в задачах об аппроксимации эмпирических данных



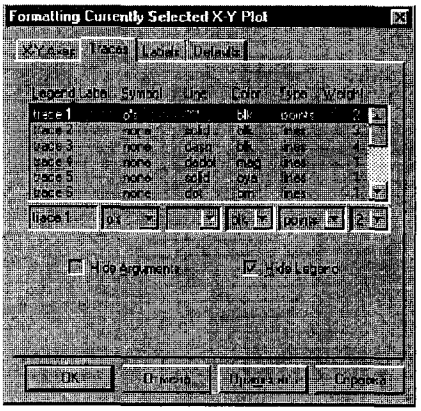


Рис. 2.15. Окна настройки параметров графиков

матрица $A^T A$ получается плохо обусловленной* и при вычислении обратной к ней матрицы возникают большие погрешности округления. Функции intersept(x, y) и slope(x, y) возвращают значения коэффициентов b и a линейной функции $y = x + b$, аппроксимирующей экспериментальные данные, сохраненные в векторах x и y. Для того чтобы построить графики, щелкните по свободному месту в рабочем документе и по кнопке декартова графика в панели графиков. Введите в качестве аргумента имя X_i, а в качестве функции, через запятую, имена Y_i, $I(X_i)$, $Im(X_i)$. Здесь Y_i — экспериментальные точки; $I(X_i)$ — линейная функция, вычисленная с помощью lsolve; $Im(X_i)$ — линейная функция, вычисленная с помощью intersept и slope. На рис. 2.15 представлен вид окон настройки графиков, изображенных в документе. Значения октанового числа, вычисленные для частоты катализатора **0.870** по обеим формулам, совпадают. Совпадают и приведенные в последних строках рабочего документа коэффициенты линейной функции, вычисленные обоими способами.

*Матрица A *плохо обусловлена*, если малые изменения ее элементов (например, округление) приводят к существенным изменениям элементов матрицы A^{-1}. Число обусловленности матрицы cond(A) — мера зависимости погрешностей вычисления A^{-1} от погрешности элементов A. Например, можно определить число обусловленности как модуль отношения наибольшего собственного значения матрицы к ее наименьшему собственному значению.

ГЛАВА 3
ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3.1
ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ MATHCAD

Приступая к решению в Mathcad задач математического анализа, познакомимся с инструментами, которые предоставляет для этого пакет. Как определить функцию и вычислить ее значение, как построить график функции, решить простейшее уравнение, описано в гл. 1. В этой главе будет показано, как построить графики функций, заданных в полярных координатах и в параметрической форме, как вычислить предел, производную, определенный и неопределенный интеграл, найти разложение функции по формуле Тейлора и вычислить сумму ряда. Заметим, что рассматриваются лишь некоторые функции Mathcad, предназначенные для решения задач анализа, и не обсуждаются возможности программирования в пакете.

Как отмечалось ранее, большинство вычислений в Mathcad можно выполнить тремя способами: используя соответствующее меню, с помощью панелей инструментов или обращением к функции. Предполагается, что предварительно в меню **Math** установлены режимы автоматических вычислений и отображения результатов символьных вычислений по горизонтали.

Определение функций и построение графиков

Для того чтобы определить функцию одной переменной, введите с клавиатуры имя функции с аргументом в круглых скобках, знак равенства (он будет отображен в рабочем документе как знак присваивания ":=") и справа от него — выражение для вычисления функции. В записи выражения для функции можно использовать знаки (имена) элементарных функций, вводя их с клавиатуры или вставляя в рабочий документ функцию, выбранную из списка **Function** (Функция) в меню **Insert** (Вставка) (рис. 3.1).

При вводе выражения через меню установите курсор в нужной позиции, щелкните по строке **Function** в меню **Insert**, выберите с

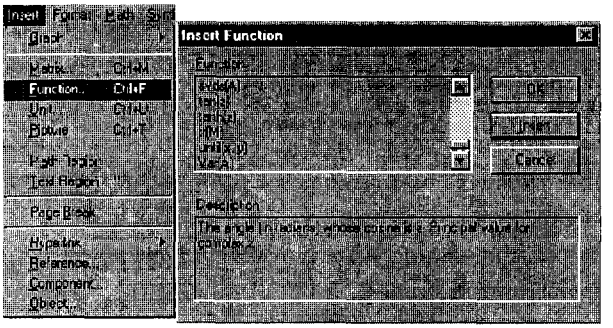


Рис. 3.1. Вид меню **Insert** и окна диалога со списком встроенных функций

помощью стрелок прокрутки имя нужной функции и щелкните по кнопке [Insert].

Выражение можно вводить также с помощью кнопок панели инструментов **Arithmetic** (Калькулятор) (рис. 3.2), которая открывается щелчком по кнопке [calc] в панели математических инструментов.

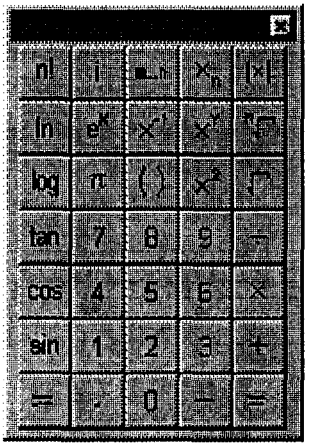


Рис. 3.2. Панель инструментов для ввода простейших выражений

Для того чтобы вставить в выражение имя или символ функции из панели, установите курсор в нужной позиции, щелкните по кнопке в панели и введите в помеченных позициях аргументы и параметры функции. Поскольку в математическом анализе для обозначения переменных часто используются буквы греческого алфавита, в панели математических инструментов есть кнопка [αβ], щелчок по которой открывает панель греческого алфавита. Для того чтобы вставить букву в выражение, установите курсор в нужной позиции и щелкните по кнопке с нужной буквой.

Чтобы вычислить значение функции в точке, введите в рабочий документ с клавиатуры имя функции, укажите в скобках значение аргумента, выделите выражение, введите знак равенства* и щелкните по свободному месту в рабочем документе.

Пример 1. Определение функции $f(t) = 2^{t\sin(3t-1)} - \operatorname{arctg}\frac{1}{t}$. Вычисление значений функции в точках $t = 1$ и $t = 2$.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

$$f(t) := 2^{t\cdot\sin(3\cdot t-1)} - \operatorname{atan}\left(\frac{1}{t}\right) \qquad f(1) = 1.093 \qquad t := 2 \qquad f(t) = -0.199$$

Инструменты для построения графиков в Mathcad доступны в панели инструментов **Graph** (Графики), которая открывается щелчком по кнопке в панели математических инструментов, через меню **Graph** — в меню **Insert** (рис. 3.3).

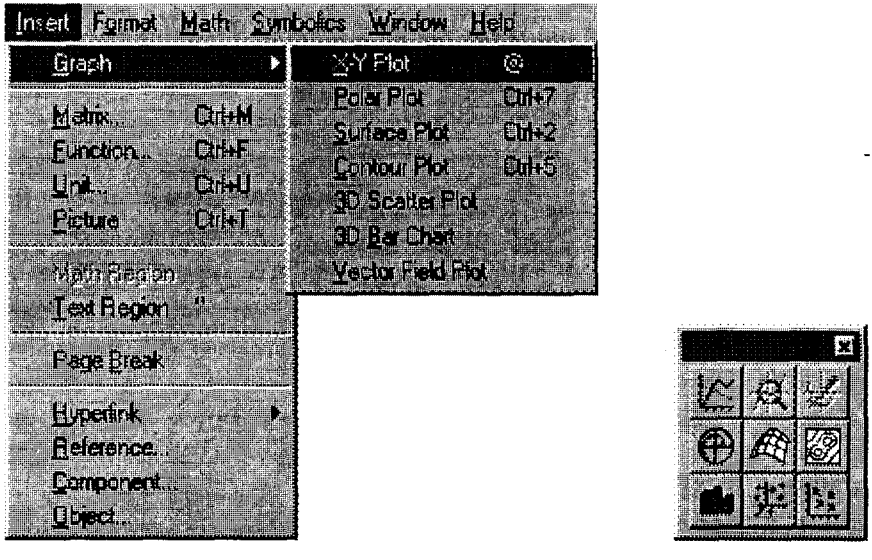


Рис. 3.3. Вид меню и панели инструментов для построения графиков

Правила работы с меню и кнопочной панелью при построении графиков такие же, как и при определении функции, — щелкните по рабочему документу и по соответствующей строке в меню или по кнопке в панели. Можно построить график функции, заданной в декартовых координатах или в параметрической форме (пункт меню

*Из рис. 3.2 видно, что знак равенства и знак присваивания можно ввести щелчком по соответствующей кнопке в панели калькулятора.

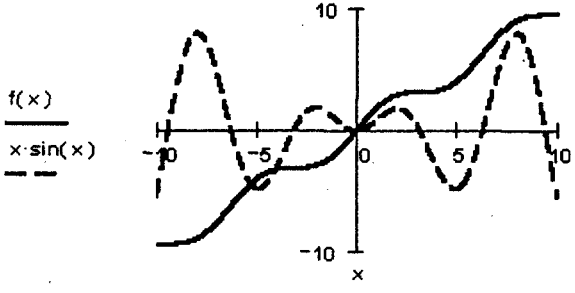
X-Y Plot или кнопка), а также график функции, заданной в полярных координатах (пункт меню **Polar Plot** или кнопка).

Для построения графиков функции, заданной в декартовых координатах, щелкните по рабочему документу, по пункту меню X-Y Plot (или по кнопке); в рабочем документе откроется окно построения графиков. Введите в помеченной позиции возле оси абсцисс имя аргумента, а в позиции возле оси ординат — имя функции и щелкните по рабочему документу вне окна графиков. Если нужно построить одновременно графики нескольких функций, введите, разделяя запятой, их имена в позиции возле оси абсцисс. Вместо имени функции можно ввести выражение для ее вычисления. Параметры изображения (цвет и толщина линий, координатная сетка, разметка осей, надписи на графиках и др.) проще всего изменить, щелкнув дважды по полю графика и установив настройки в соответствующих окнах диалога.

Пример 2. Построение графиков функций $f(x) = x + \sin x$ и $g(x) = x \sin x$.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с определениями функций и их графиками приведен ниже.

f(x) := x + sin(x)



Вид окон диалога настройки параметров графиков приведен на рис. 3.4.

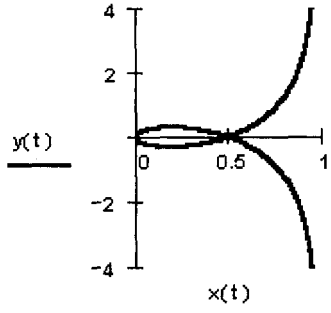
Графики функций, заданных в параметрической форме, строятся аналогично. Отличие состоит в том, что в позициях аргумента и функции вводятся выражения или имена соответствующих функций параметра.

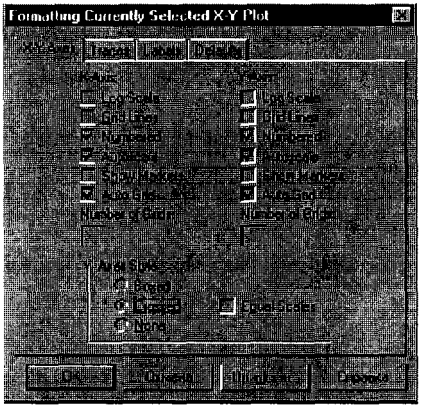
Пример 3. Построение кривой, заданной в параметрической форме выражениями:

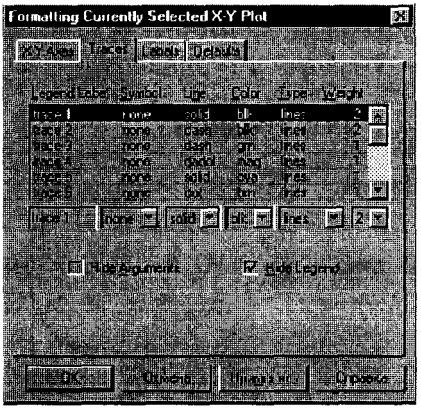
$$x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}.$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с определениями функций и их графиками приведен ниже. Представлена кривая функции $y = y(x)$, координаты каждой точки (x, y) которой вычислены как функции параметра t: $(x, y) = \big(x(t), y(t)\big)$.

$$x(t) := \frac{t^2}{1+t^2} \qquad y(t) := \frac{t\cdot(1-t^2)}{1+t^2}$$







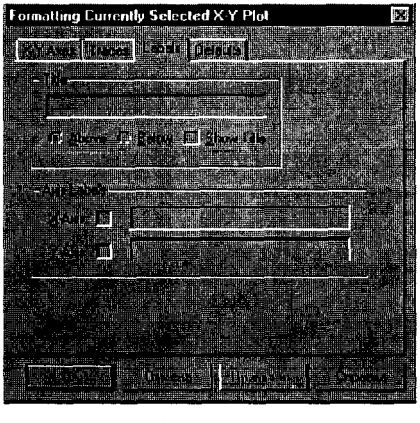
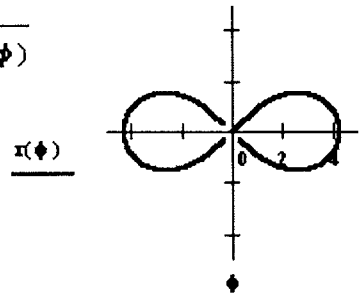


Рис. 3.4. Окна диалога настройки параметров графиков

Пример 4. Построение лемнискаты Бернулли $r = 3\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Ниже приведен рабочий документ Mathcad с изображением лемнискаты.

$r(\phi) := 3\cdot\sqrt{2\cdot\cos(2\cdot\phi)}$



Для построения графика функции, заданной в полярных координатах, щелкните по рабочему документу, по пункту меню **Polar Plot** (или по кнопке [⊕]) — в рабочем документе откроется окно построения графиков. Введите в помеченных позициях имя аргумента и имя или выражение для функции, установите в окнах диалога, как и в предыдущих примерах, параметры изображения и щелкните по рабочему документу вне поля графиков.

Вычисление пределов

Большинство инструментов для решения задач математического анализа в Mathcad собрано в панели **Calculus** (Анализ), которая открывается щелчком по кнопке [$\int\frac{dy}{dx}$] в панели математических инструментов. Вид панели приведен на рис. 3.5.

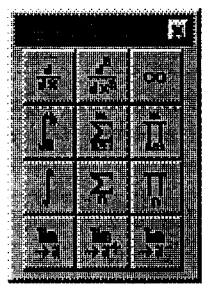


Рис. 3.5. Панель инструментов **Calculus**

Три нижние кнопки в панели предназначены для вычисления пределов. Кнопкой [$\lim_{\to a}$] в рабочий документ вставляется оператор вычисления предела функции в точке или на бесконечности, кнопками [$\lim_{\to a^+}$] и [$\lim_{\to a^-}$] — операторы вычисления односторонних пределов соответственно справа и слева.

Для того чтобы вычислить предел, щелкните по свободному месту в рабочем документе, затем щелкните по нужной кнопке, введите с клавиатуры в помеченных позициях имя или выражение допредельной функции и предельной точки, выделите все выражение и щелкните по строке **Symbolically** в пункте **Evaluate** в меню **Symbolics** (или нажмите на клавиатуре комбинацию клавиш <Shift>+<F9>).

Пример 5. Вычисление пределов

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}},\qquad \lim_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}},\qquad \lim_{x\to-0}e^{\frac{1}{x}}.$$

На рис. 3.6 приведен вид окна Mathcad с вычисленными пределами и со всеми использованными в работе меню и панелями.

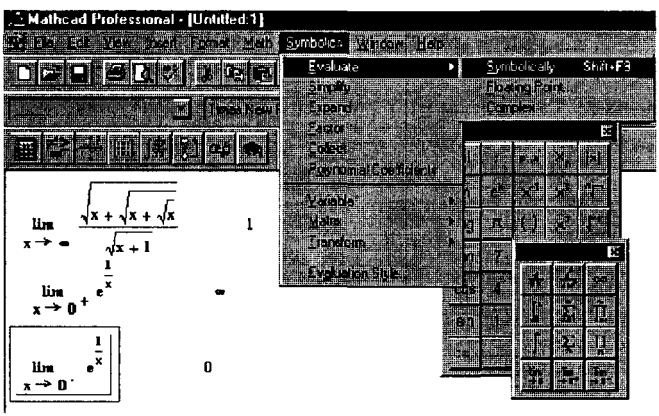


Рис. 3.6. Вычисление пределов

Указание. Установите режим автоматических вычислений и режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали. Для ввода символа квадратного корня и экспоненты используйте панель калькулятора. При вычислении пределов последовательностей определяйте элемент последовательности как функцию номера элемента и вычисляйте предел на бесконечности.

Дифференцирование

Выражение для производной функции в Mathcad можно найти двумя способами: с помощью панели инструментов **Calculus** и через меню символьных операций **Symbolics**.

Чтобы найти производную, щелкните по свободному месту в рабочем документе, щелкните в панели **Calculus** по кнопке $\boxed{\frac{d}{dx}}$, введите с клавиатуры в помеченных позициях имя или выражение функции и

аргумента, заключите все выражение в выделяющую рамку и щелкните по строке **Symbolically** в пункте **Evaluate** в меню **Symbolics** (или нажмите на клавиатуре комбинацию клавиш <Shift>+<F9>). Можно поступить иначе: выделить выражение для производной и щелкнуть в панели по кнопке . При вычислении производных высших порядков щелкните по кнопке , введите в помеченных позициях выражение для функции, имя аргумента и порядок производной, а дальше действуйте так же, как при вычислении производной первого порядка.

Для того чтобы найти производную с помощью меню, введите в рабочий документ выражение для функции, выделите аргумент и щелкните по строке **Differentiate** в пункте **Variable** меню **Symbolics** (рис. 3.7).

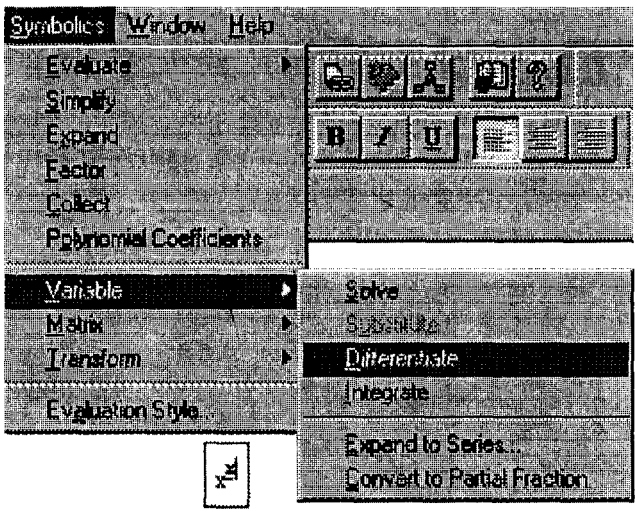


Рис. 3.7. Символьное дифференцирование в меню **Symbolics**

Пример 6. Вычисление производных $(x^x)'$ и $(x^x)''$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением производной.

$$\frac{d}{dx}x^x \qquad x^x\cdot(\ln(x)+1) \qquad \frac{d^2}{dx^2}x^x \qquad x^x\cdot(\ln(x)+1)^2+\frac{x^x}{x}$$

Указание. Установите режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали и вычислите производную, используя панель **Calculus**.

Интегрирование

Символьное вычисление неопределенного интеграла в Mathcad можно выполнить двумя способами: с помощью панели инструментов **Calculus** и через меню символьных операций **Symbolics**.

Для того чтобы найти неопределенный интеграл, щелкните по свободному месту в рабочем документе, затем в панели **Calculus** — по кнопке $\boxed{\int}$, введите с клавиатуры в помеченных позициях выражение для функции и имя переменной интегрирования, заключите все выражение в выделяющую рамку и щелкните по строке **Symbolically** в пункте **Evaluate** в меню **Symbolics** (или нажмите на клавиатуре комбинацию клавиш <Shift>+<F9>). Определенный интеграл вычисляется аналогично: щелкните по кнопке $\boxed{\int_{\square}^{\square}}$, введите в помеченных позициях выражение для функции, имя переменной интегрирования и пределы интегрирования, а дальше действуйте так же, как при вычислении неопределенного интеграла.

Для того чтобы найти неопределенный интеграл с помощью меню, введите в рабочий документ выражение для интегрируемой функции, выделите переменную интегрирования и щелкните по строке **Integrate** в пункте **Variable** меню **Symbolics**.

Пример 7. Вычисление интегралов

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx \qquad \text{и} \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\,dx.$$

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$\frac{1}{1+\cos(x)} \quad \tan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right) \qquad \int \frac{1}{1+\cos(x)}\,dx \quad \tan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(x)}\,dx \qquad 1$$

Указание. Установите режим отображения результатов вычислений по горизонтали, вычислите неопределенный интеграл, используя сначала меню, а затем панель **Calculus**. Вычислите определенный интеграл, используя панель **Calculus**.

Суммирование рядов

Символьное вычисление конечных сумм и сумм сходящихся рядов в Mathcad выполняется с помощью панели инструментов **Calculus**.

Для того чтобы вычислить сумму, щелкните по свободному месту в рабочем документе, затем — по кнопке $\boxed{\sum_{\blacksquare}^{\blacksquare}}$ в панели **Calculus**, введите с клавиатуры в помеченных позициях выражение для функции, имя индекса суммирования, его первое и последнее значения (для рядов введите в качестве последнего значения символ бесконечности, щелкнув по кнопке с символом ∞ в той же панели), заключите все выражение в выделяющую рамку и щелкните по строке **Symbolically** в пункте **Evaluate** в меню **Symbolics** (или нажмите на клавиатуре комбинацию клавиш <Shift>+<F9>). Для того чтобы получить вычисленное значение в десятичном формате, выделите его, щелкните в том же меню по строке **Floating Point** и введите в окне диалога требуемое число десятичных знаков. Можно сразу получить значение суммы в десятичном формате, если щелкнуть вместо **Symbolically** по строке **Floating Point**.

Пример 8. Вычисление частичных сумм ряда и суммирование рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением сумм рядов.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \exp(x) \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \qquad \exp(1) \qquad \exp(1) = 2.718$$

$$\sum_{n=0}^{5}\frac{1}{n!} \qquad \frac{163}{60} \qquad 2.717 \qquad \sum_{n=0}^{10}\frac{1}{n!} \qquad 2.718$$

Указание. Установите режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали, вычислите сумму ряда, значение экспоненты, значение частичной суммы (суммы первых шести членов ряда) и преобразуйте его в десятичный формат; вычислите значение второй частичной суммы сразу в десятичном формате (см. разд. 1.3).

Разложение функций по формуле Тейлора

В Mathcad можно найти разложение функции по формуле Тейлора в окрестности любой точки из области определения функции. Сделать это можно через меню символьных вычислений или с помощью панели

Symbolic Keyword (Ключевые слова символьных операций)*, которая открывается щелчком по кнопке [🎓] в панели матемaтематических инструментов (рис. 3.8).

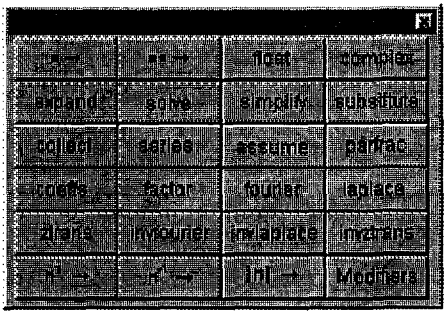


Рис. 3.8. Панель символьных операций

При работе через меню введите функцию, выделите переменную, щелкните по строке **Expand to Series** (Разложение в ряд) в пункте **Variable** (Переменная) меню **Symbolics**, введите в окне диалога (рис. 3.9) степень старшего члена в разложении и щелкните по кнопке [OK].

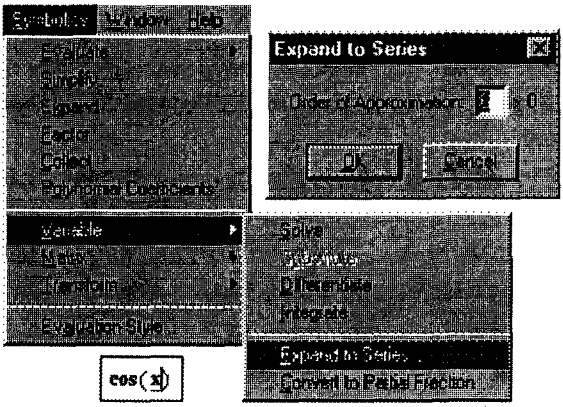


Рис. 3.9. Мёню и окно диалога разложения по формуле Тейлора функции $\cos x$

При работе с панелью символьных операций щелкните сначала по свободному месту в рабочем документе, затем — по кнопке [series], введите перед ключевым словом **series** выражение для функции, а после ключевого слова — имя переменной и точку, в окрестности которой строится разложение, щелкните в рабочем документе вне выделяющей рамки.

---

*Эту панель будем называть *панелью символьных операций*.

При работе с меню в рабочем документе отображается соответствующее разложение с остаточным членом в форме Пеано, при работе с панелью ключевых слов — только многочлен Тейлора (частичная сумма ряда Тейлора).

Пример 9. Разложение функции $\cos x$ по формуле Тейлора в окрестности нуля и в окрестности точки $x = \pi/2$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$\cos(x)\ \text{series}, x=0 \rightarrow 1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4$$

$$\cos(x)\ \text{series}, x=\frac{\pi}{2} \rightarrow -x + \frac{1}{2}\cdot\pi + \frac{1}{6}\cdot\left(x - \frac{1}{2}\cdot\pi\right)^3 - \frac{1}{120}\cdot\left(x - \frac{1}{2}\cdot\pi\right)^5$$

$$\cos(x) \qquad 1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4 + O(x^6)$$

Указание. Установите режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали и найдите разложение в окрестности нуля, используя панель символьных операций. Аналогично найдите разложение в окрестности точки $\pi/2$. Используя меню символьных операций, найдите разложение до шестой степени.

3.2
СХОДИМОСТЬ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Последовательность $\{a_n\}$ — это функция, заданная на множестве натуральных чисел $N = \{1, 2, \ldots\}$. Число a называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, существует такой номер N, что для всех a_n с номерами $n > N$ справедливо неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, эквивалентное неравенству $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, означает, что для любого $\varepsilon > 0$ все a_n с номерами $n > N$ расположены между $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$.

Последовательность, предел которой — число a, называется *сходящейся*, и ее предел обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Если изобразить элементы последовательности a_n на плоскости точками с координатами (n, a_n), то неравенства $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ означают, что все точки (n, a_n) с номерами $n > N$ расположены между параллельными оси абсцисс прямыми $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, в котором исследована сходящаяся последовательность $a_n = \sqrt[n]{2}$ и построен график, иллюстрирующий процесс сходимости.

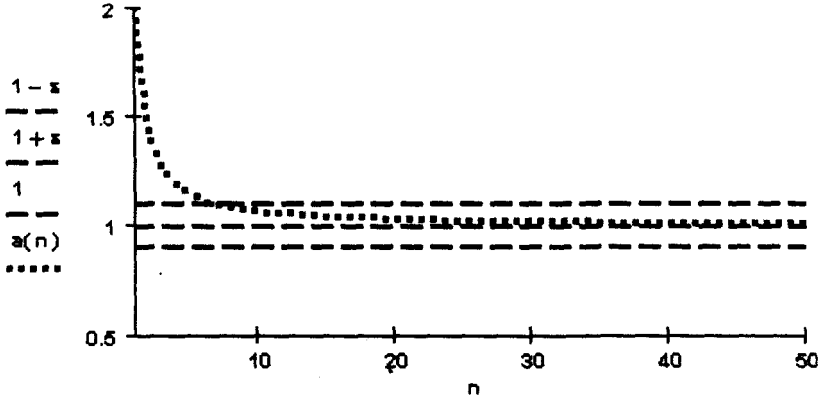
Сходящаяся последовательность $a(n) := \sqrt[n]{2}$ $\quad \lim\limits_{n \to \infty} a(n) \to 1$

Вычисление N(ε) $\quad (\sqrt[n]{2} - 1) - \varepsilon \quad \dfrac{\ln(2)}{\ln(1+\varepsilon)} \quad N(\varepsilon) := \dfrac{\ln(2)}{\ln(1+\varepsilon)}$

$N(0.1) = 7.273$ $\qquad N(0.01) = 69.661$

$|a(8) - 1| = 0.091$ $\qquad |a(70) - 1| = 9.951 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon := 0.1 \quad n := 1..50$



Последовательность $\{\alpha_n\}$, предел которой равен нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$), называется *бесконечно малой.*

Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad с исследованием и графическим изображением бесконечно малой последовательности $b_n = (-1)^n \sin\dfrac{1}{n}$.

Бесконечно малая последовательность

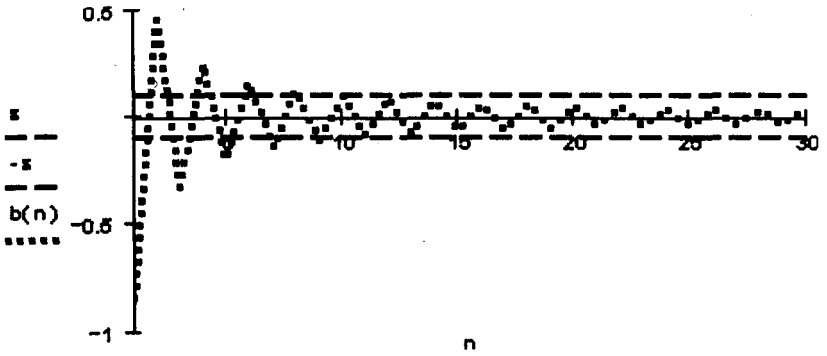
$b(n) := (-1)^n \cdot \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \qquad \lim\limits_{n \to \infty} b(n) \to 0$

Вычисление N(ε) $\quad \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \varepsilon \quad \dfrac{1}{\operatorname{asin}(\varepsilon)} \quad N(\varepsilon) := \dfrac{1}{\operatorname{asin}(\varepsilon)}$

$N(0.1) = 9.983$ $\qquad N(0.01) = 99.998$

$|b(10)| = 0.1$ $\qquad |b(100) - 1| = 0.99$

$\varepsilon := 0.1 \quad n := 1..30$



Последовательность $\{\beta_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа M, как бы велико оно ни было, существует такой номер N, что для всех β_n с номерами $n > N$ справедливо неравенство $|\beta_n| > M$. Записывается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с исследованием и графическим изображением бесконечно большой последовательности $c_n = 7\ln(10n+1)$ представлен ниже.

Бесконечно большая последовательность

$c(n) := 7\cdot\ln(10\cdot n + 1)$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} c(n) \to \infty$

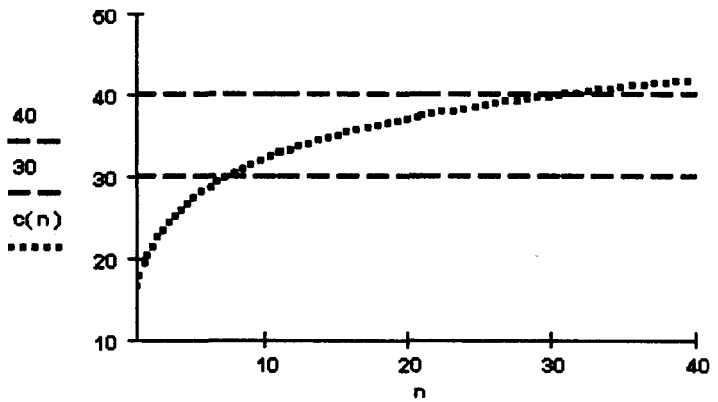
Вычисление N(M)

$7\cdot\ln(10\cdot n + 1) - M$ $\qquad \frac{1}{10}\cdot\exp\left(\frac{1}{7}\cdot M\right) - \frac{1}{10}$ $\qquad N(M) := \frac{1}{10}\cdot\exp\left(\frac{1}{7}\cdot M\right) - \frac{1}{10}$

$N(30) = 7.165$ $\qquad N(40) = 30.217$

$|c(8)| = 30.761$ $\qquad |c(31)| = 40.179$

$n := 1..40$



Из приведенных вычислений видно, что $c_n > 30$ при $n > 8$ и $c_n > 40$ при $n > 31$.

Рассмотрим сходящуюся последовательность $x_n = 2\operatorname{arctg} n^4$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pi$. Это означает, что, увеличивая n, можно по формуле $x_n = 2\operatorname{arctg} n^4$ как угодно точно* вычислить значение числа π. Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление приближенного значения π до шести десятичных знаков после запятой. Для сравнения приведено значение π с пятнадцатью десятичными знаками.

Приближенное вычисление числа π

$x(n) := 2\cdot\mathrm{atan}(n^4)$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} x(n) \to \pi$

$\pi = 3.141592653589793$ $\qquad n := 1..100$

$c_n := x(n)$ $\qquad c =$

	0
12	3.141496
13	3.141523
14	3.141541
15	3.141553
16	3.141562
17	3.141569
18	3.141574

ЗАДАНИЕ 3.1

Найдите пределы последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$. Для указанных значений $\varepsilon = 10^{-k}$ найдите такие $N(\varepsilon)$, чтобы все элементы последовательности с номерами $n > N(\varepsilon)$ совпадали с предельным значением до k-го знака после запятой. Для заданных значений M укажите такие значения $N(M)$, чтобы для всех членов бесконечно большой последовательности $\{c_n\}$ с номерами $n > N(M)$ выполнялось неравенство $|c_n| > M$. Изобразите графически сходящиеся последовательности и их пределы. Изобразите графически бесконечно большую последовательность.

*С точностью до погрешностей округления.

Порядок выполнения задания

1. Убедитесь, что в меню **Math** установлен режим автоматических вычислений.
2. Введите элемент последовательности $\{a_n\}$ как функцию переменной n.
3. Используя символьную математику пакета, найдите аналитически предел a последовательности $\{a_n\}$.
4. Запишите уравнение для определения $N(\varepsilon)$ и решите его, используя символьную математику.
5. Для каждого заданного значения ε вычислите по полученной формуле значение $N(\varepsilon)$.
6. Для любого $n > N(\varepsilon)$, например для $n = [N(\varepsilon)] + 1$, вычислите $|a_n - a|$ и сравните его с ε.
7. Выбрав достаточно большое значение N, вычислите значения элементов последовательности для $n = 1, 2, \ldots, N$ и изобразите на графике элементы последовательности как функции n.
8. Изобразите на том же графике горизонтальные прямые $y = a \pm \varepsilon$. Найдите на графике значение $N(\varepsilon)$.
9. Выполните аналогичные вычисления (пп. 1–7) для последовательности $\{b_n\}$.
10. Аналогично исследуйте бесконечно большую последовательность $\{c_n\}$.

Пример выполнения задания

Исследуйте последовательность $a_n = \sqrt{n-2} - \sqrt{n-3}$. Для ε, равного 0.1, 0.05, 0.01, укажите соответствующее значение $N(\varepsilon)$. Изобразите графически процесс сходимости. Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$a(n) := \sqrt{n-2} - \sqrt{n-3} \qquad \lim_{n \to \infty} a(n) \to 0$$

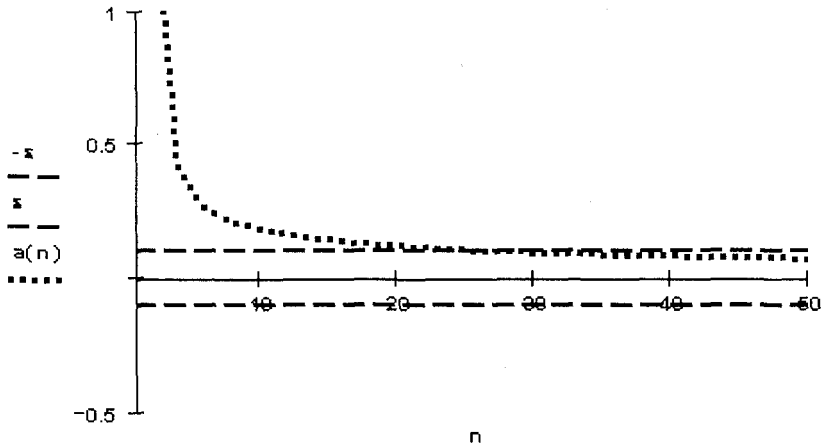
Вычисление N(ε)

$$\left(\sqrt{n-2} - \sqrt{n-3}\right) - \varepsilon \qquad \frac{1}{4} \cdot \frac{(10 \cdot \varepsilon^2 + 1 + \varepsilon^4)}{\varepsilon^2} \qquad N(\varepsilon) := \frac{1}{4} \cdot \frac{10 \cdot \varepsilon^2 + 1 + \varepsilon^4}{\varepsilon^2}$$

$$N(0.1) = 27.502 \qquad N(0.05) = 102.501 \qquad N(0.01) = 2.503 \cdot 10^3$$

$$|a(28)| = 0.099 \qquad |a(103)| = 0.05 \qquad |a(2504)| = 9.997 \cdot 10^{-3}$$

$\varepsilon := 0.1 \quad n := 1..50$



Указание. Введите определение элементов последовательности как функции переменной. Для этого введите с клавиатуры последовательно a(n), знак присваивания (знак "=" в данном случае) и выражение для вычисления элемента последовательности. Для того чтобы ввести знак квадратного корня, щелкните в панели калькулятора по кнопке $\sqrt{\ }$. Чтобы вычислить предел аналитически, щелкните в панели $\frac{d}{dx}$ по кнопке $\lim_{\to a}$, введите в помеченных позициях соответствующие символы и выражения, нажмите на клавиатуре комбинацию клавиш <Ctrl>+<.> и щелкните по рабочему документу вне выделяющей рамки. Чтобы получить аналитическое выражение для $N(\varepsilon)$, используйте меню символьных операций. Запишите левую часть уравнения для вычисления $N(\varepsilon)$, выделите n и щелкните по строке **Solve** в пункте **Variables** меню **Symbolics**, как показано на рис. 3.10. Символ ε вставляется щелчком по кнопке ε в панели $\alpha\beta$. Скопируйте решение уравнения и присвойте его переменной $N(\varepsilon)$.

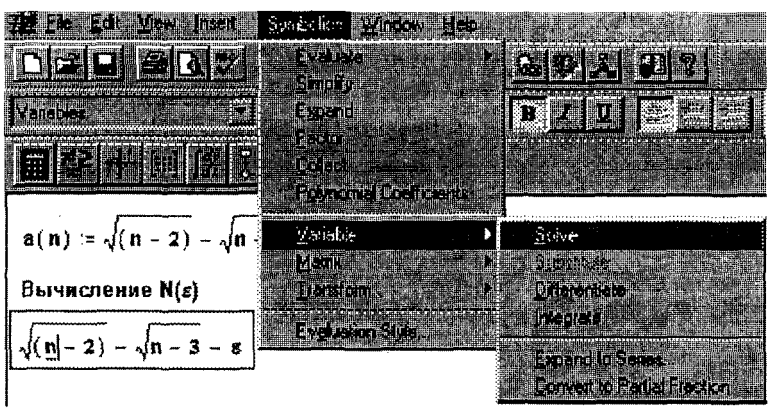


Рис. 3.10. Решение уравнения относительно переменной с использованием меню символьной математики

Для того чтобы вычислить |a(n)|, щелкните по кнопке |x| в панели калькулятора, введите в помеченной позиции выражение a(n) и знак "=". На этом аналитическое исследование последовательности закончено. Чтобы дать геометрическую иллюстрацию, сначала определите значение и задайте диапазон изменения номера n (например, диапазон от 1 до 50 определяет команда n:=1..50, которая вводится с клавиатуры последовательностью клавиш: <n><:><1><;><5><0>), затем откройте панель и определите декартов график, щелкнув по кнопке . Укажите имя аргумента и диапазон его изменения в помеченных позициях возле оси абсцисс; введите, разделяя запятыми, в помеченной позиции возле оси ординат имена или определения функций, графики которых нужно построить. Щелкните дважды по полю графика и установите в окнах диалога параметры изображения. Для того чтобы определить по графику значение $N(\varepsilon)$, используйте операцию определения координат точки кривой: щелкните по графику и по соответствующему пункту в меню **Graph** (рис. 3.11).

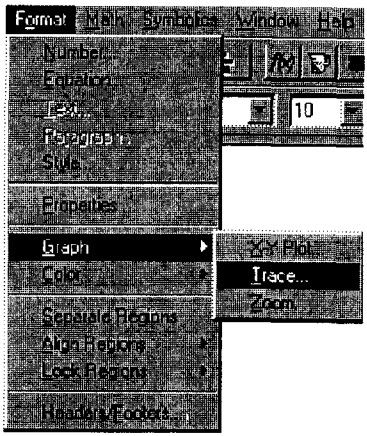


Рис. 3.11. Меню графики

В окне отображаются координаты точки, помеченной мышью (точка пересечения пунктирных линий) (рис. 3.12).

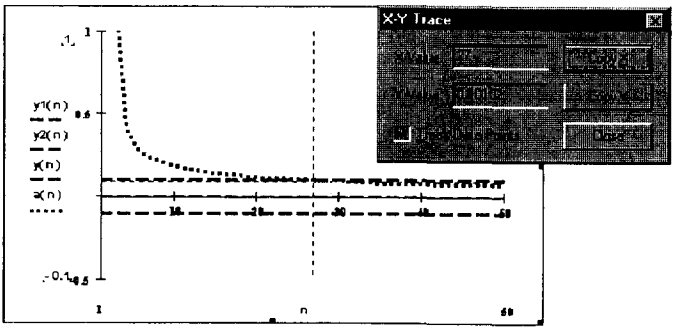


Рис. 3.12. Определение координат точки пересечения двух линий

В этом же меню есть операция просмотра графиков в увеличенном масштабе — **Zoom**. Выделите (щелкните мышью и растяните) прямоугольную область и щелкните в окне диалога по кнопке [Zoom], в окне графиков будет отображен увеличенный фрагмент (рис. 3.13).

Вернуться к исходному графику можно, щелкнув по кнопке [Full View].

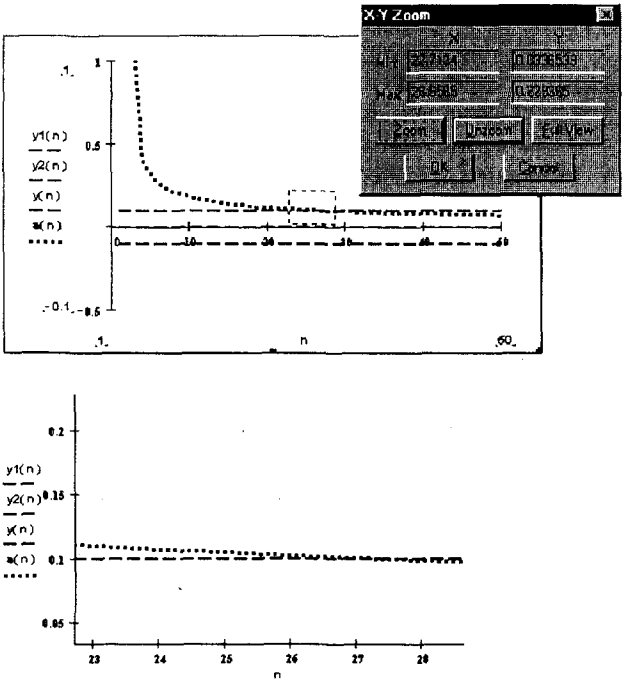


Рис. 3.13. Просмотр выделенного графика в увеличенном масштабе

3.3 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Предел функции в точке

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некоторой окрестности $(a-\Delta, a+\Delta)$ точки a, $\Delta > 0$, за исключением, быть может, самой точки* a.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, существует такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих соотношению $0 < |x-a| < \delta$, справедливо неравенство

*В этом случае говорят, что функция определена в *проколотой окрестности* точки a, и обозначают $\dot{\delta}(a)$.

$|f(x) - A| < \varepsilon$. Говорят "*предел функции* $f(x)$ *в точке* a" и обозначают $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$ и $0 < |x - a| < \delta$, эквивалентные неравенствам $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$, означают, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что для $a - \delta < x < a + \delta$ график функции $f(x)$ расположен на плоскости xOy в прямоугольнике $a - \delta < x < a + \delta$, $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$.

При вычислениях на компьютере мы имеем дело с дискретными значениями переменных. Поэтому удобнее пользоваться другим, эквивалентным приведенному, определением предела, а именно: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, если для любой сходящейся к a последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится* к числу A.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что точки с координатами $(x_n, f(x_n))$, для которых $a - \delta < x_n < a + \delta$ и $x_n \neq a$, находятся на плоскости xOy внутри прямоугольника $a - \delta < x < a + \delta$, $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий исследование предела в нуле функции $f(x) = e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$ и график, иллюстрирующий поведение функции в окрестности нуля.

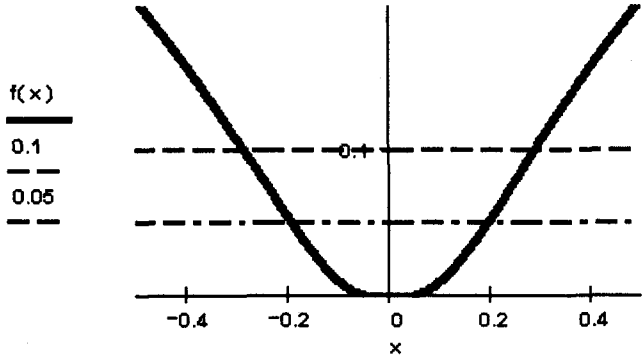
$$f(x) := \exp\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \qquad \lim_{x \to 0} f(x) \to 0$$

$$\exp\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) - \varepsilon \qquad \begin{bmatrix} \left(\frac{-1}{\ln(\varepsilon)}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)} \\ -\left(\frac{-1}{\ln(\varepsilon)}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)} \end{bmatrix} \qquad \delta(\varepsilon) := \left(\frac{-1}{\ln(\varepsilon)}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\delta(0.1) = 0.286 \qquad \delta(0.05) = 0.193$$

$$f(0.286) = 0.1 \qquad f(0.193) = 0.05$$

*Первое из приведенных определений предела называют определением предела функции *по Коши*, второе — определением предела функции *по Гейне*.



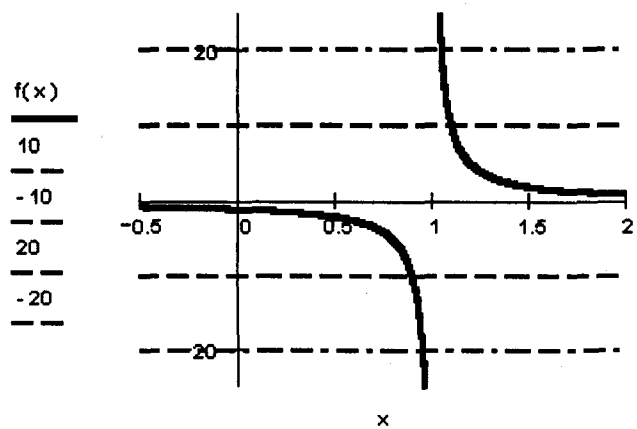
Если для любой последовательности значений $x_n \to a$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ бесконечно большая, то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой в точке* a. Если $f(x)$ бесконечно большая в точке a, то для любого положительного числа M, как бы велико оно ни было, существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > M$.

Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, в котором исследовано поведение функции $f(x) = \frac{1}{x-1}$, являющейся бесконечно большой в точке $x = 1$, и построен ее график, иллюстрирующий поведение функции в окрестности точки $x = 1$.

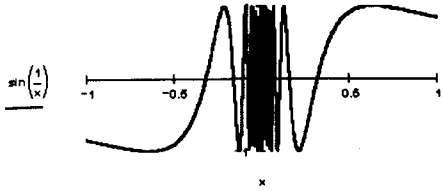
$$f(x) := \frac{1}{x-1} \qquad \lim_{x \to 1} f(x) \to \text{undefined}$$

$$\frac{1}{x-1} - M \qquad \frac{(1+M)}{M} \qquad \delta(M) := \frac{(1+M)}{M}$$

$$\delta(10) = 1.1 \qquad \delta(20) = 1.05 \qquad f(1.1) = 10 \qquad f(1.05) = 20$$



В приведенном ниже рабочем документе Mathcad построены графики функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, не имеющей предела в нуле.



ЗАДАНИЕ 3.2

Найдите предел функции $f(x)$ в точке $x = a$. Для указанных значений $\varepsilon = 10^{-k}$ найдите $\delta(\varepsilon)$ такие, что значения функции при $0 < |x - a| < \delta$ совпадают с предельным значением до k-го знака после запятой. Изобразите графически поведение функции в окрестности точки $x = a$.

Порядок выполнения задания

1. Убедитесь, что в меню **Math** установлен режим автоматических вычислений.
2. Определите функцию $f(x)$.
3. Используя символьную математику пакета, найдите $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
4. Запишите уравнение для определения $\delta(\varepsilon)$ и решите его, используя символьную математику.
5. Для каждого заданного значения ε вычислите по полученной формуле значение $\delta(\varepsilon)$.
6. Вычислите $\max\limits_{0<|x-a|<\delta} |f(x) - A|$ и сравните его с ε.
7. Постройте график функции в окрестности точки $x = a$.
8. Изобразите на том же графике горизонтальные прямые $y = A \pm \varepsilon$. Найдите на графике значение $\delta(\varepsilon)$.

Пример выполнения задания

В приведенном выше документе дан примерный вариант выполнения задания. На рис. 3.14 показано, как с помощью операции **Trace** можно определить значение $\delta(\varepsilon)$ по графику.

Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некоторой окрестности $(a - \Delta, a + \Delta)$ точки a, $\Delta > 0$, за исключением, быть может, самой точки a. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при x, стремящемся к a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

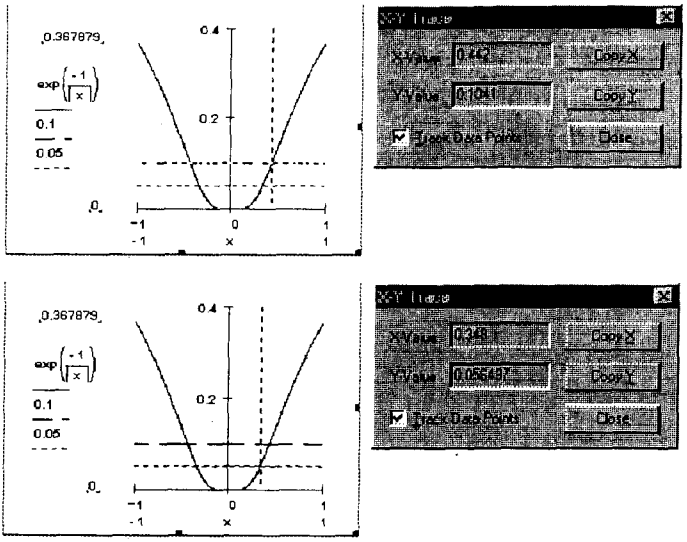


Рис. 3.14. Вычисление $\delta(\varepsilon)$ по графику функции

Если $f(x)$ — бесконечно малая в точке $x = a$, то для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, существует такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Неравенства $|f(x)| < \varepsilon$ для всех $0 < |x - a| < \delta$ означают, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое δ, что для $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$, график функции $f(x)$ расположен на плоскости xOy в прямоугольнике $a - \delta < x < a + \delta$, $-\varepsilon < y < +\varepsilon$. На рис. 3.14 приведен график функции $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)$, бесконечно малой в нуле.

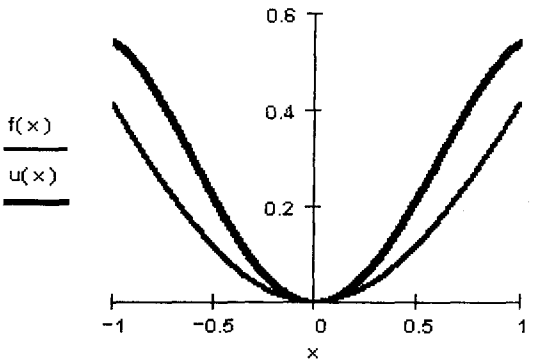
Ниже представлен рабочий документ Mathcad, в котором определены и построены графики двух бесконечно малых функций.

$$f(x) := \sqrt{1 + x^2} - 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \to 0$$

$$u(x) := x^2 \cdot \cos(x)$$

$$\lim_{x \to 0} u(x) \to 0$$



На графике видно различие в поведении функций в окрестности предельной точки — одна из функций стремится к нулю "скорее", чем другая.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две функции, бесконечно малые в точке $x = a$. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ *более высокого порядка малости, чем* $\beta(x)$, и обозначают $\alpha(x) = o\big(\beta(x)\big)$. Если же $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\beta(x)$ более высокого порядка малости, чем $\alpha(x)$, т.е. $\beta(x) = o\big(\alpha(x)\big)$. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка малости*, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mathrm{const} \neq 0$. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* ($\alpha(x) \sim \beta(x)$). Если же $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *несравнимы*.

Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, в котором выполнено сравнение бесконечно малых в нуле функций $f(x)$, $g(x)$, $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$.

$$f(x) := \sqrt{1 + x^2} - 1 \qquad \lim_{x \to 0} f(x) \to 0$$

$$p(x) := \exp(x^2) - 1 \qquad \lim_{x \to 0} p(x) \to 0$$

$$u(x) := x \cdot \ln\left(1 + \sqrt{x}\right) \qquad \lim_{x \to 0} u(x) \to 0$$

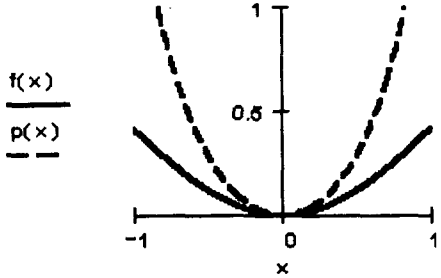
$$v(x) := 1 - \cos(x^3) \qquad \lim_{x \to 0} v(x) \to 0$$

$$w(x) := x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x \to 0} w(x) \to 0$$

Вывод: все приведенные функции бесконечно малые

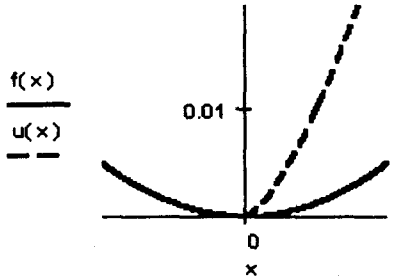
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{p(x)} \to \frac{1}{2}$$

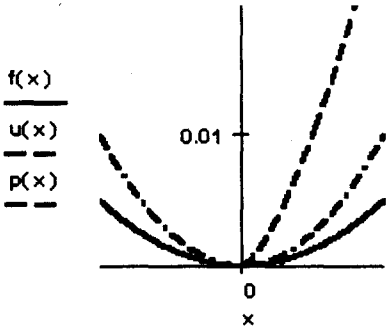
f(x)=O(p(x))
f(x) и p(x) бесконечно малые одного порядка малости



$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{u(x)} \to 0$$

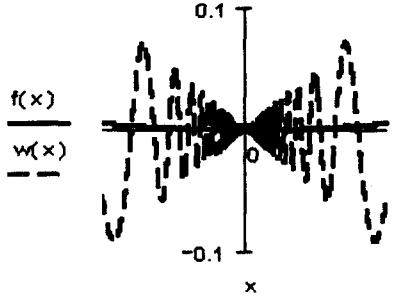
f(x)=o(u(x))
f(x) более высокого порядка малости, чем u(x)





$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{w(x)} \to \text{undefined}$$

f(x) и w(x) несравнимы



ЗАДАНИЕ 3.3

Сравните бесконечно малые в нуле функции. Постройте графики функций в окрестности предельной точки.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Определите все заданные функции.

3. Вычислите аналитически пределы функций в нуле, чтобы убедиться в том, что все заданные функции — бесконечно малые в указанной точке.
4. Сравните заданные бесконечно малые функции, вычислив пределы их отношений в нуле.
5. Сформулируйте и запишите в рабочем документе вывод.
6. Постройте графики всех заданных функций, подтверждающие сходство и различие поведения бесконечно малых в окрестности предельной точки.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий исследование бесконечно малых в нуле функций, приведен выше.

3.4 КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК РАЗРЫВА. ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИИ НА ГРАНИЦАХ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Непрерывность и разрывы функции. Классификация разрывов

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на некотором промежутке $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in (a, b)$, если предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция, непрерывная в каждой точке промежутка (a, b), называется *непрерывной на промежутке*. Если функция $f(x)$ определена на промежутке (a, b), $b > a$, то при исследовании поведения функции в окрестности точки a имеет смысл говорить о пределе функции $f(x)$ в точке a справа, а при исследовании в окрестности точки b — о пределе функции $f(x)$ в точке b слева*. Число A называется *пределом справа функции* $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, существует такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $a < x < a + \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В таких случаях говорят "*предел справа функции* $f(x)$ *в точке* a" и обозначают $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$.

*Пределы слева и справа называют *односторонними* пределами в точке.

Аналогично, говорят "*предел слева функции $f(x)$ в точке b*" и обозначают $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = B$, если для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, существует такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $b - \delta < x < b$, справедливо неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Для существования предела функции в точке необходимо и достаточно, чтобы существовали и совпадали односторонние пределы функции в этой точке.

По той же схеме вводится понятие непрерывности слева и непрерывности справа. Функция, определенная на отрезке $[a, b]$, $b > a$, непрерывна справа в точке a, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, и непрерывна слева в точке b, если $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$. Для того чтобы функция была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы односторонние пределы функции в точке совпадали со значением функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Если хотя бы одно из равенств нарушается, говорят о *разрыве* в точке x_0.

Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и односторонние пределы конечны, то разрыв в точке x_0 называется *устранимым**. Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = B$, $A \neq B$, и оба односторонних предела конечны, то говорят о *скачке* функции в точке. Устранимый разрыв и скачок называются *разрывами первого рода.*

Если один из односторонних пределов бесконечен или не существует, то разрыв называется разрывом *второго рода***.

Так же, как для предела и непрерывности, говорят о *разрыве слева* и *разрыве справа.*

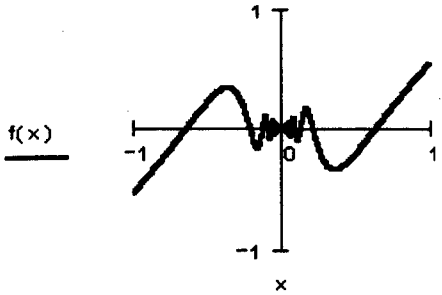
Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий аналитическое и графическое исследование разрывов функции.

$$f(x) := x\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \to 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) \to 0$$

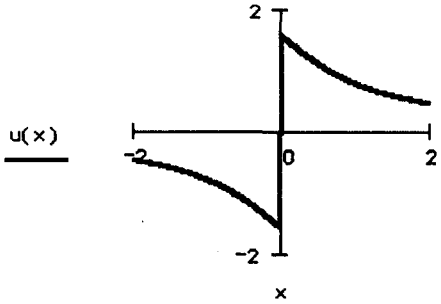
*В этом случае, если положить значение функции в точке равным значению односторонних пределов, функция станет непрерывной в точке.

**Если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен, то говорят о *бесконечном разрыве.*



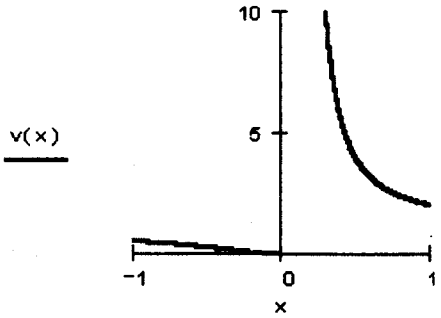
$$u(x) := \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x \to 0} u(x) \to \text{undefined}$$

$$\lim_{x \to 0^+} u(x) \to \frac{1}{2}\cdot\pi \qquad \lim_{x \to 0^-} u(x) \to \frac{-1}{2}\cdot\pi$$



$$v(x) := 2^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x \to 0} v(x) \to \text{undefined}$$

$$\lim_{x \to 0^+} v(x) \to \infty \qquad \lim_{x \to 0^-} v(x) \to 0$$



ЗАДАНИЕ 3.4

Найдите точки разрыва заданных функций и определите их тип.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали.
2. Определите выражение для функции.
3. Вычислите предел функции в точке разрыва.
4. Вычислите односторонние пределы функции в точке разрыва.
5. Постройте график функции в окрестности точки разрыва.
6. Сформулируйте вывод.
7. Выполните вычисления пп. 2–6 для всех функций из задания.

Пример выполнения задания

Вариант исследования разрывов функций $f(x) = x\cos(1/x)$, $u(x) = \operatorname{arctg}(1/x)$, $v(x) = 2^{1/x}$ приведен выше. Все три функции имеют разрыв в точке $x = 0$. Функция $f(x) = x\cos(1/x)$ имеет в нуле устранимый разрыв. Положив $f(0) = 0$, получим непрерывную функцию. Функция $u(x) = \operatorname{arctg}(1/x)$ имеет в нуле скачок. Функция $v(x) = 2^{1/x}$ имеет в нуле разрыв второго рода, поскольку бесконечен предел в нуле справа.

Непрерывные функции. Свойства непрерывных функций

Для функции, непрерывной *на отрезке* $[a, b]$, справедливы следующие утверждения.

1. Функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений*, т.е. на отрезке $[a, b]$ существуют точки x_m, x_M такие, что

$$f(x_m) = \min_{x\in[a,b]} f(x) = m, \quad f(x_M) = \max_{x\in[a,b]} f(x) = M,$$

$$m \le f(x) \le M, \quad \forall x \in [a, b].$$

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах значения разных знаков, то на интервале (a, b) существует точка c, в которой функция обращается в нуль**, т.е. если $f(a)f(b) < 0$, то существует такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = 0$.

*Это утверждение называется *теоремой Вейерштрасса.*

**Это утверждение называется *первой теоремой Больцано — Коши.*

Второе из этих утверждений применяют для *отделения корней* уравнений $f(x) = 0$ с непрерывной левой частью: если найден отрезок, на концах которого функция принимает значения разных знаков, то можно утверждать, что на этом отрезке есть хотя бы один корень уравнения.

ЗАДАНИЕ 3.5

Найдите (аналитически и графически) точки, в которых достигаются наибольшее и наименьшее значения заданной на отрезке непрерывной функции. Найдите нуль функции на заданном отрезке, т.е. решите уравнение $f(x) = 0$.

Порядок выполнения задания

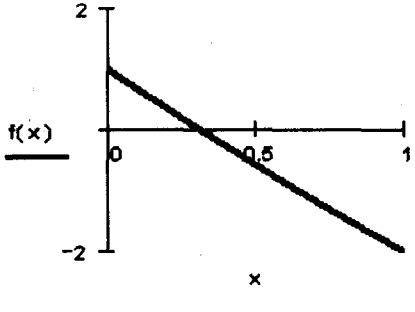
1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали.
2. Определите выражение для функции.
3. Постройте график функции.
4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
5. Решите уравнение $f(x) = 0$, используя функцию root, выбрав в качестве нулевого приближения сначала левый, а потом правый конец заданного отрезка.

Пример выполнения задания

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2^x - 4x$ на отрезке $[0, 1]$; решите на этом отрезке уравнение $2^x - 4x = 0$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий соответствующие графики и вычисления.

$f(x) := 2^x - 4 \cdot x$



$m := f(1) \quad m = -2$

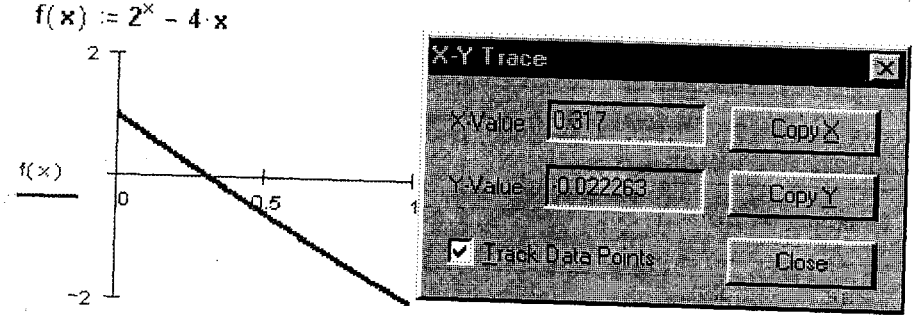
$M := f(0) \quad M = 1$

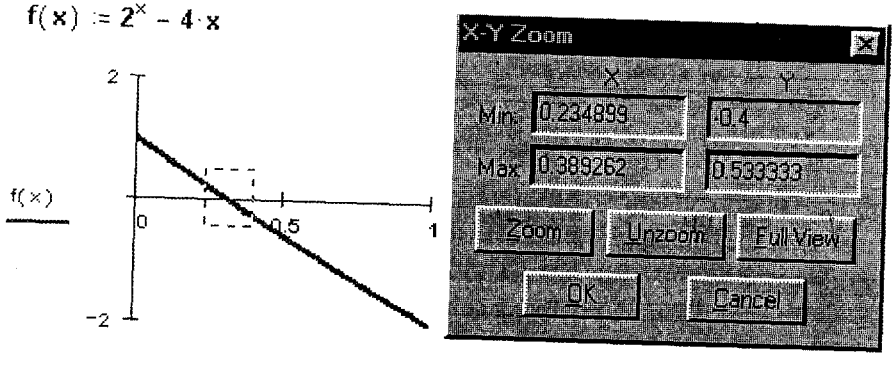
$x := 0 \quad root(2^x - 4 \cdot x, x) = 0.31$

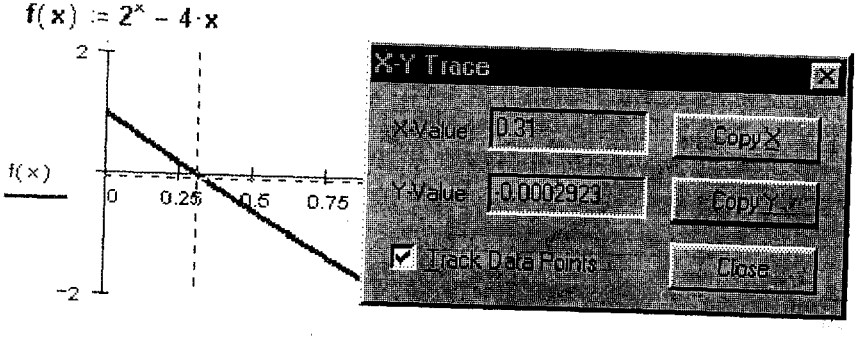
$x := 1 \quad root(2^x - 4 \cdot x, x) = 0.31$

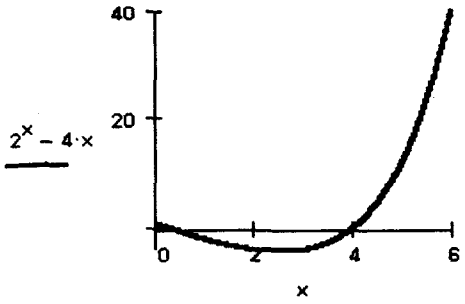
Указание. Функция, рассмотренная в примере, непрерывна на отрезке и монотонно убывает на нем. Наибольшего значения функция достигает в левом конце отрезка, в точке $x = 0$, наименьшего — в правом конце, в точке $x = 1$. Для вычисления нуля функции на отрезке используйте встроенную функцию root(f, x). Перед обращением к root(f, x) необходимо присвоить переменной x начальное значение. В приведенном фрагменте корень вычислялся дважды, в качестве начального приближения использованы сначала левый, а потом правый конец отрезка. Для того чтобы найти корень уравнения графически, используйте операцию вычисления координат точки на кривой. Более точные значения координат корня можно получить, увеличив график в окрестности корня, с помощью операции **Zoom** пункта **Graph** меню **Format**.

Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, в котором приведены результаты соответствующих операций и график функции на промежутке $(0, 6)$.









Из приведенного графика видно, что на концах отрезка $[2, 6]$ функция принимает значения разных знаков и имеет нуль в точке $x = 4$, принадлежащей этому промежутку.

3.5
ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке (a, b), точка x_0 — произвольная точка из области определения функции*. Обозначим через $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ приращение функции в точке x_0, вызванное приращением Δx независимой переменной x. Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, $x_0 \in (a, b)$, называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x_0)$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Здесь $f'(x_0)$ — производная функции в точке $x_0 \in (a, b)$.

ЗАДАНИЕ 3.6

Найдите по определению производную функции $f(x)$. Вычислите значение производной в указанной точке.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.
2. Определите функцию.
3. Определите приращение функции в указанной точке.

*Возможно $(a, b) = (-\infty, \infty)$, $(a, b) = (a, \infty)$ или $(a, b) = (-\infty, b)$.

4. Вычислите предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю.
5. Вычислите производную аналитически.

Пример выполнения задания

Найдите в точке $x = 0$ производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Поскольку $f(0) = 0$, то приращение функции $\Delta f(x)$ в точке $x = 0$ равно $\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) - f(0) = f(\Delta x)$.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащего необходимые вычисления, приведен ниже.

Значение функции при x, отличном от нуля

$$f(x) := \frac{\cos(x) - \cos(3 \cdot x)}{x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} \to 4$$

Производная функции f(x) в точке x=0 существует и равна 4

f'(x) = 4

Указание. Символ приращения Δ выберите в панели греческого алфавита. Предел вычисляется средствами символьной математики пакета. Для того чтобы вычислить производную с использованием меню символьных операций, введите выражение дифференцируемой функции, выделите переменную x и щелкните по строке **Differentiate** в строке **Variable** меню **Symbolics** (рис. 3.15). Можно поступить по-другому. Щелкнув по кнопке $\boxed{\int \frac{dy}{dx}}$, разверните панель инструментов **Calculus** (Анализ), щелкните в ней по кнопке дифференцирования $\boxed{\frac{d}{dx}}$, введите имя функции и переменной в помеченных позициях, выделите выражение и нажмите на клавиатуре комбинацию клавиш <Shift>+<F9>.

Односторонние производные

Если $f(x)$ определена при $x \geq x_0$, то можно определить *правую производную* функции $f(x)$ в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0), \quad \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x > 0.$$

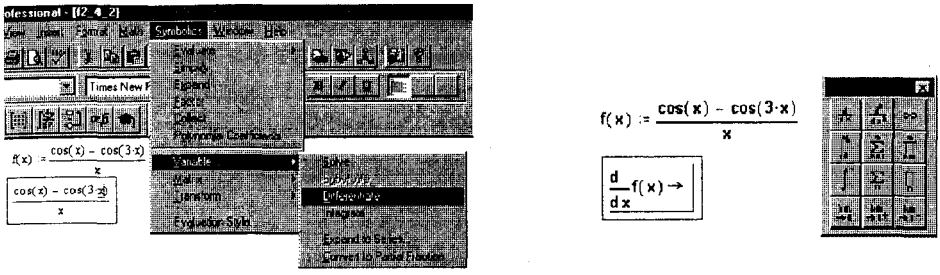


Рис. 3.15. Символьное дифференцирование

Аналогично определяется *левая производная* функции $f(x)$ в точке x_0, если $f(x)$ определена при $x \le x_0$:

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0), \quad \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x < 0.$$

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда в точке x_0 совпадают ее левая и правая производные: $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

ЗАДАНИЕ 3.7

Вычислите производную функции $f(x)$ по определению. Найдите значение производной функции в указанных точках. Вычислите по определению односторонние производные функции $g(x) = |f(x)|$ в указанных точках. Постройте графики обеих функций и объясните различие поведения функций в окрестности указанной точки.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.
2. Найдите производную от функции $f(x)$ как предел отношения приращения функции к приращению аргумента.
3. Вычислите значения производной в указанных точках.
4. Попытайтесь так же найти производную функции $g(x)$.
5. Вычислите по определению производную и односторонние производные функции $g(x)$ в указанной точке. Сравните полученные значения.
6. Постройте графики функций $f(x)$ и $g(x)$.

Пример выполнения задания

Вычислите производную функции $f(x) = x^2 - 4$ по определению. Найдите значение производной функции в точках $x_0 = \pm 2$. Вычислите в

указанных точках по определению односторонние производные функции $g(x) = |x^2 - 4|$. Постройте графики обеих функций и объясните различие поведения функций в окрестности указанной точки. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{((x+\Delta x)^2 - 4) - (x^2 - 4)}{\Delta x} \to 2\cdot x$$

Производная функции 2x
f'(x)=2x, f'(1)=2, f'(2)=4

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|(x+\Delta x)^2 - 4| - |x^2 - 4|}{\Delta x} \to \text{undefined}$$

Производная функции в произвольной точке x не может быть найдена

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|(1+\Delta x)^2 - 4| - |1^2 - 4|}{\Delta x} \to -2$$

В точке x=1 производная функции равна -2

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|(1+\Delta x)^2 - 4| - |1^2 - 4|}{\Delta x} \to -2$$

В точке x=1 существует правая производная, ее значение -2

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|(1+\Delta x)^2 - 4| - |1^2 - 4|}{\Delta x} \to -2$$

В точке x=1 существует левая производная, ее значение -2

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|(1+\Delta x)^2 - 4| - |1^2 - 4|}{\Delta x} \to -2$$

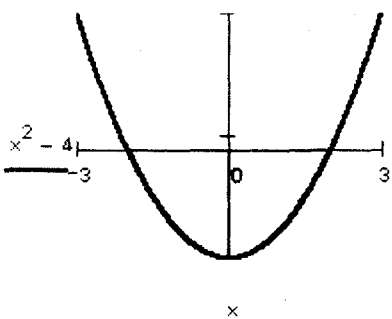
В точке x=2 производная не существует

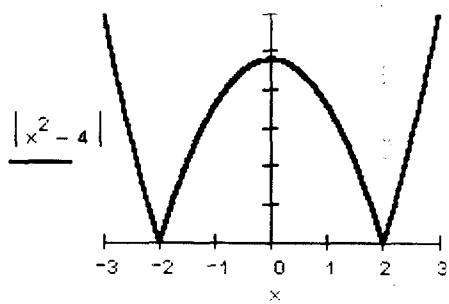
$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|(2+\Delta x)^2 - 4| - |2^2 - 4|}{\Delta x} \to 4$$

В точке x=2 существует правая производная, ее значение 4

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|(2+\Delta x)^2 - 4| - |2^2 - 4|}{\Delta x} \to -4$$

В точке x=2 существует левая производная, ее значение -4





Приведенные графики исследуемых функций подтверждают результаты вычислений: функция $f(x) = x^2 - 4$ — гладкая* всюду, а функция $g(x) = |x^2 - 4|$ теряет гладкость в точках $x = \pm 2$.

Геометрический смысл производной

Пусть $f(x)$ — функция, определенная на промежутке (a, b). Прямая, проходящая через точки $\big(x_0, f(x_0)\big)$, $\big(x_1, f(x_1)\big)$, $x_0, x_1 \in (a, b)$, $x_0 \neq x_1$, называется *секущей графика функции* $f(x)$.

Угловой коэффициент k секущей равен $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, и ее уравнение имеет вид

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Касательной к графику функции $f(x)$ в точке $\big(x_0, f(x_0)\big)$ называется предельное положение секущей, проходящей через точки $\big(x_0, f(x_0)\big)$, $\big(x_1, f(x_1)\big)$, когда $x_1 \to x_0$.

Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке, $k = f'(x_0)$, и уравнение касательной имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

ЗАДАНИЕ 3.8

Для функции $f(x)$ из предыдущего задания покажите, что касательная, проходящая через точку $\big(a, f(a)\big)$, — предельное положение секущей. Для функции $g(x) = |f(x)|$ покажите, что у секущих, проходящих через точки $\big(b, f(b)\big)$, $\big(x_1, f(x_1)\big)$, $x_1 > b$, и $\big(b, f(b)\big)$, $\big(x_2, f(x_2)\big)$, $x_2 < b$, — разные предельные положения.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.
2. Определите функцию $f(x)$.
3. Найдите производную функции $f(x)$ и вычислите ее значение в точке $x = a$.
4. Запишите уравнение касательной в точке $x = a$: $y(x) = k(x - a) + f(a)$, $k = f'(a)$.
5. Определите угловой коэффициент секущей k_s, проходящей через точки $\big(x_0, f(x_0)\big)$, $\big(x_1, f(x_1)\big)$, где $x_0 = a$, а $x_1 = a - \frac{1}{n}$ при $n = 1$.

**Гладкой* называют функцию, имеющую непрерывную производную в области определения.

6. Запишите уравнение секущей: $y_s(x) = k_s(x-a) + f(a)$.
7. Постройте график функции $f(x)$, а также касательную и секущую — графики функций $y(x)$ и $y_s(x)$.
8. Исследуйте поведение секущей, увеличивая значение n (при $n \to \infty$ $x_1 = a - \frac{1}{n} \to a$; с изменением n на графике автоматически перерисуется секущая). Выполните построение для нескольких значений n.
9. Выполните вычисления пп. 4–7 для функции $g(x)$. Секущие следует строить для $x_1 = a - \frac{1}{n}$ и $x_1 = a + \frac{1}{n}$.

Пример выполнения задания

Для функции $f(x) = x^4 - 1$ из задания 3.8 покажите, что касательная, проходящая через точку $(1, f(1))$, — предельное положение секущей. Для функции $g(x) = |x^4 - 1|$ покажите, что у секущих, проходящих через точки $(b, f(b))$, $(x_1, f(x_1))$, $x_1 > b$, и $(b, f(b))$, $(x_2, f(x_2))$, $x_2 < b$, разные предельные положения. На рис. 3.16 приведены графики функции $f(x)$, касательных к нему и секущих, построенных для $n = 1, 2, 4, 10$.

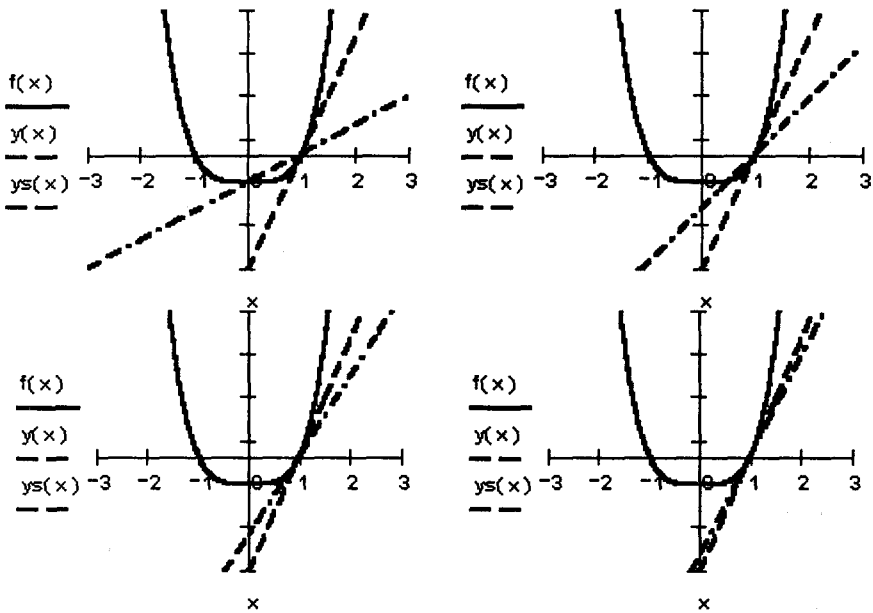
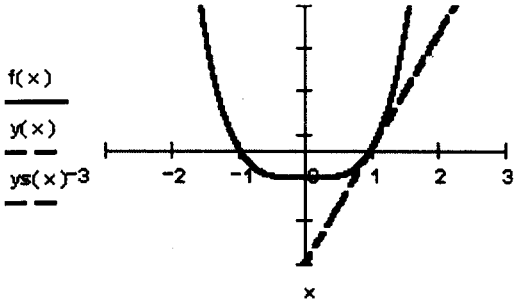


Рис. 3.16. Касательные и секущие графика гладкой функции

Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, в котором выполнены все вычисления и построен график функции и секущая при $n = 100$.

$$f(x) := x^4 - 1 \qquad \frac{d}{dx}f(x) \rightarrow 4\cdot x^3 \qquad k := 4\cdot 1^3 \qquad y(x) := k\cdot(x-1) + f(1)$$

$$n := 100 \qquad x1 := 1 - \frac{1}{n} \qquad ks := \frac{f(x1) - f(1)}{x1 - 1} \qquad ys(x) := ks\cdot(x-1) + f(1)$$



На рис. 3.17 представлены графики функции $g(x)$, касательная к нему и секущие, построенные для $n = 1, 2, 10$.

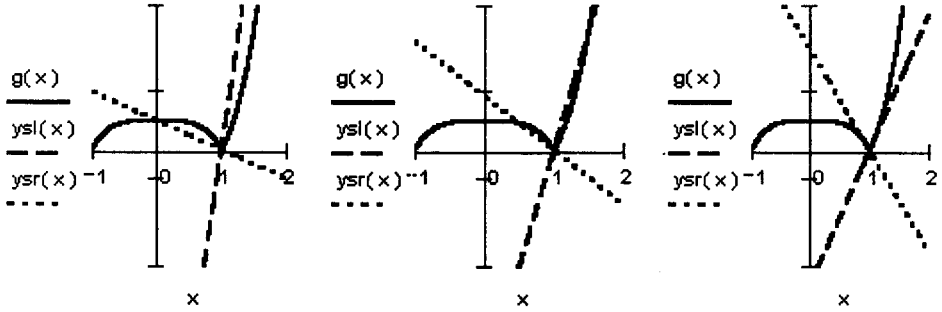


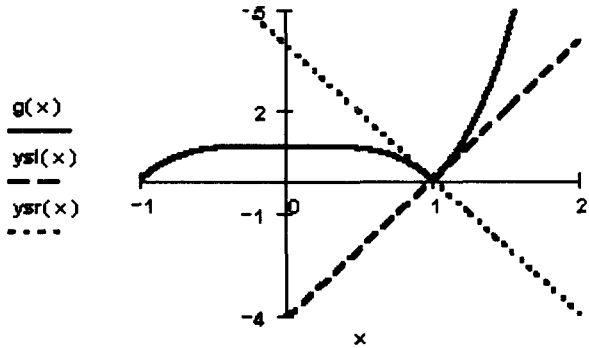
Рис. 3.17. Касательные и секущие к графику функции $g(x)$

Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, в котором приведены все необходимые вычисления, график функции, касательная к нему и секущая, построенная при $n = 100$.

$$g(x) := \left| x^4 - 1 \right| \qquad n := 100$$

$$x1l := 1 + \frac{1}{n} \qquad ksl := \frac{g(x1l) - g(1)}{x1l - 1} \qquad ysl(x) := ksl\cdot(x-1) + g(1)$$

$$x1r := 1 - \frac{1}{n} \qquad ksr := \frac{g(x1r) - g(1)}{x1r - 1} \qquad ysr(x) := ksr\cdot(x-1) + g(1)$$



Приведенные выше графики объясняют геометрический смысл односторонних производных. Он заключается в следующем. Пусть непрерывная функция $g(x)$ не имеет производной в точке x_0, но в этой точке определены односторонние производные $g'_+(x_0)$ и $g'_-(x_0)$. Тогда предельное положение секущей $y = \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} + g(x_0)$ при $x_1 \to x_0$, $x_1 > x_0$ (x_1 стремится к x_0 справа) есть прямая с угловым коэффициентом, равным значению $g'_+(x_0)$ правой производной функции $g(x)$ в точке x_0. Эта прямая проходит через точку $(x_0, g(x_0))$ и пересекает график функции только в одной этой точке. Такую прямую можно назвать "правой касательной" к графику функции (на приведенных выше графиках она нарисована пунктиром). Аналогично предельное положение секущей $y = \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0} + g(x_0)$ при $x_1 \to x_0$, $x_1 < x_0$ (x_1 стремится к x_0 слева) есть "левая касательная" к графику функции (на приведенных выше графиках она изображена точечной линией).

3.6 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Вертикальные и наклонные асимптоты

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на промежутке (a, b). Характер поведения функции в области определения* можно исследовать, опираясь на следующие утверждения:

- если $f(x_0) = 0$, то график функции в точке x_0 пересекает ось абсцисс;
- если $0 \in (a, b)$, то график функции пересекает ось ординат в точке $y_0 = f(0)$;

*Возможно $(a, b) = (-\infty, \infty)$, $(a, b) = (a, \infty)$ или $(a, b) = (-\infty, b)$.

- если в точке $x_0 \in (a, b)$ функция имеет бесконечный разрыв, то график функции имеет вертикальную асимптоту* $x = x_0$;
- если $(a, b) = (-\infty, \infty)$, $(a, b) = (a, \infty)$ или $(a, b) = (-\infty, b)$, существуют и конечны пределы $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - kx\big)$, то прямая $y = kx + b$ — асимптота графика функции при $x \to +\infty$; аналогично находят асимптоту при $x \to -\infty$;
- если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$, то график функции имеет на левой границе области определения вертикальную асимптоту $x = a$. Аналогично, если $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \pm\infty$, то график функции имеет на правой границе области определения вертикальную асимптоту $x = b$;
- если $(a, b) = (-\infty, \infty)$ и существует такое число $T \neq 0$, что $f(x+T) = f(x)$ для любого $x \in (-\infty, \infty)$, то исследуемая функция периодична с периодом T; в этом случае достаточно построить график функции на промежутке $(0, T)$ и доопределить его по периодичности на всю числовую ось;
- если $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in (-a, a)$, то исследуемая функция четная. В этом случае график симметричен относительно оси ординат; достаточно построить график функции на промежутке $(0, a)$ и отобразить его симметрично относительно оси ординат на промежуток $(-a, 0)$;
- если $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in (-a, a)$, то исследуемая функция нечетная; в этом случае график симметричен относительно начала координат; достаточно построить график функции на промежутке $(0, a)$, а затем отобразить его на промежуток $(-a, 0)$ симметрично относительно начала координат.

ЗАДАНИЕ 3.9

Изобразите график заданной функции и подтвердите построение аналитическим исследованием: найдите координаты точек пересечения с координатными осями; найдите и постройте наклонные асимптоты. Запишите уравнения вертикальных асимптот.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.

*Если расстояние от точки кривой до некоторой определенной прямой по мере удаления точки в бесконечность стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой. В случае бесконечного разрыва расстояние от кривой до *вертикальной асимптоты* $x = x_0$ стремится к нулю при $x \to x_0$ справа, слева или с обеих сторон.

2. Определите функцию $f(x)$ и постройте ее график.
3. Найдите точку пересечения с осью ординат, вычислив $f(0)$. Сравните с данными на графике.
4. Найдите точку пересечения с осью абсцисс, решив уравнение $f(x) = 0$. Сравните с данными на графике.
5. Найдите точки разрыва функции, вычислите соответствующие односторонние пределы, запишите уравнения вертикальных асимптот. Сравните с данными на графике.
6. Вычислите пределы $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big)$; изобразите прямую $y = kx + b$.
7. Покажите, что равен нулю предел на бесконечности расстояния d от точки на кривой до наклонной асимптоты $(d \le |f(x) - (kx + b)|)$.

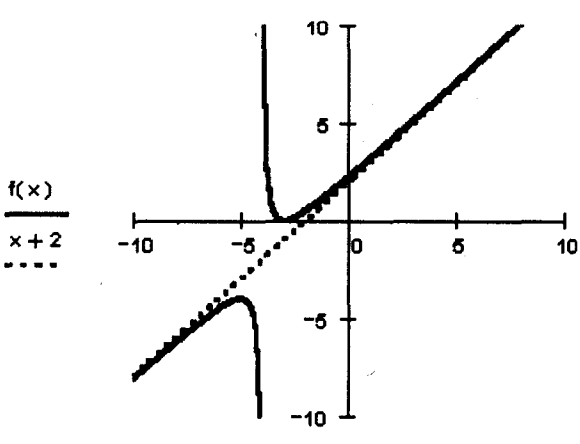
Пример выполнения задания

Постройте график и проверьте построение аналитическим исследованием для функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 4}.$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и графиками приведен ниже.

$$f(x) := \frac{x^2 + 6\cdot x + 9}{x + 4}$$



$$f(0) = 2.25 \qquad \frac{x^2 + 6\cdot x + 9}{x + 4} \qquad \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$k := \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \to 1 \qquad k = 1$$

$$b := \lim_{x \to \infty} (f(x) - x) \to 2 \qquad b = 2$$

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) \to \infty \qquad \lim_{x \to -4^-} f(x) \to -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} |f(x) - (x+2)| \to 0$$

Исследование функции с помощью производной

Если функция дифференцируема на промежутке (a, b), за исключением, быть может, конечного числа точек этого промежутка, то можно дополнить изучение поведения функции исследованием на экстремум*, используя следующие утверждения.

Для того чтобы дифференцируемая на (a, b) функция не убывала (не возрастала) на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на (a, b).

Пусть в точке $x = x_0$ производная $f'(x_0) = 0$. Если существует окрестность точки x_0 такая, что в этой окрестности $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то функция имеет в точке x_0 максимум. Если же $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то функция имеет в точке x_0 минимум**.

На рис. 3.18 изображены график функции $f(x) = 2 - 3x^2 - x^3$, имеющей максимум и минимум, и график ее производной, иллюстрирующие приведенные утверждения.

Если непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ дифференцируема на $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, при этом $f'(x) > 0$ на (a, x_0) и $f'(x) < 0$ на (x_0, b), то функция имеет в точке x_0 максимум; если же $f'(x) < 0$ на (a, x_0) и $f'(x) > 0$ на (x_0, b), то функция имеет в точке x_0 минимум.

На рис. 3.19 изображены график функции $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 4x + 3)^2}$, имеющей максимум и минимум, и график ее производной, иллюстрирующие последнее утверждение.

---

*Точки максимума и точки минимума функции имеют общее название — *точки экстремума*.

**В этих случаях говорят, что *производная меняет знак при переходе через точку* $x = x_0$.

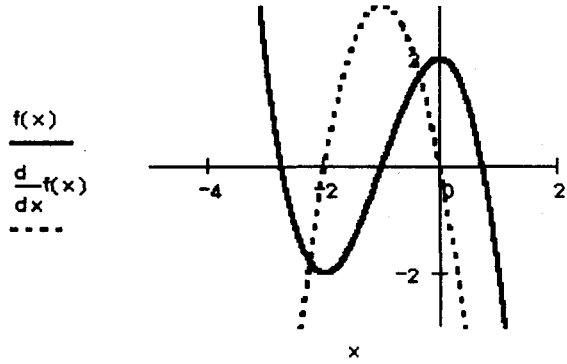


Рис. 3.18. Максимум и минимум дифференцируемой функции

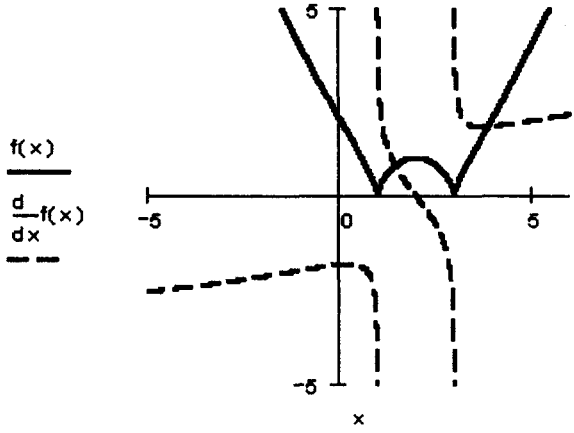


Рис. 3.19. График функции $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 4x + 3)^2}$

ЗАДАНИЕ 3.10

Изобразите график заданной функции и подтвердите построение аналитическим исследованием: постройте график производной, найдите нули производной. Найдите координаты точек экстремума.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.
2. Определите функцию $f(x)$ и постройте ее график.
3. Постройте график производной.
4. Найдите нули производной, решив уравнение $f'(x) = 0$.
5. Вычислите и запишите координаты точек экстремума. Укажите их тип (максимум/минимум).

Пример выполнения задания

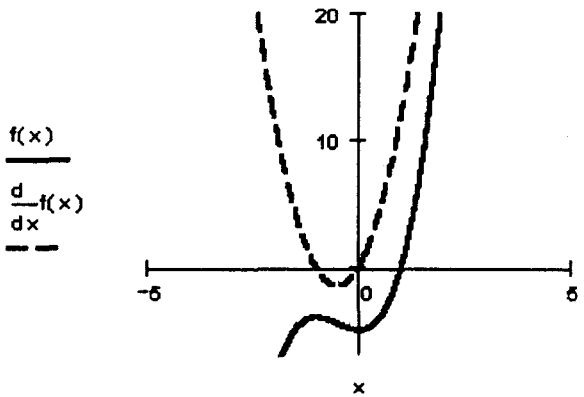
Постройте график и подтвердите построение аналитическим исследованием для функции

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5.$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и графиками приведен ниже.

$f(x) := 2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 5$ $\qquad$ $f1(x) := \frac{d}{dx}f(x)$

$2\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 5$ $\qquad$ $6\cdot x^2 + 6\cdot x$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$



$f1(-1) = 0$ $\qquad$ $f(-1) = -4$ $\qquad$ **Точка максимума** $(-1, -4)$

$f1(0) = 0$ $\qquad$ $f(0) = -5$ $\qquad$ **Точка минимума** $(0, -5)$

Указание. Для того чтобы вычислить точно координаты экстремумов, вычислите аналитически производную, затем найдите нули производной (выделите переменную x и щелкните по строке **Solve** пункта **Variable** в меню **Symbolics**); вычислите для проверки значения производной и функции в найденных точках.

Исследование функции с использованием второй производной

Если функция дважды дифференцируема на промежутке (a, b), за исключением, быть может, конечного числа точек этого промежутка, то исследование поведения функции можно дополнить исследованием выпуклости и вогнутости.

График функции $f(x)$ называется выпуклым (выпуклым вниз) на промежутке (a, b), если он расположен выше касательной, проведенной

в любой точке $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$. Если же график функции лежит ниже касательной, то он называется вогнутым (выпуклым вверх).

Справедливо следующее утверждение. Если дважды дифференцируемая на промежутке (a, b) функция $f(x)$ имеет на нем положительную вторую производную, то функция выпукла на (a, b). Если же вторая производная отрицательна на промежутке (a, b), то функция на нем вогнута.

Если вторая производная равна нулю в точке $x = x_0$, а слева и справа от нее имеет значения разных знаков, то точка $x = x_0$ — точка перегиба.

На рис. 3.20 представлен график функции с тремя точками перегиба.

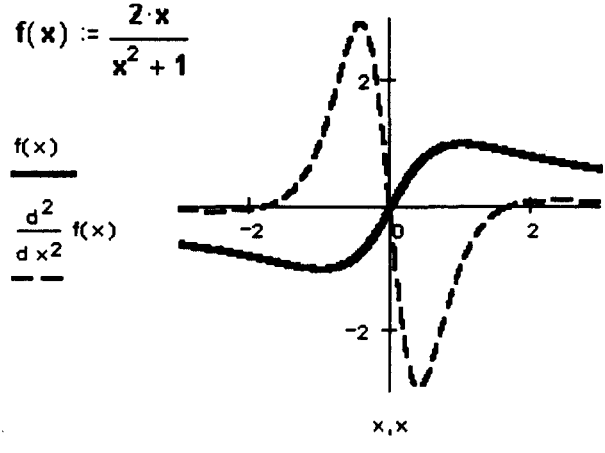


Рис. 3.20. График функции и ее второй производной

ЗАДАНИЕ 3.11

Изобразите график заданной функции и подтвердите построение аналитическим исследованием: постройте график второй производной, найдите нули второй производной. Найдите координаты точек перегиба.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Определите функцию $f(x)$ и постройте ее график.
3. Постройте график второй производной.
4. Найдите нули второй производной, решив уравнение $f''(x) = 0$.
5. Вычислите и запишите координаты точек перегиба.
6. Опишите интервалы выпуклости и вогнутости функции.

Пример выполнения задания

Постройте график и подтвердите построение аналитическим исследованием для функции

$$f(x) = -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2.$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и графиками приведен ниже.

$$f(x) := -\left(\frac{x}{x+2}\right)^2$$

$$-\left(\frac{x}{x+2}\right)^2 \qquad f(x)$$

$$-2\cdot\frac{x}{(x+2)^2} + 2\cdot\frac{x^2}{(x+2)^3} \qquad f'(x)$$

$$\frac{-2}{(x+2)^2} + 8\cdot\frac{x}{(x+2)^3} - 6\cdot\frac{x^2}{(x+2)^4} \qquad f''(x)$$

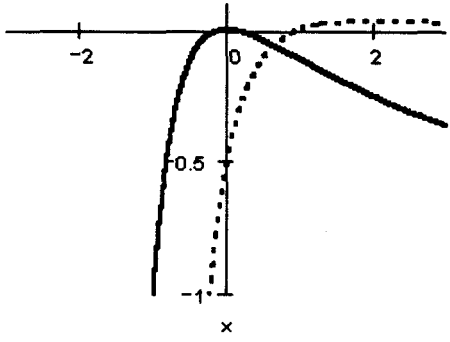
$$8\cdot\frac{(x-1)}{(x+2)^4}$$ **Упрощенное выражение f''(x)**

Упрощенное выражение f'(x) **f'(x)=0** **Точка максимума**

$$x\cdot\frac{(x+2)}{\left(x^2\cdot(x+3)\right)^{\left(\frac{2}{3}\right)}} \qquad -2 \qquad (-2, 1.587)$$

$f(-2) = 1.587$

$f(1) = -0.111$ **Точка перегиба (1, -0.111)**



Указание. На графике точка перегиба почти не видна. Однако аналитическое исследование — вычисление нуля второй производной, а также ее график подтверждают, что функция имеет перегиб при $x = 1$. В рассмотренном случае удобно установить режим отображения результатов по вертикали (пункт **Evaluation Style** в меню **Symbolics**). Тогда вычисления производятся следующим образом. Скопируйте в рабочий документ выражение для функции, выделите переменную, найдите первую производную, выделите переменную в выражении для первой производной и продифференцируйте таким же образом; в выражении для второй производной выделите переменную и найдите ее нуль, щелкнув по строке **Solve** в пункте **Variable** в меню **Symbolics**.

ЗАДАНИЕ 3.12

Постройте график функции и подтвердите изображение аналитическим исследованием.

Порядок выполнения задания

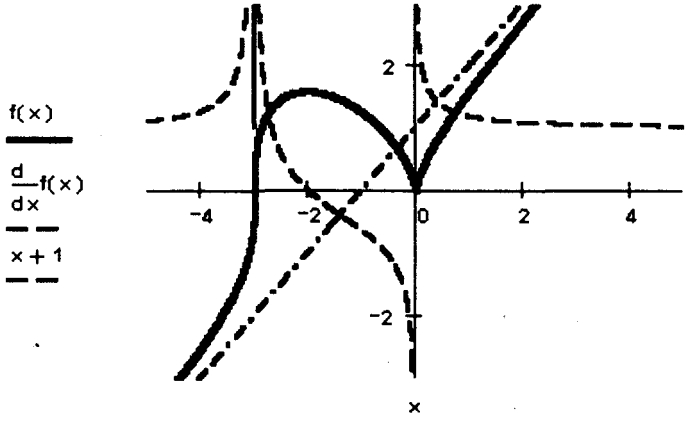
1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Определите функцию и постройте ее график.
3. Найдите наклонные асимптоты и изобразите их.
4. Постройте график первой производной и найдите точки экстремума.
5. Постройте график второй производной и найдите точки перегиба.

Пример выполнения задания

Постройте график функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$ и подтвердите изображение аналитическим исследованием.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

$$f(x) := \sqrt[3]{x^2 \cdot (x+3)}$$



$$k := \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \to 1 \qquad b := \lim_{x \to \infty} (f(x) - x) \to 1$$

$k = 1 \quad b = 1$ **Наклонная асимптота y=x+1**

f(x) **f'(x)**

$$\sqrt[3]{x^2 \cdot (x+3)} \qquad \frac{1}{\left[3 \cdot (x^2 \cdot (x+3))^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right]} \cdot (2 \cdot x \cdot (x+3) + x^2)$$

Упрощенное выражение f'(x) **f'(x)=0** **Точка максимума**

$$x \cdot \frac{(x+2)}{(x^2 \cdot (x+3))^{\left(\frac{2}{3}\right)}} \qquad -2 \qquad (-2, 1.587)$$

$f(-2) = 1.587$

f'(x) **Упрощенное выражение f''(x)**

$$x \cdot \frac{(x+2)}{(x^2 \cdot (x+3))^{\left(\frac{2}{3}\right)}} \qquad \frac{-2}{\left[(x+3) \cdot (x^2 \cdot (x+3))^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right]}$$

Знаменатель f''(x) **f''(x)=0 не существует** **Точка перегиба**

$$(x+3) \cdot (x^2 \cdot (x+3))^{\left(\frac{2}{3}\right)} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad f(-3) = 0 \qquad (-3, 0)$$

Указание. Из рабочего документа удалены громоздкие выражения для первой и второй производной, а приведены их упрощенные выражения. Для того чтобы упростить выражение производной, выделите выражение и щелкните по строке **Simplify** меню **Symbolics**. При исследовании перегибов найдите точки, в которых вторая производная не существует — это нули ее знаменателя. Поскольку один из нулей знаменателя второй производной ($x = 0$) имеет кратность, равную двум, при переходе через него вторая производная не меняет знака. Функция имеет перегиб во второй точке ($x = -3$).

3.7 КРИВАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Кривые на плоскости, заданные в декартовых координатах

Кривая на плоскости в прямоугольных (декартовых) координатах — это множество точек, координаты которых (x, y) связаны одним из соотношений $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, $x = g(y)$, $y \in (c, d)$ или $F(x, y) = 0$; первые два соотношения задают кривую явно, последнее — неявно.

Кривая, заданная уравнением $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, называется *гладкой*, если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке (a, b). В каждой точке $(x_0, f(x_0))$ гладкой кривой можно провести касательную*, уравнение которой

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Уравнение *нормали* в той же точке имеет вид

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \qquad \text{или} \qquad x = f'(x_0)\big(y - f(x_0)\big) + x_0.$$

Кривая, заданная неявно уравнением $F(x, y) = 0$, называется *гладкой*, если на ней нет особых точек**. Уравнения касательной и нормали к такой кривой, проходящих через точку (x_0, y_0), $F(x_0, y_0) = 0$, имеют соответственно вид

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

и

$$F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

ЗАДАНИЕ 3.13

Изобразите линии, заданные в декартовых координатах явно уравнением $y = f(x)$ и неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Запишите уравнения касательной и нормали к каждой кривой в указанных точках и изобразите их на графике.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.
2. Определите функцию $f(x)$.
3. Запишите уравнение касательной, проходящей через заданную точку, в виде, разрешенном относительно переменной y.
4. Запишите уравнение нормали, проходящей через заданную точку, в виде, разрешенном относительно переменной y.
5. Постройте график функции и изобразите на нем касательную и нормаль.

---

*Понятие касательной к декартовой плоской кривой обсуждалось в разд. 3.5.

**Точка (x_0, y_0) линии $F(x, y) = 0$ называется *особой*, если в ней одновременно обращаются в нуль обе частные производные функции $F(x, y)$: $F'_x(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) = 0$.

6. Введите левую часть уравнения, задающего линию в неявной форме, и разрешите его относительно переменной y.
7. Определите функции, задающие явно части кривой, определенной в условии неявно.
8. Проверьте, лежат ли заданные точки на кривой и не являются ли они особыми.
9. Запишите уравнения касательной и нормали в каждой из точек в виде, разрешенном относительно переменной y.
10. Постройте графики функций, определенных в п. 7. Изобразите на тех же графиках касательные и нормали к ним.

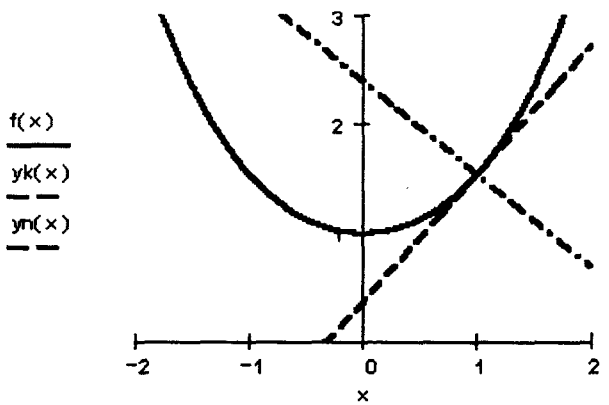
Пример выполнения задания

Постройте *цепную линию*, уравнение которой $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$, и касательную и нормаль к ней в точке $(1, \operatorname{ch} 1)$. Постройте *эллипс* $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ и касательные и нормали к нему в точках $\left(1, \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и графиками приведен ниже.

$$f(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad f1(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$k := f1(1) \qquad yk(x) := k \cdot (x - 1) + f(1) \qquad yn(x) := \frac{-1}{k}(x - 1) + f(1)$$



$$F(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 \qquad \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cdot\sqrt{-x^2+4} \\ \frac{-3}{2}\cdot\sqrt{-x^2+4} \end{bmatrix} \qquad y1(x) := \frac{3}{2}\cdot\sqrt{-x^2+4}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 \qquad\qquad y2(x) := \frac{-3}{2}\cdot\sqrt{-x^2+4}$$

Проверка принадлежности точек

$\left(1, \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(1, -\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$ **кривой**

$$\frac{1}{4} + \frac{(y1(1))^2}{9} - 1 = 0 \qquad y1(1) = 2.598 \qquad y2(1) = -2.598 \qquad \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2} = 2.598$$

Вычисление частных производных

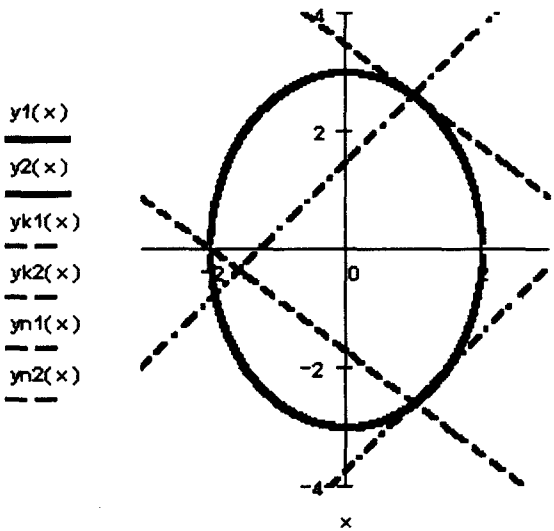
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 \qquad \frac{1}{2}\cdot x \qquad Fx(x,y) := \frac{1}{2}\cdot x \qquad kx := Fx\left(1, \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 \qquad \frac{2}{9}\cdot y \qquad Fy(x,y) := \frac{2}{9}\cdot y \qquad ky := Fy\left(1, \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$$

Уравнения касательных и нормалей

$$yk1(x) := y1(1) - \frac{kx}{ky}\cdot(x-1) \qquad yk2(x) := y2(1) - \frac{kx}{ky}\cdot(x-1)$$

$$yn1(x) := y1(1) + \frac{ky}{kx}\cdot(x-1) \qquad yn2(x) := y2(1) + \frac{ky}{kx}\cdot(x-1)$$



Указание. Все вычисления в этом примере выполняются так же, как и в предыдущих заданиях. Разрешите уравнение неявно заданной функции относительно переменной y. Для этого скопируйте левую часть уравнения (выражение для F(x, y)) в рабочий документ, выделите переменную y, затем щелкните по строке **Solve** в пункте **Variable** меню **Symbolics**. В рабочем документе будет отображен результат — два выражения. Определите две функции переменной x (в приведенном выше документе их имена y1(x) и y2(x)), присвоив каждой из них одно из

полученных выражений. Для того чтобы вычислить частные производные $F'_x(x,y)$ и $F'_y(x,y)$, скопируйте выражение для F(x, y) в рабочий документ, выделите переменную x, затем щелкните по строке **Differentiate** в пункте **Variable** меню **Symbolics** и присвойте полученное выражение функции Fx(x, y); аналогично, выделив переменную y, найдите частную производную по y и присвойте полученное выражение функции Fy(x, y).

Кривые на плоскости, заданные параметрически

Уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны при $t \in (\alpha, \beta)$, устанавливающие зависимость декартовых координат (x, y) точки плоскости от значения параметра $t \in (\alpha, \beta)$, определяют на плоскости кривую, *заданную в параметрической форме* (говорят еще: *заданную параметрически*).

Поскольку производная функции $y = f(x)$, заданной параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, в точке, которая не является особой* точкой кривой, вычисляется по формуле $y'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, то уравнения касательной и нормали к кривой, проходящих через точку $(x_0, y_0,) = \big(\varphi(t_0), \psi(t_0)\big)$, имеют соответственно вид:

$$y = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}\big(x - \varphi(t_0)\big) + \psi(t_0), \quad y = -\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}\big(x - \varphi(t_0)\big) + \psi(t_0).$$

ЗАДАНИЕ 3.14

Изобразите на плоскости кривую, заданную параметрически, и касательную и нормаль к ней в указанной точке.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов по горизонтали.
2. Определите функции, задающие кривую параметрически.
3. Найдите аналитически (символьно) производные обеих функций.
4. Запишите уравнения касательной и нормали в точках в виде функций переменной x.
5. Постройте график функции и изобразите на нем касательную и нормаль.

Пример выполнения задания

Для значений λ, равных 1, 0.5, 2, постройте *циклоиды* $x = t - \lambda \sin t$, $y = 1 - \lambda \cos t$, $t \in (0, 4\pi)$, а также касательные и нормали к ним в точке

*Точка $(x(t_0),\ y(t_0))$ *особая*, если $(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 \neq 0$.

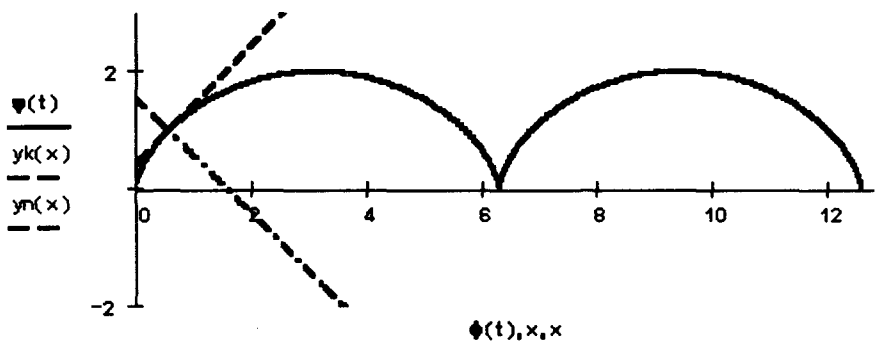
$\left(\frac{\pi}{2}-1,\ \frac{1}{\lambda}\right)$. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и графиками приведен ниже.

$$\lambda := 1 \qquad \phi(t) := t - \lambda\cdot\sin(t) \qquad \psi(t) := 1 - \lambda\cdot\cos(t)$$

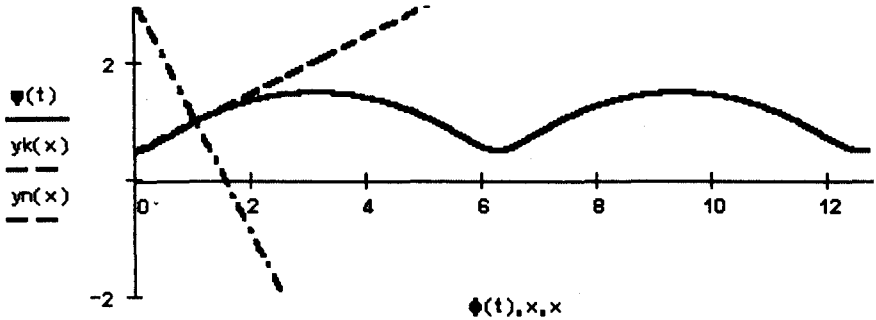
$$f1x(t) := \frac{d}{dt}\phi(t) \qquad f1y(t) := \frac{d}{dt}\psi(t)$$

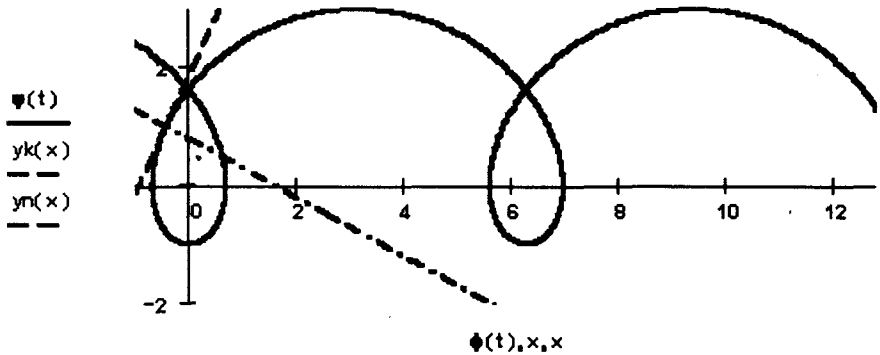
$$yk(x) := \frac{f1y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f1x\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\left(x - \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$yn(x) := -\frac{f1x\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f1y\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cdot\left(x - \phi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$



Указание. Для того чтобы построить график функции, заданной параметрически, введите в позиции, указанной меткой возле оси абсцисс, функцию, задающую значения аргумента (в рассматриваемом случае это $\phi(t)$), в позиции возле оси ординат — функцию, определяющую аргумент (в рассматриваемом случае это $\psi(t)$). Чтобы построить на том же графике функции аргумента x, введите в позиции для функции (через запятую) имена функции переменной x, а в позиции для аргумента, через запятую, — имя аргумента x. В приведенном фрагменте вычисления организованы таким образом, что для исследования циклоиды с другим значением параметра λ достаточно изменить значение параметра в правой части оператора присваивания в первой строке рабочего документа. Ниже приведены изображения циклоиды для $\lambda = 0.5$ и $\lambda = 2$.





Кривые на плоскости, заданные в полярных координатах

Декартовы координаты (x, y) точки на плоскости связаны с полярными координатами (r, φ) соотношениями $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Многие кривые на плоскости удобно описывать как функции радиуса-вектора и полярного угла — в полярных координатах. Так, уравнение единичной окружности в полярных координатах имеет вид $r = 1$. Уравнение кривой в полярных координатах обычно имеет вид $r = r(\varphi)$. Угловой коэффициент касательной к графику функции, заданной уравнением $r = r(\varphi)$, в точке $\big(r(\varphi_0), \varphi_0\big)$ равен $\frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)}$, а декартовы координаты (x_0, y_0) точки $\big(r(\varphi_0), \varphi_0\big)$ равны соответственно $x_0 = r(\varphi_0)\cos\varphi_0$ и $y_0 = r(\varphi_0)\sin\varphi_0$.

ЗАДАНИЕ 3.15

Изобразите кривую, заданную в полярных координатах. Запишите уравнения касательной и нормали к ней.

Порядок выполнения задания

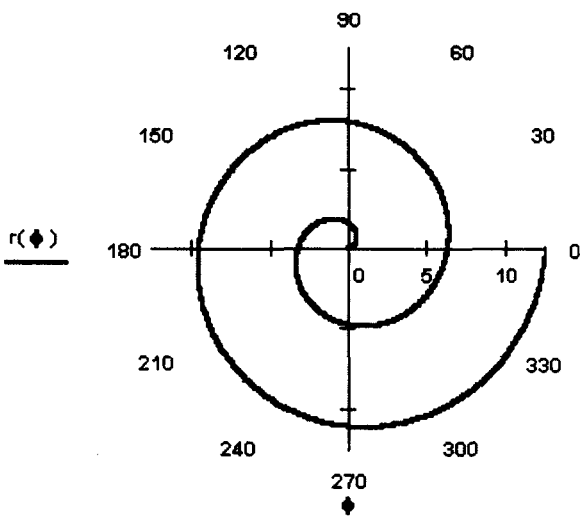
1. Установите режим автоматических вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.
2. Определите функцию $r = r(\varphi)$.

3. Изобразите в полярных координатах линию для значений φ из указанного в задании промежутка.
4. Найдите аналитически (символьно) производную $r1 = r'(\varphi)$.
5. Найдите аналитически выражение для углового коэффициента касательной.
6. Запишите в декартовых координатах уравнения касательной и нормали к кривой в указанной точке.
7. Выполните аналогичные построения для других значений параметров, изменив в рабочем документе соответствующие константы.

Пример выполнения задания

Изобразите *архимедовы спирали* $r = a\varphi$ для $a = 1, 0.5, 2$. Запишите уравнения касательных и нормалей к ним в точках $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и графиками приведен для $a = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ниже.

$a := 1 \qquad r(\phi) := a \cdot \phi$



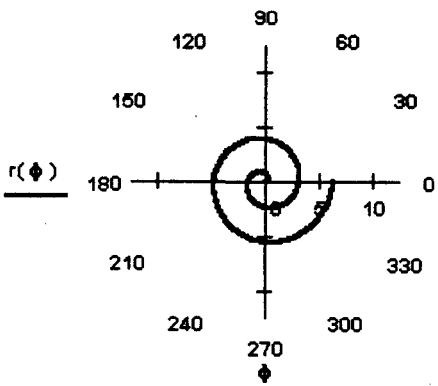
$r1(\phi) := \frac{d}{d\phi} r(\phi) \qquad tg(\phi) := \frac{r(\phi)}{r1(\phi)}$

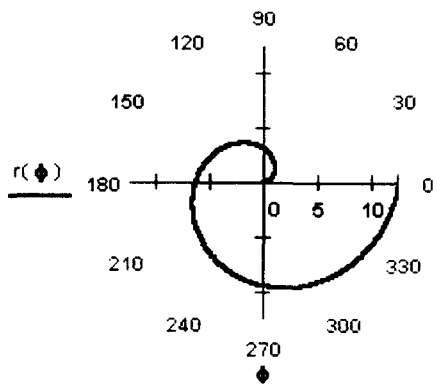
$\phi 0 := \frac{\pi}{4} \qquad r0 := r(\phi 0) \qquad k := tg(\phi 0)$

$x0 := r0 \cdot \cos(\phi 0)$ $\qquad$ $y0 := r0 \cdot \sin(\phi 0)$

$yk(x) := k \cdot (x - x0) + y0$ $\qquad$ $yn(x) := \frac{-1}{k} \cdot (x - x0) + y0$

Указание. Для того чтобы построить график спирали в полярных координатах для $\varphi \in [0, 4\pi]$, щелкните в панели инструментов графиков по кнопке. В открывшемся окне графиков введите имя функции в полярных координатах, в метке, расположенной в правом верхнем углу окна, введите наибольшее значение аргумента* (в приведенном фрагменте это значение равно 4π) и щелкните по рабочему полю вне окна графиков. Буквы греческого алфавита вставляйте щелчком мыши по кнопке с нужной буквой в панели греческого алфавита. Ниже изображены две архимедовы спирали, построенные в полярных координатах при различных значениях параметра a.





3.8
ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные всех порядков до n-го включительно. Тогда для $f(x)$ справедлива *формула Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big),$$

где $o\big((x - x_0)^n\big) = R_n(x)$ — *остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано*, являющийся при $x \to x_0$ бесконечно малой более высокого порядка малости чем $(x - x_0)^n$.

*По умолчанию полярный угол изменяется на промежутке $[0, 2\pi]$.

Положив $x_0 = 0$ и вычислив соответствующие производные в нуле, получим формулы Тейлора для основных элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

Если отбросить остаточный член, то получится приближенная формула Тейлора

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

правая часть которой называется *многочленом Тейлора* функции $f(x)$; его обозначают $T_n(x)$. Приближенная формула $f(x) \approx T_n(x)$ позволяет заменять в различных математических расчетах (аналитических и численных) произвольную функцию ее многочленом Тейлора. Из формулы Тейлора видно, что, чем точка x ближе к точке x_0, тем выше точность такой аппроксимации и эта точность растет с ростом степени многочлена. Это означает, в свою очередь, что, чем больше производных имеет функция в некоторой окрестности точки x_0, тем выше точность, с которой соответствующий многочлен Тейлора аппроксимирует функцию в этой окрестности.

В Mathcad многочлены Тейлора можно вычислить через меню символьных операций (**Expand to Series** в пункте **Variable** меню **Symbolics**) или с помощью панели математических инструментов (кнопка series в панели).

ЗАДАНИЕ 3.16

Запишите формулу Тейлора заданной функции. Исследуйте аналитически и графически зависимость погрешности приближенной формулы Тейлора от степени многочлена и от расстояния $|x - x_0|$. Исследуйте поведение остаточного члена формулы Тейлора. Выполните вычисления для функции $f(x)$ из задания 3.13.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов вычисления по горизонтали.
2. Определите функцию $f(x)$.
3. Запишите разложение функции по формуле Тейлора до указанного порядка k.
4. Определите многочлены Тейлора степени $n = 1, 2, \ldots, k$.
5. Постройте график функции и многочленов Тейлора степени $n = 1, 2, \ldots, k$.
6. Изобразите для этих степеней графики остаточных членов.

Пример выполнения задания

Исследуйте формулу Тейлора для функции $\sin x$ в окрестности нуля, вычисляя многочлены Тейлора до 7-й степени и соответствующие остаточные члены. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и графиками приведен ниже.

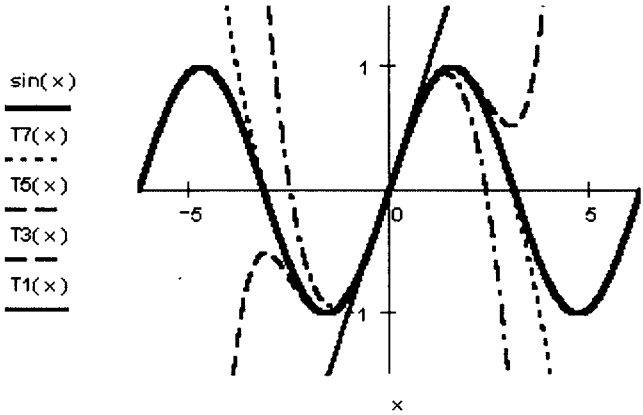
$$\sin(x) \qquad x - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{120}\cdot x^5 - \frac{1}{5040}\cdot x^7 + O(x^9)$$

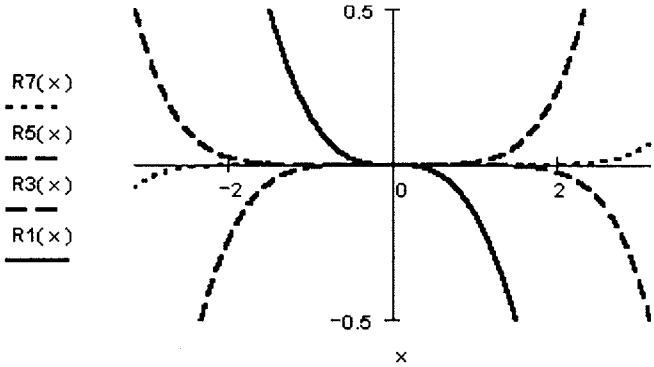
$$T7(x) := x - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{120}\cdot x^5 - \frac{1}{5040}\cdot x^7 \qquad R7(x) := \sin(x) - T7(x)$$

$$T5(x) := x - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{120}\cdot x^5 \qquad R5(x) := \sin(x) - T5(x)$$

$$T3(x) := x - \frac{1}{6}\cdot x^3 \qquad R3(x) := \sin(x) - T3(x)$$

$$T1(x) := x \qquad R1(x) := \sin(x) - T1(x)$$





Указание. Для того чтобы получить разложение функции по формуле Тейлора в окрестности нуля, введите функцию, выделите переменную x, щелкните по строке **Expand to Series** в пункте **Variable** меню **Symbolics** и укажите в окне диалога порядок остаточного члена (рис. 3.21). Затем определите многочлены Тейлора как функции переменной x и скопируйте в них нужное число слагаемых из вычисленного выражения. Остаточные члены определите как функции переменной x, равные разности функции и соответствующего многочлена Тейлора.

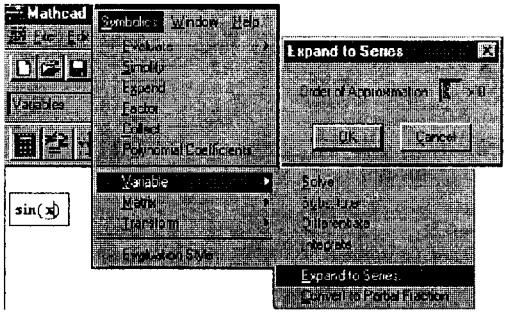


Рис. 3.21. Меню и окно ввода для разложения функции по формуле Тейлора

ЗАДАНИЕ 3.17

Запишите для заданной функции формулу Тейлора указанного порядка в окрестности точки x_0. Изобразите график функции и ее многочлена Тейлора.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов вычисления по горизонтали.
2. Определите функцию $f(x)$.
3. Выполните замену переменной $t = x - x_0$ и запишите полученную функцию переменной t.
4. Разложите функцию переменной t по формуле Тейлора в окрестности нуля.
5. Определите функцию переменной t, равную правой части формулы Тейлора, и выполните в ней замену $x = t + x_0$.
6. Постройте графики функции $f(x)$ и ее многочлена Тейлора.

Пример выполнения задания

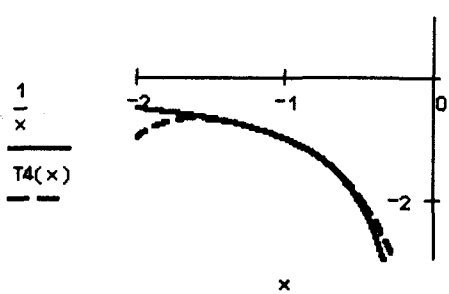
Запишите формулу Тейлора четвертого порядка для функции $f(x) = \frac{1}{x}\sin x$ в окрестности точки $x_0 = -1$. Постройте график функции и ее многочлена Тейлора в окрестности этой точки. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и графиками приведен ниже.

$t := x + 1 \qquad x := t - 1 \qquad \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{(t-1)}$

$\frac{1}{(t-1)} \qquad -1 - t - t^2 - t^3 - t^4 + O(t^5)$

$-2 - x - (x+1)^2 - (x+1)^3 - (x+1)^4 + O((x+1)^5)$

$T4(x) := -2 - x - (x+1)^2 - (x+1)^3 - (x+1)^4$



Указание. Для того чтобы выполнить замену переменной $x = t + x_0$, скопируйте в буфер обмена стандартным для Windows способом выражение $t + x_0$ для x, выделите в выражении для $f(x)$ переменную x и щелкните по строке **Substitute** в пункте **Variable** меню **Symbolics** (рис. 3.22). В дальнейшем действуйте так же, как в предыдущем задании.

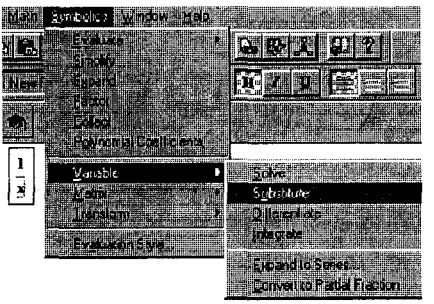


Рис. 3.22. Символьная замена переменной

3.9 ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Функции спроса. Равновесная цена

Микроэкономика, как известно, занимается анализом отдельных элементов экономической системы. Один из важнейших разделов микроэкономики — изучение спроса и предложения. *Спрос* на некоторый товар — это потребность в определенном количестве товара, ограниченная действующими ценами и платежеспособностью (доходами) потребителей. *Предложение* — это количество товара, которое может быть представлено для продажи по данной цене.

Здравый смысл подсказывает: увеличение выпуска требует дополнительных затрат и, для того чтобы заинтересовать производителя в увеличении выпуска, нужно предложить ему повышенную цену. Отсюда следует, что *предложение* S нужно рассматривать как возрастающую функцию *цены** P. Если предложение зависит от цены, то и цена зависит от предложения. Экономисты обычно именно функцию $P = S(Q)$ называют *функцией предложения*, а ее график — *кривой предложения*; здесь Q — количество товара, предложенного для продажи по цене P.

*S — supply (англ.) — предложение; P — price (англ.) — цена.

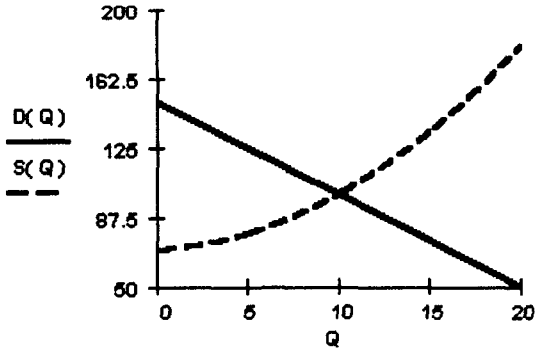
Тот же здравый смысл подсказывает: если цена на определенный товар начинает расти, то количество проданного товара будет уменьшаться, т.е. зависимость спроса* D от цены P — убывающая функция. Экономисты называют *функцией спроса* функцию $P = D(Q)$, а ее график — *кривой спроса*; здесь Q — количество товара, приобретенного потребителями по цене P.

Хотя любое предположение о виде функциональных зависимостей $S(Q)$ и $D(Q)$ будет упрощением действительности, исследование этих функций позволяет частично "оценить" реальную ситуацию. Таким образом, анализируя модель, можно оценивать, предсказывать изменение исследуемых величин**. Чем ближе модель к реальности, тем, вообще говоря, она сложнее и тем более точными могут оказаться прогнозы и оценки.

Некоторые содержательные выводы о взаимном влиянии показателей можно сделать, исследуя поведение графиков соответствующих функций. Посмотрим, например, на графики функций спроса и предложения, приведенные ниже.

$D(Q) := -5 \cdot Q + 150$ **функция спроса**

$S(Q) := \frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{2} + 70$ **функция предложения**



Представляет интерес точка пересечения кривых спроса и предложения. Эта точка называется *точкой равновесия*, а соответствующая цена — *равновесной ценой*. Пересечение графиков при $P = 100$ означает, что при такой цене весь произведенный товар раскупается, спрос и предложение совпадают. При ценах ниже равновесной ($P < 100$) спрос превышает предложение, $D(Q) > S(Q)$, возникает "дефицит" товара и

*D — demand (англ.) — спрос.

**Некоторые модели, рассмотренные в этом разделе, взяты из [16].

производители могут повышать цену, рыночная цена будет стремиться к равновесной. Если же цены выше равновесной цены, $P > 100$, то $S(Q)$ больше $D(Q)$, предложение превышает спрос, остается нереализованная продукция, что побуждает производителей снижать цену, и рыночная цена будет стремиться к равновесной. Следует заметить, что здесь рассмотрена очень упрощенная модель: ведь цена — не единственный фактор, определяющий изменение спроса и предложения; с некоторыми другими факторами мы познакомимся в разделе, посвященном функциям нескольких переменных в экономических задачах.

ЗАДАНИЕ 3.18

Изобразите кривые спроса и предложения. Найдите равновесную цену.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Определите функцию предложения как функцию переменной Q.
3. Определите функцию спроса как функцию переменной Q.
4. Постройте на одном графике кривую спроса и кривую предложения. Найдите графически координаты точки пересечения.
5. Найдите символьное значение Q, при котором достигается равновесная цена.
6. Вычислите равновесную цену как значение функции спроса в соответствующей точке.

Пример выполнения задания

Вариант решения задачи для линейной функции спроса $D(Q) = 150 - 5Q$ и для функции предложения $S(Q) = \frac{1}{4}Q^2 + \frac{1}{2}Q + 70$ приведен выше. В приведенном ниже документе показано символьное и графическое вычисление равновесной цены.

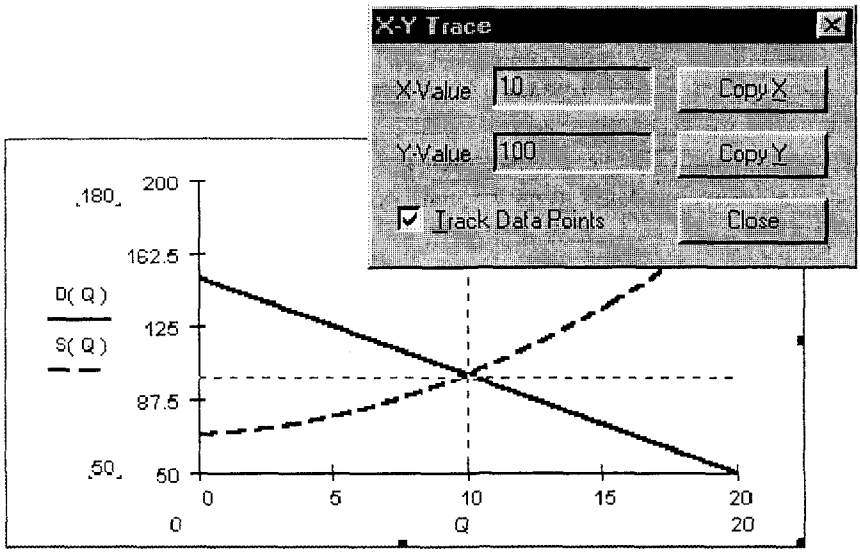
$D(Q) := -5 \cdot Q + 150$ **функция спроса**

$S(Q) := \frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{2} + 70$ **функция предложения**

Given

$$\left(\frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{2} + 70\right) - (-5 \cdot Q + 150) = 0$$

$\mathrm{Find}(Q) \rightarrow (10 \quad -32)$ $\quad P := D(10) \quad P = 100$



Указание. Для того чтобы найти равновесную цену графически, щелкните по строке **Trace** пункта **Graph** меню **Format** и установите стрелками или мышью маркер на пересечении линий. Чтобы найти равновесную цену символьно, введите ключевое слово **Given**, затем — разность функций спроса и предложения, символьный знак равенства (<Ctrl>+<=>) и приравняйте левую часть нулю. Введите функцию Find(Q), выделите ее, щелкните в панели по кнопке и по рабочему документу вне выделяющей рамки. Вычислите равновесную цену как функцию вычисленного значения Q.

Функции спроса. Зависимость спроса от дохода

Предметом теории потребления является исследование того, как люди распределяют заработную плату между различными расходными статьями своего бюджета, в каких объемах они покупают продукты потребления и т.д.

Функции спроса описывают зависимость спроса D на приобретаемый продукт потребления от цены P этого продукта и от дохода потребителя x, $D = D(x, P)$. При фиксированной ценс P функция спроса зависит только от дохода: $D = D(x)$.

Рассмотрим в качестве примера *функции спроса Торнквиста** $D(x)$, которые описывают зависимость величины спроса на различные *группы* товаров в зависимости от их цены и роли в потребительской корзине:

$$D_0(x) = \frac{\alpha x(x+\beta)}{x^2+\gamma} \text{ — спрос на малоценные товары;}$$

*Функции Торнквиста приведены в [9].

$D_1(x) = \dfrac{\alpha x}{x+\beta}$ — спрос на товары первой необходимости;

$D_2(x) = \dfrac{\alpha(x-\gamma)}{x+\beta}$ — спрос на товары второй необходимости (относительная роскошь);

$D_3(x) = \dfrac{\alpha x(x-\gamma)}{x+\beta}$ — спрос на предметы роскоши.

Здесь α, β, γ — некоторые фиксированные параметры.

Ниже приведены графики функций спроса Торнквиста, построенные в Mathcad.

Графики функций спроса Торнквиста

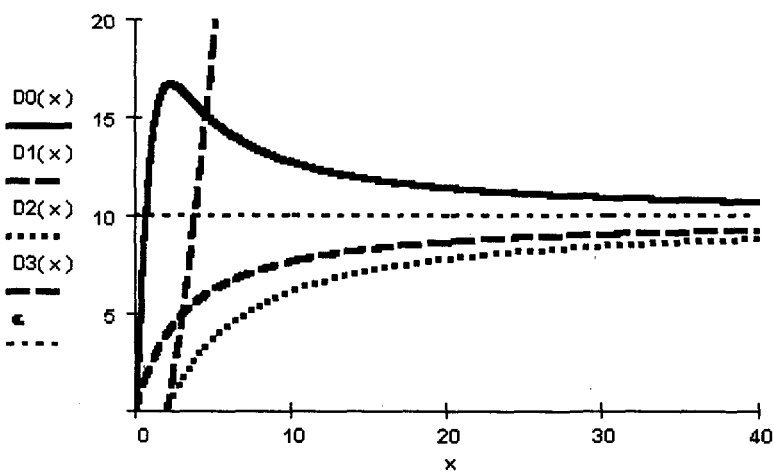
$\alpha := 10 \qquad \beta := 3 \qquad \gamma := 2 \qquad x$ -- доход

$D0(x) := \dfrac{\alpha \cdot x \cdot (x+\beta)}{x^2+\gamma}$ **спрос на малоценные товары**

$D1(x) := \dfrac{\alpha \cdot x}{x+\beta}$ **спрос на товары первой необходимости**

$D2(x) := \dfrac{\alpha \cdot (x-\gamma)}{x+\beta}$ **спрос на товары второй необходимости (относительная роскошь)**

$D3(x) := \dfrac{\alpha \cdot x \cdot (x-\gamma)}{x+\beta}$ **спрос на предметы роскоши**



Из приведенных графиков видно, что при $\alpha = 10$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$ спрос на малоценные товары растет при малых доходах, а затем с ростом доходов начинает падать и стремится к величине α сверху. Спрос на товары первой необходимости растет с ростом доходов и стремится к

величине α снизу. Товары второй необходимости и предметы роскоши приобретают только люди с доходом, превышающим $\gamma = 2$. При этом спрос на товары второй необходимости отстает от спроса на товары первой необходимости и ограничен сверху значением α. И только спрос на предметы роскоши с ростом доходов постоянно растет.

ЗАДАНИЕ 3.19

Постройте график заданной функции спроса. Исследуйте вид кривой при разных значениях параметров.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Определите функцию спроса как функцию дохода и параметров.
3. Постройте на одном графике кривые спроса для разных значений параметров.

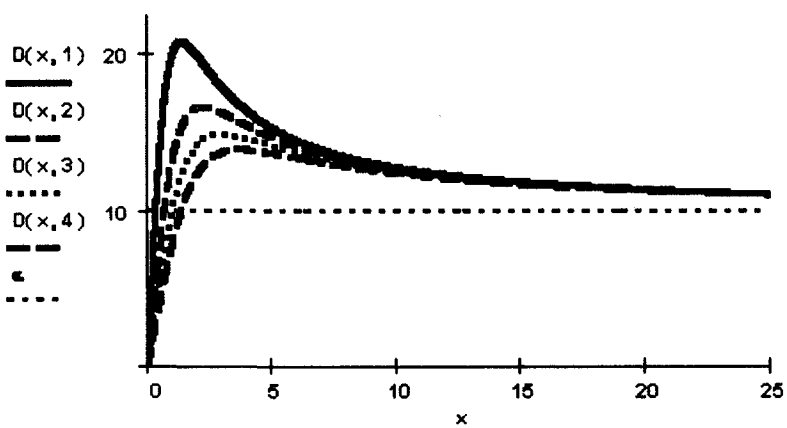
Пример выполнения задания

Ниже приведены графики функций Торнквиста спроса на малоценные товары при $\alpha = 10$, $\beta = 2$ для $\gamma = 1, 2, 3, 4$.

Графики функций спроса Торнквиста

$\alpha := 10$ $\beta := 3$ x -- доход

$$D(x,\gamma) := \frac{\alpha \cdot x \cdot (x+\beta)}{x^2+\gamma}$$



Максимальная прибыль

В наиболее общем виде *прибыль** π — разность между *выручкой предприятия* от реализации *продукции* R и *полными издержками* (*затратами*) C: $\pi = R - C$.

Поскольку цена определяется не тем, сколько хочет получить производитель, а тем, сколько готов заплатить потребитель, то полный доход, полученный от реализации товара в количестве Q по цене P, вычисляется по формуле $R = QP(Q)$, где $P = P(Q)$ — соответствующая функция спроса.

Полные издержки C разделяют на *постоянные* (C_f), которые не зависят от объема производства Q, и переменные (C_v) — затраты на производство единицы продукции, т.е.

$$C = C_f + C_v Q.$$

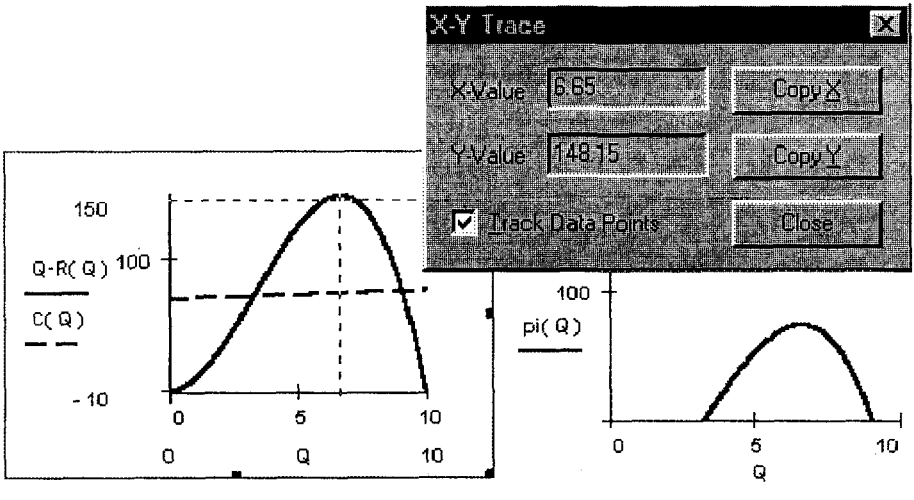
Задача об определении максимальной прибыли состоит в определении такого объема производства $Q_{\max}$, при котором достигается максимальная прибыль, т.е. требуется при заданных значениях C_f, C_v и заданной функции спроса $P = P(Q)$ найти максимум функции

$$\pi(Q) = QP(Q) - (C_f + C_v Q).$$

Ниже приведено графическое решение задачи о максимальной прибыли для квадратичной функции $P(Q) = 10Q - Q^2$ и для $C_f = 70$, $C_v = 0.7$.

Cf := 70 **Cv := 0.7**

R(Q) := - Q² + 10·Q **C(Q) := Cf + Cv·Q** **pi(Q) := Q·R(Q) - C(Q)**



*π — profit (англ.) — прибыль, R — revenue — доход, C — cost — издержки.

Указание. Для того чтобы найти геометрически выпуск продукции Q, при котором достигается максимум прибыли, изобразите на одном графике кривую полного дохода и линию издержек. Максимум прибыли достигается в точке, где расстояние между кривыми максимально. Видно, что производство прибыльно только при $Q_1 < Q < Q_2$, где Q_1 и Q_2 — точки пересечения графиков полного дохода и затрат, поскольку при таких значениях Q полный доход превышает издержки. В приведенном документе координаты точки максимальной прибыли определены с помощью функции **Trace** пункта **Graph** меню **Format**.

Ниже приведено символьное вычисление точек, определяющих границы прибыльного объема производства, и точки максимальной прибыли. Границы интервала, на котором полный доход превышает издержки, вычислены как решения уравнения $R(Q) - C(Q) = 0$, а точка максимальной прибыли — как решение уравнения $\frac{d\pi(Q)}{dQ} = 0$.

Given $(-Q^2 + 10 \cdot Q) - (Cf + Cv \cdot Q) = 0$

Find(Q) $\rightarrow$ (4.65 − 6.955393359058852973 55i 4.65 + 6.955393359058852973 55i)

Q1 := 1.5479845261507801434 **Q2** := 7.7520154738492198566

Given $\frac{d}{dQ} pl(Q) = 0$

Find(Q) $\rightarrow$ (.0351857050762570006 6.6314809615904096 66)

Qmax := 6.6314809615904096 66 **pl(Qmax)** = 73.494

ЗАДАНИЕ 3.20

Найдите графически и численно максимальную прибыль и границы прибыльного производства для заданной функции полного дохода и функции издержек.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Определите функцию полного дохода как функцию объема проданного товара.
3. Определите функцию издержек как функцию объема проданного товара.
4. Постройте на одном графике кривую полного дохода и линию издержек.
5. Найдите графически максимальную прибыль и границы доходного производства.
6. Постройте график функции прибыли.

7. Найдите аналитически границы прибыльного производства.
8. Найдите производную функции прибыли и точку максимальной прибыли.
9. Вычислите максимальную прибыль.

Пример выполнения задания

Фргамент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисления для $R(Q) = -Q^2 + 10Q$, $C(Q) = 70 + 0.7Q$, приведен выше.

Средние и предельные показатели

Переменные в экономическом анализе называют *показателями*. В экономике широко используются средние величины: средняя производительность, средний доход, средние издержки и др. Однако с помощью средних показателей нельзя определить, какое влияние на результат деятельности (прибыль, объем производства и др.) оказывает изменение одного из показателей. Здесь следует анализировать *приращения* переменных, т.е. применять методы дифференциального исчисления.

Предельный доход определяется как производная полного дохода $R = R(Q)$ по количеству товара Q: $R'(Q) = \frac{dR(Q)}{dQ}$, т.е. он равен *скорости* изменения дохода при изменении объема продаж.

Средний доход — это доход на единицу продаж: $R_{cp} = \frac{R(Q)}{Q}$.

Если $R(Q) = PQ$, где P — цена единицы товара, то $R_{cp} = \frac{R(Q)}{Q} = P$, т.е. средний доход равен цене единицы продукции.

Совершенно аналогично определяются предельные и средние показатели для других экономических показателей.

Средние и предельные издержки: $C'(Q) = \frac{dC(Q)}{dQ}$, $C_{cp} = \frac{C(Q)}{Q}$, где $C(Q)$ — функция издержек.

Средняя и предельная производительность: $Q'(L) = \frac{dQ)L)}{dL}$, $Q_{cp} = \frac{Q(L)}{L}$, где $Q(L)$ — производственная функция, описывающая зависимость объема призведенной продукции Q от количества вложенного труда L.

Средняя и предельная склонность к потреблению: $C'(Y) = \frac{dC(Y)}{dY}$, $C_{cp} = \frac{C(Y)}{Y}$, где $C(Y)$ — функция потребления, описывающая зависимость объема потребления C от национального дохода* Y.

**Национальный доход* — сумма платежей всех производственных секторов в сектор конечного спроса.

Средняя и предельная склонность к сбережению: $S'(Y) = \frac{dS(Y)}{dY}$, $S_{cp} = \frac{S(Y)}{Y}$, где $S(Y)$ — функция сбережения, описывающая зависимость объемов капиталовложений S от национального дохода Y. Заметим, что для простейшей двухсекторной модели $Y = C + S$ и, следовательно, $C'(Y) + S'(Y) = 1$, $C_{cp} + S_{cp} = 1$.

ЗАДАНИЕ 3.21

Вычислите средние и предельные величины для заданной экономической функции.

Порядок выполнения задания

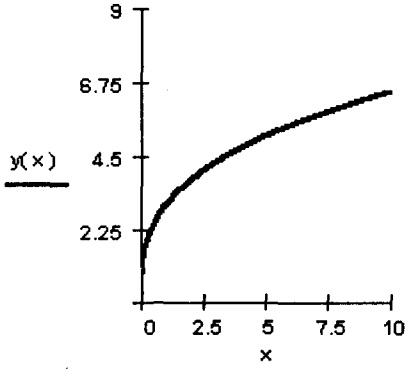
1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Определите заданную экономическую функцию и постройте ее график.
3. Определите среднюю величину и постройте ее график.
4. Найдите предельную величину и изобразите ее на том же графике.

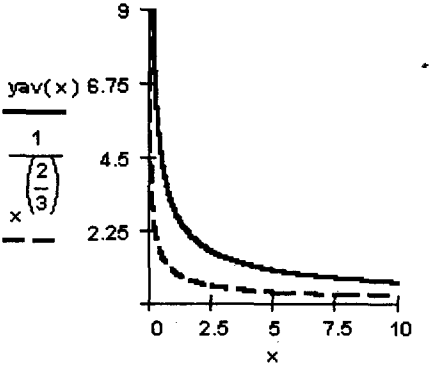
Пример выполнения задания

Ниже приведены вычисления и графики предельной и средней производительности труда для производственной функции $y = 3\sqrt[3]{x^2}$.

$$y(x) := 3\sqrt[3]{x}$$

$$yav(x) := \frac{y(x)}{x} \qquad ylim(x) := \frac{d}{dx}y(x) \qquad ylim(x) \rightarrow \frac{1}{x^{\left(\frac{2}{3}\right)}}$$





Эластичность экономических функций

Эластичность — это безразмерная величина, которая показывает способность функции реагировать на изменение аргумента. *Эластичностью функции в точке* называется предел отношения процентного изменения функции к вызвавшему это изменение процентному изменению аргумента, т.е.

$$E_f = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{f} 100\% \right) : \left(\frac{\Delta x}{x} 100\% \right).$$

Эластичность можно определить через средние и предельные величины:

$$E_f = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta f}{f} 100}{\frac{\Delta x}{x} 100} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} = f'(x) \frac{x}{f(x)} = \frac{f'(x)}{f_{cp}(x)}$$

или как логарифмическую производную:

$$E_f = \frac{d \ln f(x)}{d \ln x},$$

поскольку

$$d \ln f(x) = \frac{df(x)}{f(x)} \qquad \text{и} \qquad d \ln x = \frac{dx}{x}.$$

Для функции, заданной на конечном множестве значений X_i, рассматривают *конечную (процентную) эластичность*:

$$E_y = \frac{\frac{y_2 - y_1}{y_1} \cdot 100\%}{\frac{x_2 - x_1}{x_1} \cdot 100\%}.$$

Эластичность спроса по цене определяется равенствами:

$$E_D = \frac{\frac{dD}{D}}{\frac{dP}{P}} = \frac{dD}{dP} \cdot \frac{P}{D} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q},$$

где $D = D(P)$ — функция спроса.

Напомним, что функция спроса $D = D(P)$ — убывающая функция, следовательно, эластичность E_D отрицательна (точнее, неположительна) и анализу подвергается величина $|E_D|$.

В зависимости от значений $|E_D|$ различают товары *эластичного* и *неэластичного* спроса. Если $|E_D| > 1$, т.е. относительное повышение

цены на 1% приводит к относительному падению спроса более чем на 1%, и наоборот, падение цены на 1% приводит к увеличению спроса более чем на 1%, то говорят о товаре *эластичного спроса.* В противном случае, когда $|E_D| \leq 1$, товар называют товаром *неэластичного* спроса.

Существует связь между предельным доходом и эластичностью спроса по цене.

Как уже отмечалось выше, суммарный доход $R(Q)$ вычисляется по формуле $R(Q) = QP(Q)$, где $P(Q)$ — функция спроса. Тогда предельный доход $R'(Q)$ можно выразить через E_D:

$$R'(Q) = \frac{d}{dQ}(QP(Q)) = P + Q\frac{dP}{dQ} = P\left(1 + \frac{Q}{P}\frac{dP}{dQ}\right) = P\left(1 - \frac{1}{|E_D|}\right).$$

Равенство $R'(Q) = P\left(1 - \frac{1}{|E_D|}\right)$ справедливо для любой функции спроса. Отсюда следует, что при реализации товаров неэластичного спроса ($|E_D| \leq 1$) предельный доход отрицателен и суммарный доход падает; если же спрос на товар эластичен ($|E_D| > 1$), то предельный доход положителен и, следовательно, суммарный доход растет. Справедливо утверждение: для товаров эластичного спроса суммарный доход — возрастающая функция.

Эластичность предложения по цене определяется равенствами:

$$E_S = \frac{\frac{dS}{S}}{\frac{dP}{P}} = \frac{dS}{dP} \cdot \frac{P}{S} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q},$$

где $S = S(P)$ — функция предложения. Функция предложения $S = S(P)$ возрастающая, эластичность E_S неотрицательная, и анализу подвергается величина E_S.

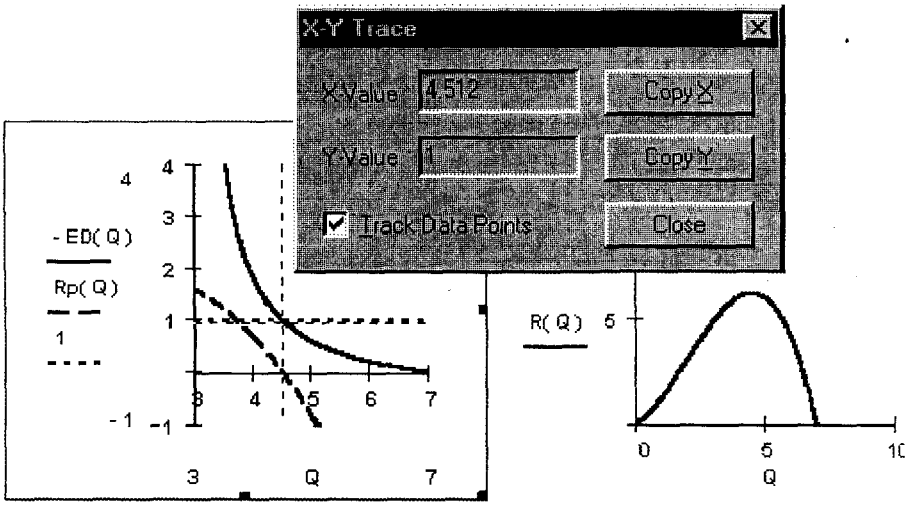
Ниже приведены вычисления предельного дохода и эластичности спроса по цене, графики эластичности, предельного дохода и график дохода. В приведенном документе показано вычисление значения P, при котором спрос на исследуемый товар теряет эластичность.

$$P(Q) := \frac{-Q^2}{10} + \frac{3}{5}\cdot Q + \frac{7}{10}$$

$$ED(Q) := \frac{P(Q)}{Q}\cdot\frac{1}{\frac{d}{dQ}P(Q)} \quad ED(Q) \rightarrow \frac{\left(\frac{-1}{10}\cdot Q^2 + \frac{3}{5}\cdot Q + \frac{7}{10}\right)}{\left[Q\cdot\left(\frac{-1}{5}\cdot Q + \frac{3}{5}\right)\right]}$$

$$R(Q) := Q \cdot P(Q) \qquad R(Q) \rightarrow Q \cdot \left(\frac{-1}{10} \cdot Q^2 + \frac{3}{5} \cdot Q + \frac{7}{10}\right)$$

$$Rp(Q) := \frac{d}{dQ} R(Q) \qquad Rp(Q) \rightarrow \frac{-1}{10} \cdot Q^2 + \frac{3}{5} \cdot Q + \frac{7}{10} + Q \cdot \left(\frac{-1}{5} \cdot Q + \frac{3}{5}\right)$$



$$\text{Given} \quad -\left[\frac{\left(\frac{-1}{10} \cdot Q^2 + \frac{3}{5} \cdot Q + \frac{7}{10}\right)}{\left[Q \cdot \left(\frac{-1}{5} \cdot Q + \frac{3}{5}\right)\right]}\right] = 1$$

$$\text{Find}(Q) \rightarrow \left[2 - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{57} \quad 2 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{57}\right]$$

$$Q := 2 + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{57} \qquad Q = 4.517 \qquad P(Q) = 1.37$$

Указание. Графики подтверждают высказанные выше утверждения о связи эластичности спроса по цене с предельным и суммарным доходом. В документе показано символьное вычисление значения Q, при котором $|E_D| = 1$ (найдено решение уравнения $-E_D = 1$), и вычисление соответствующего значения цены $P = P(Q)$. Исследуемый товар является товаром эластичного спроса, и суммарный доход от его реализации растет, когда цена товара не превышает величины $P = 1.37$. При такой цене достигается максимум суммарного дохода.

ЗАДАНИЕ 3.22

Найдите для заданной функции спроса $P = P(Q)$ эластичность E_D спроса по цене и соответствующий предельный доход. Постройте графики эластичности E_D и предельного дохода. Найдите значение Q и соответствующую цену, при которой $|E_D| = 1$. Сформулируйте выводы.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Определите функцию спроса $P = P(Q)$.
3. Найдите эластичность спроса по цене.
4. Определите функцию суммарного дохода.
5. Найдите предельный доход.
6. Постройте графики эластичности и предельного дохода.
7. Постройте график суммарного дохода.
8. Найдите на графике точку, в которой $|E_D| = 1$ ($E_D = -1$, поскольку $E_D < 0$).
9. Найдите символьно точку Q, в которой $|E_D| = 1$.
10. Вычислите аналитически соответствующее значение цены.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисления для $R(Q) = -0.1Q^2 + 0.6Q + 0.7$, приведен выше.

3.10 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на промежутке* (a, b). Дифференцируемая на промежутке (a, b) функция $F(x)$, производная которой в каждой точке (a, b) равна $f(x)$, называется *первообразной* функции $f(x)$:

$$F'(x) = f(x).$$

Поскольку $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$ для любой постоянной C, то можно говорить о *семействе первообразных* — множестве функций вида $F(x) + C$, $F'(x) = f(x)$.

*Здесь возможно $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Семейство первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом функции* $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \quad x \in (a,b),$$

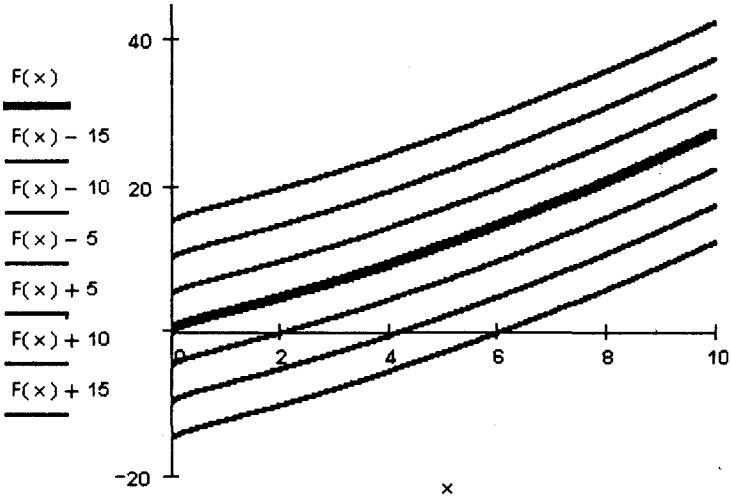
где $\int$ — знак интеграла; $f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение; $f(x)$ — подынтегральная функция; x — переменная интегрирования; $F(x)+C$ — значение неопределенного интеграла, т.е. семейство первообразных функции $f(x)$:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \big(F(x)+C\big)' = f(x).$$

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями некоторых неопределенных интегралов и с графиками семейств первообразных.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx \rightarrow \frac{2}{3}\cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 2\cdot\sqrt{x} \qquad F(x) := \frac{2}{3}\cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 2\cdot\sqrt{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}\cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 2\cdot\sqrt{x}\right] \rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$



Указание. Для того чтобы вычислить неопределенный интеграл, щелкните по кнопке $\boxed{\int}$ в панели $\boxed{\int\frac{dy}{dx}}$, введите с клавиатуры в помеченных позициях подынтегральную функцию и переменную интегрирования, выделите все выражение

рамкой, затем щелкните по кнопке [▪→] в панели [ ]. Первообразная, в которой по умолчанию значение произвольной константы равно нулю, будет отображена справа от стрелки. Скопируйте вычисленное выражение и присвойте его функции переменной x (в приведенном фрагменте это F(x)). Для того чтобы проверить первообразную, вычислите ее производную. Для этого скопируйте в буфер обмена* выражение первообразной, щелкните по кнопке дифференцирования [$\frac{d}{dx}$], вставьте из буфера обмена** выражение первообразной, введите с клавиатуры переменную дифференцирования и дальше действуйте так же, как при символьном вычислении первообразной. Построить графики семейства первообразных можно, щелкнув по кнопке [ ] в панели [ ]. Далее следует ввести в помеченной позиции возле оси ординат, разделяя запятой, выражения для первообразных с различными значениями константы (в приведенном фрагменте — это F(x) ± 5, ±10, ±15) и щелкнуть по рабочему документу вне поля графиков.

Если $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то, полагая $x = \varphi(t)$, получим *формулу интегрирования заменой переменной*:

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением неопределенного интеграла заменой переменных приведен ниже.

$$f(x) := x^2 \cdot \sqrt[3]{1-x} \qquad t(x) := \sqrt[3]{1-x}$$

$$\sqrt[3]{1-x} - t \qquad 1 - t^3 \qquad -3 \cdot t^2$$

$$x^2 \cdot \sqrt[3]{1-x} \qquad (1-t^3)^2 \cdot (t^3)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$\int (1-t^3)^2 \cdot (t^3)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot (-3 \cdot t^2)\,dt \rightarrow \frac{-3}{10} \cdot t^{10} + \frac{6}{7} \cdot t^7 - \frac{3}{4} \cdot t^4$$

$$\frac{-3}{10} \cdot t^{10} + \frac{6}{7} \cdot t^7 - \frac{3}{4} \cdot t^4 \qquad \frac{-3}{10} \cdot (1-x)^{\left(\frac{10}{3}\right)} + \frac{6}{7} \cdot (1-x)^{\left(\frac{7}{3}\right)} - \frac{3}{4} \cdot (1-x)^{\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$\frac{-3}{140} \cdot (1-x)^{\left(\frac{4}{3}\right)} \cdot \left(14 \cdot (1-x)^2 - 5 + 40 \cdot x\right)$$

---

*Выделите выражение, щелкнув вблизи него по полю и растянув пунктирный прямоугольник, и выберите в меню **Edit** пункт **Copy** либо нажмите комбинацию клавиш <Ctrl>+<C>.

Выберите в меню **Edit пункт **Insert** либо нажмите комбинацию клавиш <Ctrl>+<V>.

Проверка

$$\frac{1}{35}\cdot(1-x)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\cdot(14\cdot(1-x)^2-5+40\cdot x)-\frac{3}{140}\cdot(1-x)^{\left(\frac{4}{3}\right)}\cdot(12+28\cdot x)$$

Ответ $$F(x):=\frac{-3}{140}\cdot(1-x)^{\left(\frac{4}{3}\right)}\cdot(14\cdot(1-x)^2-5+40\cdot x)$$

Указание. Для того чтобы выполнить в неопределенном интеграле замену переменной x новой переменной $t=\sqrt[3]{1-x}$, введите в рабочий документ $\sqrt[3]{1-x}-t$ и разрешите его относительно переменной x (выделите x, щелкните по строке **Solve** в пункте **Variable** меню **Symbolics**), затем скопируйте в рабочий документ подынтегральную функцию переменной x, скопируйте в буфер обмена выражение для x и выполните замену (выделите x, щелкните по строке **Substitute** в пункте **Variable** меню **Symbolics**). Вычислите неопределенный интеграл по t, действуя как описано выше, и выполните обратную подстановку (замените переменную t ее выражением через x); упростите выражение, используя меню символьных операций.

ЗАДАНИЕ 3.23

Вычислите неопределенный интеграл и проверьте правильность вычислений; постройте графики семейства первообразных.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.
2. Определите подынтегральную функцию как функцию переменной x.
3. Найдите первообразную, используя символьную математику пакета.
4. Определите первообразную как функцию переменной.
5. Найдите производную первообразной, используя символьную математику пакета.
6. Упростите производную от первообразной, сравните результат с подынтегральной функцией.
7. Постройте на одном графике изображения нескольких первообразных.

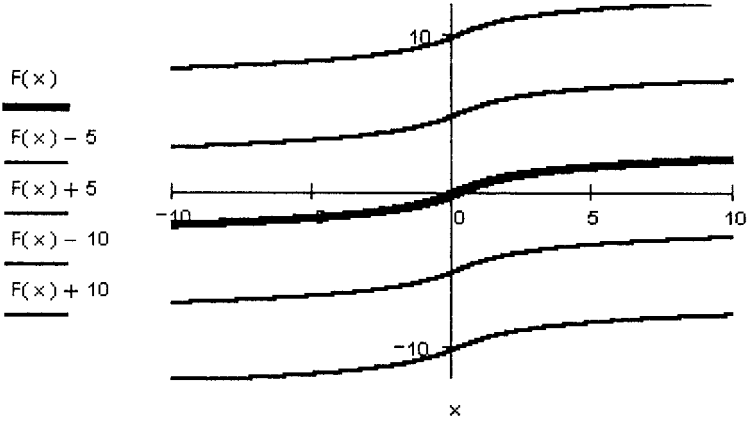
Пример выполнения задания

Вычислите $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$, проверьте вычисления дифференцированием, постройте график семейства первообразных. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot x^2 - x + 2}} \qquad \int f(x)\,dx \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot \operatorname{asinh}\left[\frac{4}{15}\cdot\sqrt{15}\cdot\left(x - \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$F(x) := \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot \operatorname{asinh}\left[\frac{4}{15}\cdot\sqrt{15}\cdot\left(x - \frac{1}{4}\right)\right]$$

$$\frac{d}{dx}F(x) \rightarrow \frac{2}{15}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{1 + \frac{16}{15}\cdot\left(x - \frac{1}{4}\right)^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2 + 2\cdot x^2 - x}}$$



Указание. Все пояснения к выполнению вычислений даны в примерах, рассмотренных выше. Если не удается упростить производную первообразной, можно выполнить упрощения постепенно. Скопируйте на свободное место в рабочем документе через буфер обмена выражение для производной, выделите рамкой часть выражения и упростите ее, затем скопируйте полученное упрощенное выражение и упростите его. Один из возможных вариантов упрощения в два приема показан на рис. 3.23.

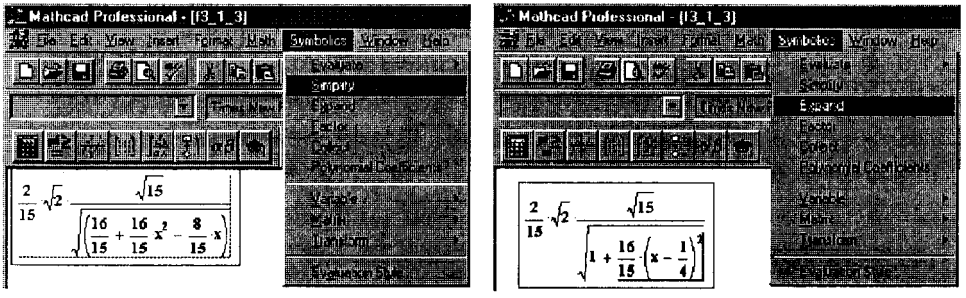


Рис. 3.23. Упрощение выражения в два приема

3.11 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение и вычисление определенного интеграла

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на промежутке $[a, b]$. Разобьем промежуток на n произвольных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

и обозначим

$$\Delta_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \Delta = \max_{1 \le i \le n} \Delta_i.$$

На каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ возьмем произвольную точку ξ_i и вычислим в ней значение функции $f(x)$. Выражение

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i$$

называется *интегральной суммой* функции $f(x)$. Если при $\Delta \to 0$ существует и конечен предел $\lim\limits_{\Delta \to 0} S$, не зависящий ни от способа разбиения промежутка $[a, b]$ точками x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, ни от выбора точек $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, то этот предел называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$, а саму функцию — *интегрируемой* на $[a, b]$. Обозначают

$$\lim_{\Delta \to 0} S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Из приведенного определения естественно следует геометрический смысл определенного интеграла: если $f(x) > 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен площади фигуры, ограниченной графиком функции, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$.

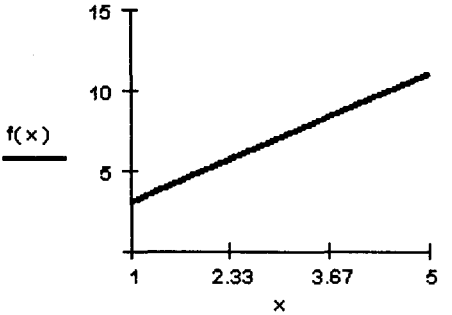
Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, в котором вычислено значение интеграла от линейной функции, определена площадь соответствующей фигуры, записаны выражения для интегральных сумм (при разбиении отрезка интегрирования на N равных частей длины $\Delta = \frac{b-a}{N}$), найдены пределы интегральных сумм и построены графики зависимости интегральных сумм от N и от Δ.

$f(x) := 2x + 1 \qquad a := 1 \qquad b := 5$

$$\int_1^5 f(x)\,dx \rightarrow 28$$

$$S := \frac{f(1) + f(5)}{2}\cdot(5 - 1)$$

$S = 28$



Значения подынтегральной функции вычисляются в левых концах отрезков

$$Sl(N) := \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + i\cdot\frac{b-a}{N}\right)\cdot\frac{b-a}{N} \qquad \lim_{N\rightarrow\infty} Sl(N) \rightarrow 28$$

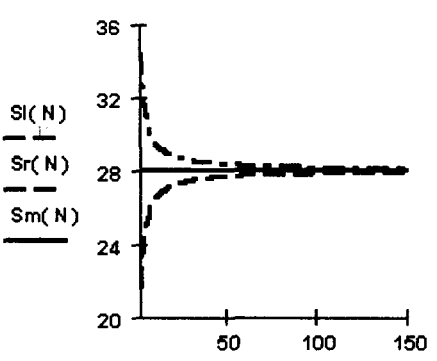
Значения подынтегральной функции вычисляются в правых концах отрезков

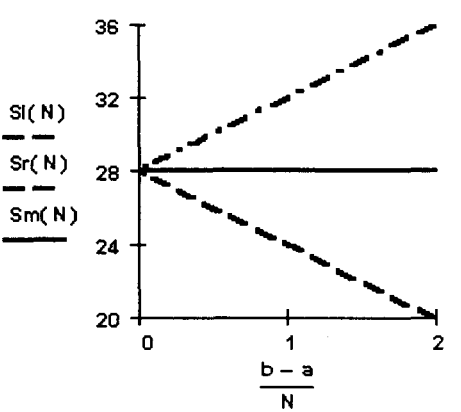
$$Sr(N) := \sum_{i=0}^{N-1} f\left[a + (i+1)\cdot\frac{b-a}{N}\right]\cdot\frac{b-a}{N} \qquad \lim_{N\rightarrow\infty} Sr(N) \rightarrow 28$$

Значения подынтегральной функции вычисляются в серединах отрезков

$$Sm(N) := \sum_{i=0}^{N-1} f\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{N}\right]\cdot\frac{b-a}{N} \qquad \lim_{N\rightarrow\infty} Sm(N) \rightarrow 28$$

$N := 2..150$





Указание. Для того чтобы вычислить определенный интеграл, щелкните в панели $\int\frac{dy}{dx}$ по кнопке $\int$ и введите с клавиатуры в помеченных позициях пределы интегрирования, подынтегральную функцию и переменную интегрирования; выделите выражение, щелкните по кнопке $\blacksquare\rightarrow$ в панели, а затем — по рабочему документу вне выделяющей рамки. Вычисленное значение интеграла будет отображено в рабочем документе справа от стрелки. Постройте график функции. Геометрическая фигура, ограниченная графиком функции, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$, — трапеция. Вычислите площадь трапеции и сравните со значением интеграла. Разбейте отрезок $[a, b]$ на N равных частей и определите три интегральные суммы как функции N, различающиеся способом выбора точки ξ_i на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$: Sl(N) для $\xi_i = x_i$, Sr(N) для $\xi_i = x_{i+1}$ и Sm(N) для $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Чтобы определить соответствующую интегральную сумму, введите с клавиатуры ее имя и знак присваивания; щелкните по кнопке $\sum_{i=1}^{n}$ в панели $\int\frac{dy}{dx}$ и введите в помеченных позициях индекс суммирования, его начальное и конечное значения и выражение для вычисления слагаемого. Чтобы найти предел интегральной суммы при $N \to \infty$, щелкните по кнопке $\lim_{\to\blacksquare}$ в панели $\int\frac{dy}{dx}$, введите в помеченных позициях N, ∞ и имя соответствующей интегральной суммы, выделите выражение предела, щелкните по кнопке $\blacksquare\rightarrow$ в панели и по рабочему документу вне выделяющей рамки. Сравните значения полученных пределов между собой и со значением интеграла. В приведенном фрагменте построены два графика интегральных сумм. Левый график — изображение зависимости интегральных сумм от N. На графике видно, что при любом значении N интегральная сумма Sm(N) равна значению интеграла, а интегральные суммы Sl(N) и Sr(N) стремятся к нему с ростом N, монотонно возрастая и убывая соответственно. На правом графике изображена зависимость значений интегральных сумм от длины отрезка разбиения $[x_i, x_{i+1}]$: $|x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{N}$, $b > a$. Видно, что, когда длина отрезка разбиения стремится к нулю, значения интегральных сумм стремятся к точному значению определенного интеграла.

ЗАДАНИЕ 3.24

Для заданной функции исследуйте поведение интегральных сумм на заданном отрезке интегрирования, разбивая отрезок интегрирования на равные части. Вычислите определенный интеграл и сравните его значение со значениями пределов интегральных сумм.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов по горизонтали.
2. Определите подынтегральную функцию как функцию переменной x и постройте ее график.
3. Вычислите определенный интеграл.
4. Запишите выражение для интегральной суммы, полученной при разбиении отрезка интегрирования на равные части,

когда значение функции вычисляется в левом конце отрезка разбиения. Найдите ее предел при числе отрезков разбиения, стремящемся к бесконечности.

5. Запишите выражение для интегральной суммы, полученной при разбиении отрезка интегрирования на равные части, когда значение функции вычисляется в правом конце отрезка разбиения. Найдите ее предел при числе отрезков разбиения, стремящемся к бесконечности.
6. Запишите выражение для интегральной суммы, полученной при разбиении отрезка интегрирования на равные части, когда значение функции вычисляется в середине отрезка разбиения. Найдите ее предел при числе отрезков разбиения, стремящемся к бесконечности.
7. Сравните полученные значения пределов между собой и со значением интеграла.
8. Постройте графики интегральных сумм как функций числа разбиений отрезка интегрирования.
9. Постройте графики интегральных сумм как функций длины отрезка разбиений.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями для интеграла $\int\limits_1^5 (2x+1)\,dx$ приведен выше.

Формула Ньютона — Лейбница. Интегрирование заменой переменной

Значение определенного интеграла от непрерывной на промежутке $[a, b]$ функции $f(x)$ может быть вычислено по *формуле Ньютона — Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная* функция для $f(x)$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением определенного интеграла средствами символьной математики пакета и по формуле Ньютона — Лейбница.

*Определение первообразной см. в разд. 3.10.

$$f(x) := \sin(x)\cdot\sin(2\cdot x)\cdot\sin(3\cdot x)$$

$$\int f(x)\,dx \rightarrow \frac{-1}{16}\cdot\cos(4\cdot x) - \frac{1}{8}\cdot\cos(2\cdot x) + \frac{1}{24}\cdot\cos(6\cdot x)$$

$$F(x) := \frac{-1}{16}\cdot\cos(4\cdot x) - \frac{1}{8}\cdot\cos(2\cdot x) + \frac{1}{24}\cdot\cos(6\cdot x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \rightarrow \frac{1}{6} \qquad F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0.167 \qquad \frac{1}{6} = 0.167$$

Если $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и $\varphi(t) \in [a, b]$, когда t изменяется в промежутке $[\alpha, \beta]$, то, положив $x = \varphi(t)$, получим *формулу замены переменной в определенном интеграле*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt.$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением определенного интеграла заменой переменных и с соответствующими комментариями приведен ниже.

$$f(x) := \frac{1}{\cos(x)\cdot(1 + \cos(x))}$$

Символьное вычисление интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx \rightarrow \lim_{x\rightarrow\frac{\pi}{4}^-} -\tan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right) - 1\right) + \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right) + 1\right) + i\cdot\pi$$

Замена переменной t=tg(x) $\quad t(x) := \tan(x)$

Вычисление новых пределов интегрирования

$$t(0) = 0 \qquad t\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Выражение x=x(t) и символьное вычисление производной от x по t

$$\tan(x) - t \qquad \operatorname{atan}(t) \qquad \frac{1}{(1 + t^2)}$$

Замена переменной в подынтегральной функции и упрощение полученного выражения

$$\frac{1}{\cos(x)\cdot(1+\cos(x))} \qquad \frac{\sqrt{1+t^2}}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)} \qquad \frac{(1+t^2)}{\left(\sqrt{1+t^2}+1\right)}$$

Вычисление и упрощение подынтегрального выражения

$$\frac{(1+t^2)}{\left(\sqrt{1+t^2}+1\right)}\cdot\frac{1}{(1+t^2)} \qquad \frac{1}{\left(\sqrt{1+t^2}+1\right)}$$

Символьное вычисление определенного интеграла

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt{1+t^2}+1\right)}\,dt \rightarrow 1-\sqrt{2}+\operatorname{asinh}(1)$$

Вычисление числового значения с пятью десятичными знаками

$$1-\sqrt{2}+\operatorname{asinh}(1) \qquad .46717$$

Указание. Сначала попытайтесь, действуя как в предыдущем задании, символьно вычислить определенный интеграл. В рассмотренном случае аналитическое выражение для интеграла оказалось очень сложным. Для того чтобы выполнить замену переменных, определите выражение для новой переменной как функции от x (в рассмотренном примере* $t = \operatorname{tg} x$. Затем вычислите значения новых пределов интегрирования; для этого введите с клавиатуры t(a) и знак равенства, аналогично вычислите t(b) (в приведенном примере это t(0) и $t\left(\frac{\pi}{4}\right)$). Чтобы получить выражение переменной x, разрешите уравнение $\varphi(x) - t = 0$ относительно x. Вычислите производную, чтобы использовать ее при подстановке. Выполните замену переменной и упростите полученное выражение — выделите его рамкой и щелкните по строке **Simplify** в меню **Symbolics**. Вычислите интеграл по t, действуя так же, как при интегрировании по x, скопировав в соответствующие позиции t(a), t(b) и преобразованное выражение подынтегральной функции. Для того чтобы получить числовое значение интеграла, скопируйте в рабочий документ полученное символьное выражение для интеграла, щелкните по строке **Floating Point** в пункте **Evaluate** меню **Symbolics** или выделите вычисленное выражение для интеграла и щелкните по строке **Floating Point**. В открывшемся окне укажите нужное количество десятичных знаков. На рис. 3.24 приведены меню, использованные при вычислении интеграла.

*В Mathcad функция $\operatorname{tg} x$ записывается как tan(x).

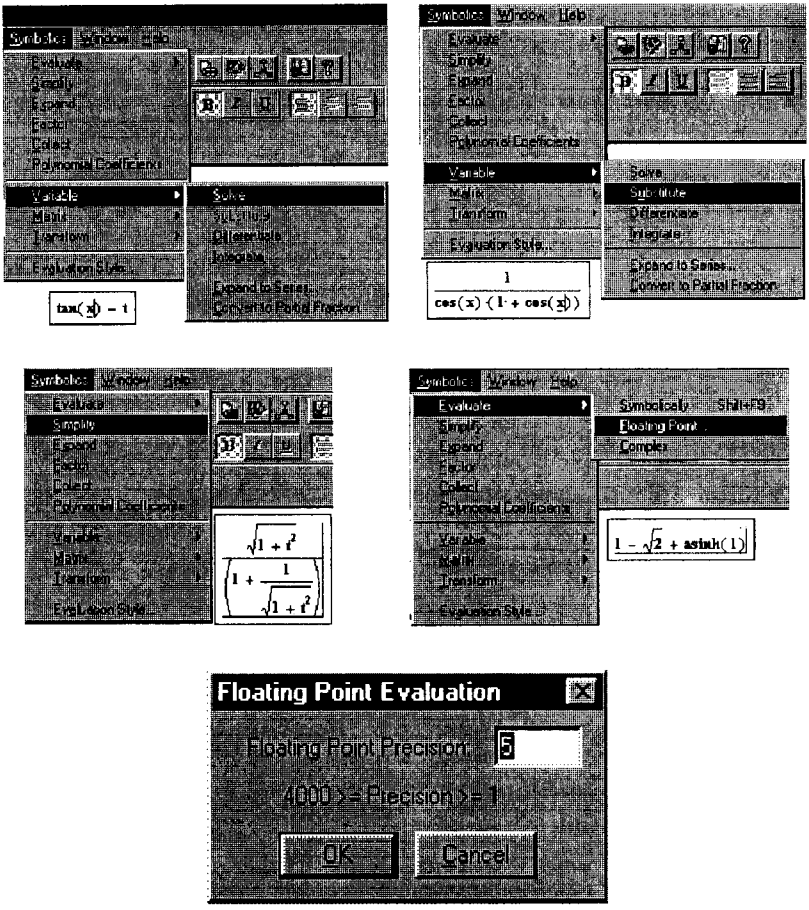


Рис. 3.24. Инструменты, используемые при вычислении интеграла заменой переменных

ЗАДАНИЕ 3.25

Вычислите определенный интеграл от заданной функции по указанному отрезку непосредственно и с помощью замены переменных.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.
2. Определите подынтегральную функцию как функцию от x.
3. Найдите определенный интеграл символьно.
4. Введите выражение для новой переменной t как функции от x.
5. Вычислите новые пределы интегрирования по t.
6. Выразите переменную x через t, решив уравнение $\varphi(x) - t = 0$.

7. Найдите символьно производную x по t.
8. Скопируйте в буфер обмена выражение для x через t и выполните символьно замену переменной в подынтегральной функции.
9. Упростите подынтегральную функцию.
10. Запишите и упростите новую подынтегральную функцию, которая получается умножением выражения, полученного в предыдущем пункте, на производную x по t.
11. Вычислите определенный интеграл, интегрируя полученную функцию по t по отрезку, найденному в п. 4.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вариант выполнения задания для

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x \cdot (1+\cos x)}\,dx$$

заменой переменной $t = \operatorname{tg} x$ и пояснения к вычислениям, приведен выше.

3.12 НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Интеграл как функция верхнего предела

Для функции $f(x)$, интегрируемой на $[a, x]$ для $x > a$, значение интеграла $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ зависит от значения верхнего предела x. Можно рассмотреть функцию переменной x: каждому значению x ставится в соответствие число, равное значению интеграла $\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Таким образом, определенный интеграл можно рассматривать как функцию верхнего предела: $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ (функция $F(x)$ определена в области интегрируемости подынтегральной функции $f(x)$).

Если $\Phi(x)$ — первообразная для непрерывной функции $f(x)$, то значение $F(x)$ можно вычислить по формуле Ньютона — Лейбница:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Существуют интегрируемые функции, первообразные которых не выражаются через элементарные функции. В этом случае функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ не может быть записана с помощью элементарных функций. Среди функций, которые не выражаются через элементарные функции, выделяется группа *специальных функций**. Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий определение и вычисление значений двух функций, заданных интегралом. Первая из них выражается через специальную функцию**

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

вторая — $\operatorname{Si} x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ — это специальная функция, называемая *интегральным синусом.*

$$\int_0^x \exp(-t^2)\,dt \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\operatorname{erf}(x)$$

$$F(x) := \int_0^x \exp(-t^2)\,dt \qquad F(0) = 0 \qquad F(1) = 0.747 \qquad F(2) = 0.882$$

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt \rightarrow \operatorname{Si}(x)$$

$$F(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt \qquad F(0) = 0 \qquad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.37$$

Функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ можно исследовать, не вычисляя первообразной. Для интегрируемой при $x \geq a$ функции $f(x)$ справедливы следующие утверждения:

- $F(x)$ непрерывна на промежутке $[a, \infty)$, причем $F(a) = 0$;
- если $f(x) > 0$ при $x \geq a$, то $F(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[a, \infty)$;

*Специальные функции, заданные при помощи интегралов, называют *интегральными функциями.*

**Функция $\operatorname{erf} x$ называется *интегралом вероятности.*

- если $f(x)$ непрерывна при $x \geq a$, то $F(x)$ дифференцируема на промежутке $[a, \infty)$, причем $F'(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = f(x)$.

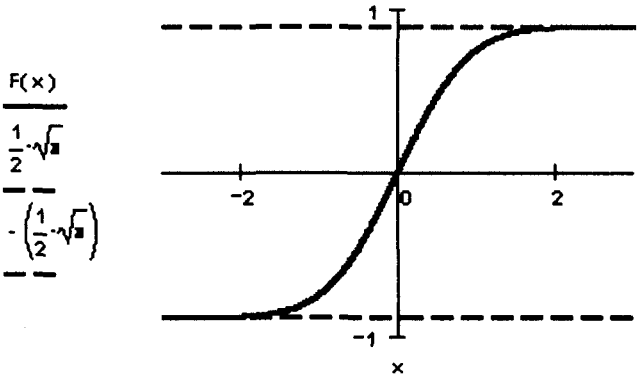
Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий исследование функции, заданной интегралом.

$$\int_0^x \exp(-t^2)\,dt \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\mathrm{erf}(x)$$

$$F(x) := \int_0^x \exp(-t^2)\,dt \qquad F(0) = 0 \qquad F(1) = 0.747 \qquad F(2) = 0.882$$

$$\frac{d}{dx}F(x) \rightarrow \exp(-x^2) \qquad \frac{d^2}{dx^2}F(x) \rightarrow -2\cdot x\cdot\exp(-x^2)$$

$$\lim_{x\rightarrow\infty} F(x) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} \qquad \lim_{x\rightarrow-\infty} F(x) \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$



ЗАДАНИЕ 3.26

Исследуйте функцию, заданную интегралом.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.
2. Введите выражение интеграла с переменным верхним пределом и вычислите его символьно.
3. Определите функцию, заданную введенным в предыдущем пункте интегралом.
4. Найдите первую и вторую производные определенной в предыдущем пункте функции.

5. Найдите горизонтальные асимптоты, если они существуют, вычислив пределы функции на $\pm\infty$.
6. Постройте график функции, заданной интегралом, и изобразите на нем горизонтальные асимптоты.

Пример выполнения задания

Примерный вариант выполнения задания для функции $F(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ приведен выше.

Несобственные интегралы по неограниченному промежутку

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, x]$ для всех $x > a$ и $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f(t)\,dt$ называют *несобственным интегралом* по неограниченному промежутку и обозначают его $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt$. Если предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*, и его значение вычисляют по формуле $\int\limits_a^\infty f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f(t)\,dt$.

Аналогично определяется интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^a f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty} \int\limits_x^a f(t)\,dt$$

для функции $f(x)$, интегрируемой на любом отрезке $[x, a]$, $x < a$, и интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\,dt = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to\infty}} \int\limits_x^y f(t)\,dt$$

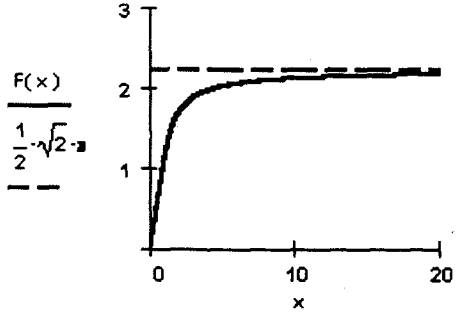
для функции $f(x)$, интегрируемой на любом конечном промежутке.

Если рассмотренные пределы бесконечны, то говорят, что соответствующий несобственный интеграл *расходится*.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением несобственных интегралов от неограниченных функций с использованием символьной математики Mathcad (непосредственно и с помощью пределов). Приведены графики соответствующих допредельных функций.

$$f(x) := \frac{x^2+1}{x^4+1} \qquad F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

$$\int_0^\infty f(t)\,dt \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\pi \qquad \lim_{x\rightarrow\infty} F(x) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\pi$$



Указание. Для того чтобы вычислить несобственный интеграл, щелкните по кнопке в панели , введите в помеченных позициях пределы интегрирования, один из которых бесконечен, подынтегральную функцию и переменную интегрирования, выделите интеграл, щелкните по кнопке в панели , а затем — в рабочем документе вне выделяющей рамки. Как видно из приведенного фрагмента, значение несобственного интеграла, вычисленное с помощью предела, совпадает со значением, вычисленным непосредственно. На графике функции, заданной интегралом с переменным верхним пределом, видно, что эта функция имеет горизонтальную асимптоту $y = C$, где C — значение несобственного интеграла.

ЗАДАНИЕ 3.27

Вычислите несобственный интеграл по неограниченному промежутку непосредственно и через предел. Постройте график допредельной функции, заданной интегралом с переменным пределом.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.
2. Введите выражение подынтегральной функции.
3. Вычислите несобственный интеграл от заданной функции по заданному неограниченному промежутку непосредственно — используя операцию вычисления определенного интеграла.
4. Определите функцию, заданную интегралом с переменным пределом.
5. Вычислите соответствующий предел функции, определенной в предыдущем пункте.

6. Сравните полученные значения несобственного интеграла.
7. Постройте график допредельной функции, определенной в п. 3, и его горизонтальные асимптоты, вычисленные в п. 5.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий примерный вариант выполнения задания для интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$, приведен выше.

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке, целиком содержащемся в промежутке $[a, b)$, и не ограничена в точке $x = b$. Если существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(t)\,dt$, то этот предел называют *несобственным интегралом* от неограниченной функции $f(x)$ по $[a, b)$ и обозначают его $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*, и его значение вычисляют по формуле

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(t)\,dt.$$

Аналогично определяется интеграл

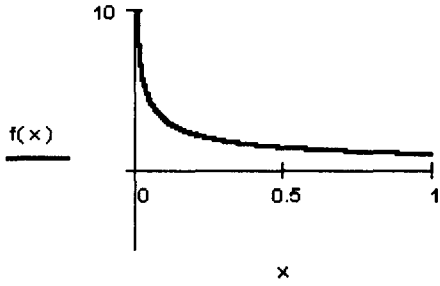
$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(t)\,dt$$

для интегрируемой на любом конечном отрезке, содержащемся в $(a, b]$, неограниченной в точке $x = a$ функции $f(x)$.

Если пределы бесконечны, то говорят, что соответствующий несобственный интеграл *расходится*.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением несобственных интегралов от неограниченных функций с использованием символьной математики Mathcad непосредственно и с помощью пределов. Приведены графики подынтегральных функций и функций, заданных интегралами с переменными пределами.

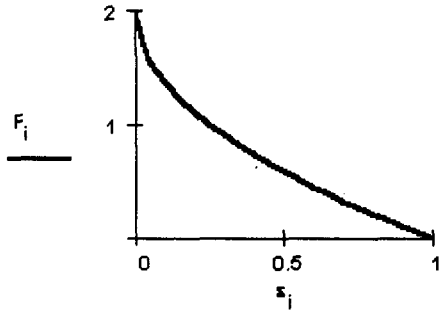
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \int_0^1 f(x)\,dx \to 2$$



$$F(\varepsilon) := \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(\varepsilon) \to 2$$

$$i := 0..20 \qquad \varepsilon_i := 1 - \frac{i}{20} \qquad F_i := F(\varepsilon_i)$$



Указание. Из приведенного графика подынтегральной функции видно, что она не ограничена в точке $x = 0$. Несобственные интегралы и пределы вычисляются так же, как в предыдущих заданиях. Для того чтобы построить график функции, заданной пределом, в рассматриваемом случае нужно сначала сформировать таблицу ее значений $F_i = F(\varepsilon_i)$ на сетке $\varepsilon_i = 1 - \frac{i}{20}$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_{20} = 0$. Видно, что график функции, заданной интегралом с переменным нижним пределом ε, стремится при $\varepsilon \to 0$ к значению несобственного интеграла.

ЗАДАНИЕ 3.28

Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции по заданному отрезку непосредственно и через предел. Постройте график подынтегральной функции и график функции, заданной интегралом с переменным пределом.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов вычислений по горизонтали.
2. Введите выражение подынтегральной функции.

3. Постройте график подынтегральной функции, чтобы убедиться в том, что она является бесконечно большой на одном из концов промежутка интегрирования.
4. Вычислите несобственный интеграл от заданной функции по заданному неограниченному промежутку непосредственно, используя операцию вычисления определенного интеграла.
5. Определите функцию, заданную интегралом с переменным пределом.
6. Вычислите предел функции, определенной в п. 5.
7. Сравните полученные значения несобственного интеграла.
8. Сформируйте таблицу значений переменного предела и таблицу соответствующих значений функции, заданной интегралом.
9. Постройте график табличной функции, вычисленной в предыдущем пункте.
10. Сравните значение функции в нуле на графике с вычисленным значением несобственного интеграла.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий примерный вариант выполнения задания для интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, приведен выше.

3.13 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Основные понятия. Ряды с неотрицательными членами

Рассмотрим произвольную числовую последовательность $\{u_n\}$. Формально составленное выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называют *числовым рядом* или просто *рядом*. Члены последовательности $\{u_n\}$ называют *членами ряда*. Сумма первых n членов ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

называется *n-й частичной суммой ряда*.

Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся*, если существует и конечен предел последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда. При этом предел последовательности частичных сумм называется *суммой ряда*.

Обозначаем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Если предел последовательности частичных сумм не существует или бесконечен, то ряд *расходится*. Справедливо следующее утверждение. Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо, чтобы последовательность его членов $\{u_n\}$ стремилась к нулю при $n \to \infty$. Другими словами, если ряд сходится, то его члены стремятся к нулю на бесконечности. Обратное, вообще говоря, неверно. Члены ряда могут стремиться к нулю, но ряд при этом расходится.

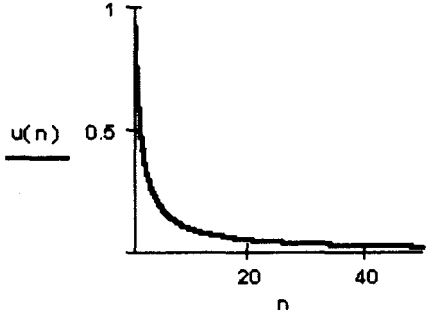
Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий исследование расходящегося и сходящегося рядов; для каждого исследуемого ряда построен график последовательности частичных сумм и членов ряда.

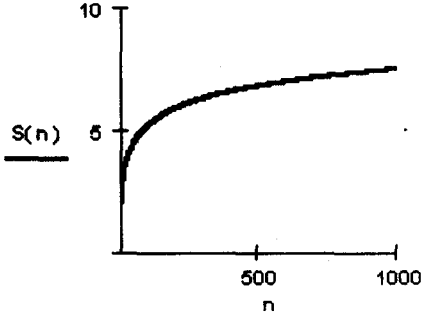
Гармонический ряд

$$u(n) := \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty \qquad \textbf{Ряд расходится}$$

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} u(k) \qquad \lim_{n\to\infty} u(n) \to 0 \qquad \lim_{n\to\infty} S(n) \to \infty$$

$n := 1..1000$

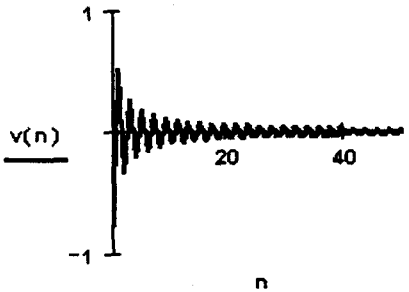


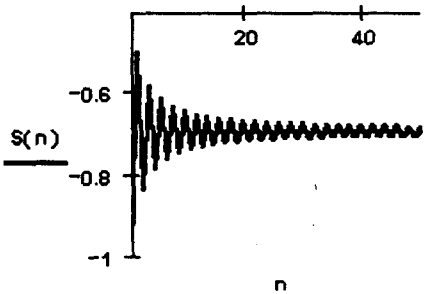


Ряд Лейбница

$$v(n) := \frac{(-1)^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow -\ln(2) \qquad \textbf{Ряд сходится}$$

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} v(k)$$





Указание. Для того чтобы вычислить символьно сумму ряда, щелкните по кнопке $\boxed{\sum_{n=1}^{m}}$ в панели $\boxed{\int \frac{dy}{dx}}$, введите с клавиатуры в помеченных позициях переменную суммирования и границы ее изменения, введите имя или выражение для члена ряда, как функции переменной n, выделите ряд рамкой, щелкните по кнопке $\boxed{\cdot\rightarrow}$ в панели $\boxed{}$ и по рабочему документу вне выделяющей рамки.

В приведенном фрагменте исследована сходимость двух часто встречающихся рядов — расходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который называется *гармоническим рядом*, и сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, называемого *рядом Лейбница*. Другие часто встречающиеся ряды — *обобщенный гармонический ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при* $\alpha \leq 1$, и *ряд типа прогрессии* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$, который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Исследовать на сходимость числовые ряды с неотрицательными членами можно, используя *теоремы сравнения* и *признаки сходимости*.

1. Рассмотрим два числовых ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. Если при всех n, начиная с некоторого, справедливо неравенство $a_n \geq b_n$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует

*При $\alpha = 1$ получаем гармонический ряд.

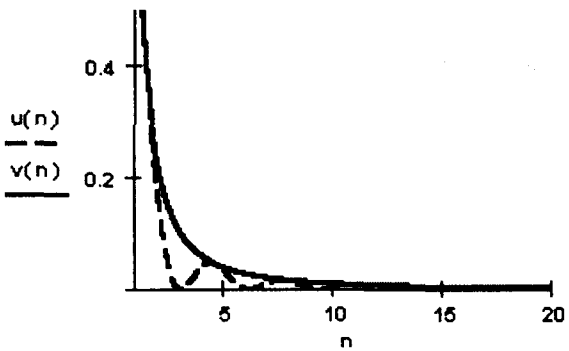
сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$; и наоборот, из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Рассмотрим два числовых ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n \geq 0$, $b_n > 0$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, $c \neq 0$, $c \neq \infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

При использовании теорем сравнения исследуемый ряд чаще всего сравнивают с простейшими рядами — с обобщенным гармоническим или с рядом типа прогрессии.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с исследованием на основе теорем сравнения.

$$u(n) := \frac{(\sin(n))^2}{n^2} \qquad v(n) := \frac{1}{n^2}$$



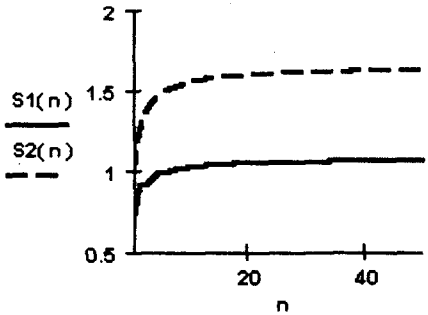
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{6}\cdot\pi^2 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(n))^2}{n^2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)^2}{n^2}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **сходится, ряд** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(n))^2}{n^2}$ **тоже сходится,**

$$S1(n) := \sum_{k=1}^{n} u(k) \qquad \lim_{n\to\infty} S1(n) \rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)^2}{k^2}$$

сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)^2}{n^2}$ **символьно не вычисляется**

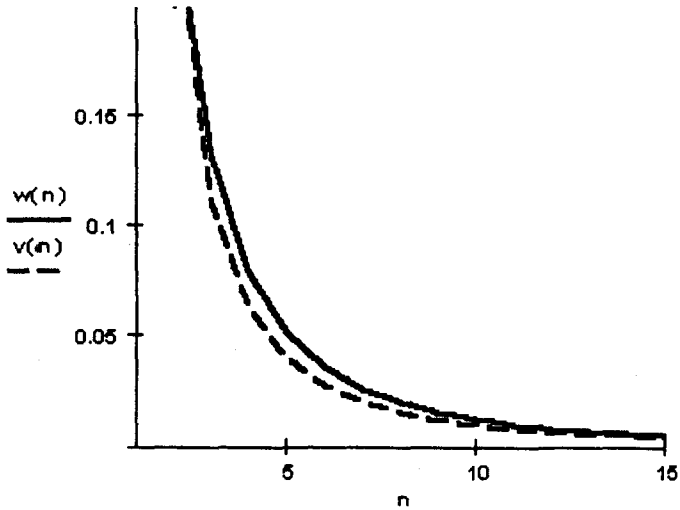
$$S2(n) := \sum_{k=1}^{n} v(k) \qquad \lim_{n \to \infty} S2(n) \to \frac{1}{6}\cdot\pi^2 \qquad n := 1..50$$



$$w(n) := \frac{\sqrt{n}+1}{n^2\cdot\sqrt{n}+n+2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{w(n)}{v(n)} \to 1 \qquad \text{Ряд} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2\cdot\sqrt{n}+n+2} \text{ сходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2\cdot\sqrt{n}+n+2} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n}+1\right)}{\left[n^{\left(\frac{5}{2}\right)}+n+2\right]}$$



Признак сходимости Даламбера. Для ряда с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Если $d < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $d > 1$ — расходится. При $d = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым: ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Признак сходимости Коши. Для ряда с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$. Если $c < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $c > 1$, — расходится. При $c = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым: ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий исследование рядов с использованием обоих признаков сходимости.

$$u(n) := \frac{4^n}{n!} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{u(n+1)}{u(n)} \to 0 \qquad \textbf{Ряд сходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u(n) \to \exp(4) - 1$$

$$v(n) := \frac{n^3}{(\ln(n))^n} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{v(n)} \to 0 \qquad \textbf{Ряд сходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln(n)^n)} \qquad \textbf{Сумма ряда символьно не вычисляется}$$

ЗАДАНИЕ 3.29

Исследуйте на сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. Изобразите графики членов ряда и последовательности частичных сумм. Если удается, вычислите сумму ряда.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов по горизонтали.
2. Определите члены исследуемых рядов как функции переменной n.

3. Определите частичные суммы рядов как функции переменной n.
4. Вычислите пределы членов ряда и частичных сумм при $n \to \infty$.
5. Постройте графики членов ряда и частичных сумм как функций переменной n.
6. Примените к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ первую теорему сравнения, сравнивая его с обобщенным гармоническим рядом или с рядом типа прогрессии.
7. Сформулируйте и запишите в рабочем документе вывод.
8. Примените к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ признак Даламбера.
9. Сформулируйте и запишите в рабочем документе вывод.
10. Примените к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ признак Коши.
11. Сформулируйте и запишите в рабочем документе вывод.

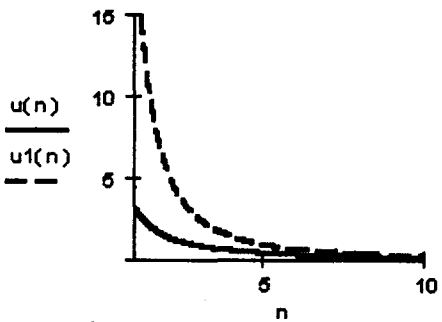
Пример выполнения задания

Исследуйте на сходимость числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{23}{n^2+6n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{2\pi}{2n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{7^n}.$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведен ниже.

$$u(n) := \frac{23}{n^2+6\cdot n} \qquad u1(n) := \frac{23}{n^2}$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} u1(n) \to \frac{23}{6}\cdot\pi^2 \qquad \text{Ряд} \sum_{n=1}^{\infty} u1(n) \text{ сходится}$$

По первой теореме сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u(n)$ **сходится**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u(n) \rightarrow \frac{1127}{120} \qquad w(n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot n + 1}\right)$$

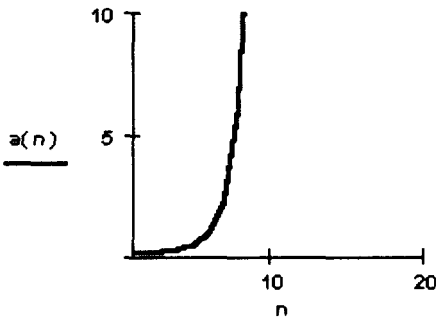
$w1(n) := \dfrac{1}{n \cdot \sqrt{n}}$ **степень больше 1, ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} w1(n)$ **сходится**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w(n)}{w1(n)} \rightarrow \pi$$

По второй теореме сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w(n)$ **сходится**

$$\sum_{n=1}^{\infty} w(n) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin\left[2 \cdot \frac{\pi}{(2 \cdot n + 1)}\right]$$

$a(n) := \dfrac{n!}{3^n + 1} \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \dfrac{a(n+1)}{a(n)} \rightarrow \infty \qquad n := 1..20$



По признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$ **расходится**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3^n + 1)}$$

$$b(n) := \frac{n \cdot 5^n}{7^n} \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{b(n)} \to \frac{5}{7}$$

По признаку Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b(n)$ сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} b(n) \to \frac{35}{4}$$

Знакопеременные ряды

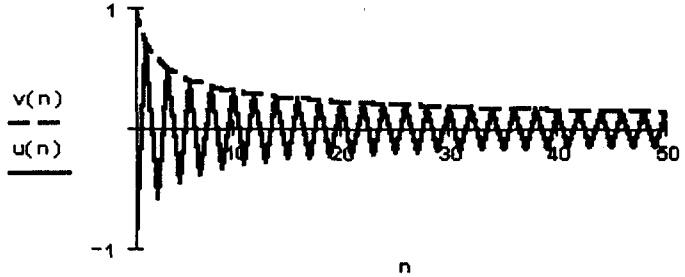
Если в последовательности $\{u_n\}$ бесконечно много положительных и отрицательных членов, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *знакопеременным*. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n > 0$, называется *знакочередующимся*. Для знакопеременных рядов введено понятие абсолютной сходимости. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится условно*. Справедливо следующее утверждение*. Если последовательность $\{a_n\}$, $a_n > 0$, стремится к нулю, монотонно убывая, $\lim\limits_{n \to 0} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с исследованием на сходимость знакопеременных рядов.

$$u(n) := (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad v(n) := |u(n)| \qquad \lim_{n \to \infty} v(n) \to 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \to \infty \qquad \text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ расходится} \qquad n := 1..50$$

*Это утверждение носит название *теорема Лейбница*.



Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ **сходится условно**

ЗАДАНИЕ 3.30

Исследуйте на сходимость знакопеременные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Изобразите графики членов ряда, последовательности частичных сумм. Если удается, вычислите сумму ряда.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов по горизонтали.
2. Определите члены исследуемого ряда как функции переменной n.
3. Определите абсолютные величины членов ряда как функции переменной n.
4. Вычислите предел абсолютных величин членов ряда при $n \to \infty$.
5. Постройте графики членов ряда и их абсолютных величин как функций переменной n.
6. Исследуйте на сходимость ряд из абсолютных величин.
7. Сформулируйте и запишите в рабочем документе вывод об абсолютной или условной сходимости исследуемого ряда.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad с исследованием ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ приведен выше.

3.14 РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

Функциональный* ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, где $\{c_n\}$ — числовая последовательность, называется *степенным рядом*. Степенной ряд сходится на интервале (x_0-R, x_0+R) с центром в точке x_0; число R — радиус сходимости степенного ряда. При исследовании свойств бесконечно дифференцируемых функций изучают их степенные ряды — *ряды Тейлора*.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ *в точке* x_0. При $x_0=0$ такой ряд называют рядом Маклорена:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Функция $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд на интервале (x_0-R, x_0+R), если существует степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ на промежутке (x_0-R, x_0+R). Если функция раскладывается в некоторой окрестности точки x_0 в степенной ряд, то этот степенной ряд — ее ряд Тейлора.

Когда ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится на некотором интервале к $f(x)$? Ответить на этот вопрос можно, вспомнив уже известные свойства разложения функции по формуле Тейлора**.

Напишем формулу Тейлора для функции $f(x)$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \quad n=1,2,\ldots$$

Здесь $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора. Доказано, что функция $f(x)$ равна сумме своего ряда Тейлора на интервале

*Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, членами которого являются функции переменной x, называется *функциональным рядом*.

**См. разд. 3.8.

(x_0-R, x_0+R) тогда и только тогда, когда при всех x из этого интервала ее остаточный член стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $x \in (x_0-R, x_0+R)$. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на (x_0-R, x_0+R) и все ее производные ограничены в совокупности на этом интервале, т.е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in (x_0-R, x_0+R)$ и для всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $|f^{(n)}(x)| \le M$. Тогда для всех $x \in (x_0-R, x_0+R)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Ниже приведены разложения в ряд Тейлора некоторых элементарных функций в нуле.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1);$$

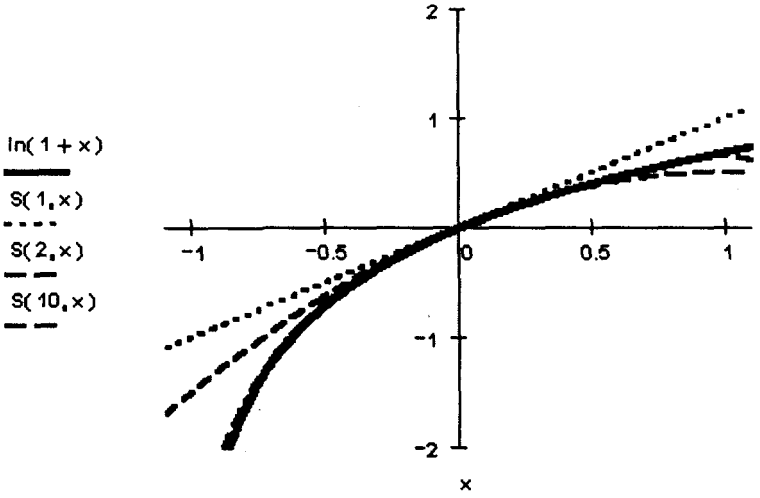
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1].$$

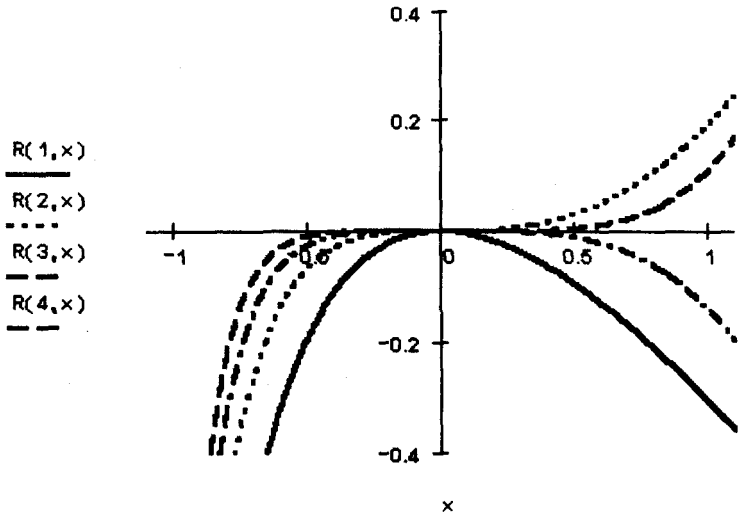
Фрагмент рабочего документа Mathcad с исследованием ряда Тейлора для функции $\ln(1+x)$ представлен ниже.

$$f(x) := \ln(1+x) \qquad c(n) := \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$S(n,x) := \sum_{k=1}^{n} c(k)\cdot x^k \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c(n)\cdot x^n \rightarrow \ln(1+x)$$



$$R(n,x) := f(x) - S(n,x)$$



Указание. Определите коэффициенты Тейлора как функции номера n, а частичные суммы и остаток ряда — как функции двух переменных — n и x.

ЗАДАНИЕ 3.31

Исследуйте поведение частичных сумм ряда Тейлора заданной функции. Исследуйте поведение остатка ряда.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Определите функцию $f(x)$.

3. Используйте разложение функции по формуле Тейлора для записи ряда Тейлора функции.
4. Вычислите символьно сумму полученного ряда.
5. Запишите выражение частичной суммы ряда как функцию числа слагаемых и переменной x.
6. Постройте график функции и графики нескольких частичных сумм ряда.
7. Постройте графики соответствующих остатков ряда.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий исследование частичных сумм ряда для функции $f(x) = \ln(1+x)$, приведен выше.

ЗАДАНИЕ 3.32

Запишите для заданной функции разложение в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Изобразите график функции и графики нескольких частичных сумм ряда Тейлора.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов по горизонтали.
2. Определите функцию $f(x)$.
3. Выполните замену $t = x - x_0$ и запишите полученную функцию переменной t.
4. Используйте разложение функции переменной t по формуле Тейлора в окрестности нуля, чтобы записать для нее ряд Тейлора.
5. Определите частичную сумму ряда Тейлора как функцию числа слагаемых и переменной x.
6. Постройте графики функции $f(x)$ и частичных сумм ее ряда Тейлора.

Пример выполнения задания

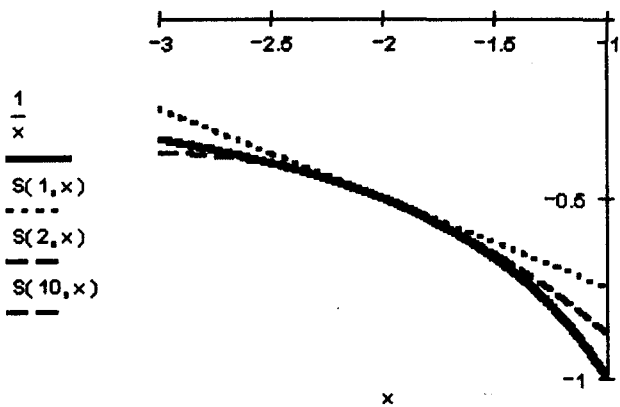
Запишите ряд Тейлора функции $1/x$ в окрестности точки $x_0 = -2$. Постройте график функции и частичных сумм ее ряда Тейлора в окрестности этой точки. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и графиками приведен ниже.

$t = x + 2 \qquad x = t - 2 \qquad \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{(t-2)}$

$$\frac{1}{(t-2)} \qquad \frac{-1}{2} - \frac{1}{4}\cdot t - \frac{1}{8}\cdot t^2 - \frac{1}{16}\cdot t^3 - \frac{1}{32}\cdot t^4 - \frac{1}{64}\cdot t^5 + O(t^6)$$

$$c(n) := -\frac{1}{2^{n+1}} \qquad S(n,x) := \sum_{k=0}^{n} c(k)\cdot(x+2)^k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2^{n+1}}\cdot(x+2)^n \rightarrow \frac{1}{x}$$



3.15
РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯД ФУРЬЕ

Сходимость ряда Фурье. Явление Гиббса

Каждой абсолютно интегрируемой на отрезке* $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ее *тригонометрический ряд Фурье*:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right).$$

*Функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, если существует интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$.

Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье называют *коэффициентами Фурье* и вычисляют по *формулам Эйлера — Фурье*:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Справедливо следующее утверждение. Если функция $f(x)$ кусочно-гладкая на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке этого отрезка. При этом, если

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right) \quad —$$

сумма тригонометрического ряда Фурье, то

$$S(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

для любого $x \in [-\pi, \pi]$ и

$$S(\pi) = \frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = S(-\pi).$$

Обозначим $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx + b_k\sin kx\right)$ n-ю частичную сумму ряда Фурье кусочно-гладкой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$. Тогда утверждение теоремы можно записать в виде:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0)$, если $f(x)$ непрерывна в точке x_0;

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, если $f(x)$ терпит разрыв первого рода (скачок) в точке x_0.

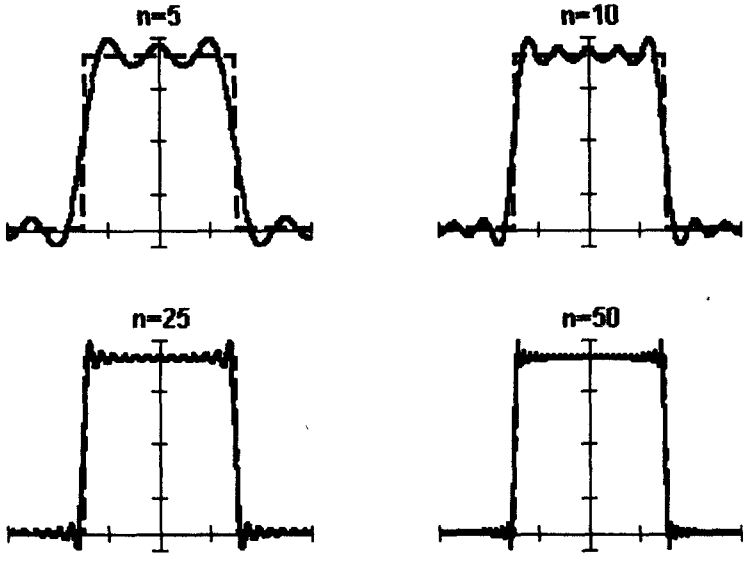
Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с графиком функции*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

и графики частичных сумм $S_n(x)$ ее ряда Фурье.

---

*Функцию такого вида рассматривал Жан Батист Жозеф Фурье в своей работе о распространении тепла в твердом теле, в которой изложены основы теории тригонометрических рядов.



На графиках видно, как сходятся частичные суммы ряда Фурье. В окрестности точек непрерывности функции $f(x)$ разность между значением функции в точке x и значением частичной суммы ряда в этой точке стремится к нулю при $n \to \infty$, что полностью соответствует теории, поскольку в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$. Видно также, что разность $S_n(x) - f(x)$ стремится к нулю тем скорее, чем дальше от точек разрыва функции расположена точка x. В окрестности точек разрыва $x_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ функции $f(x)$ частичные суммы Фурье ведут себя иначе. При этом видно, что, хотя

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0)+0}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5,$$

существуют такие последовательности $u_n \to x_0 + 0$ и $v_n \to x_0 - 0$, что пределы $S_n(u_n)$ и $S_n(v_n)$ при $n \to \infty$ *различны и оба отличаются* от $\frac{f(x_0-0)+f(x_0)+0}{2}$. Эта особенность поведения частичных сумм Фурье в окрестности точек разрыва называется *явлением Гиббса*. Явление Гиббса состоит в том, что для некоторых функций $f(x)$ в точке x_0 ее скачка существуют такие значения a, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(x_0 \pm \frac{a}{n}\right) \neq \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

Это утверждение не противоречит теории, поскольку у Гиббса рассмотрен предел $S_n(x_n)$, а в теореме — $S_n(x)$.

ЗАДАНИЕ 3.33

Исследуйте графически поведение частичных сумм ряда Фурье заданной функции $f(x)$. Вычислите значение суммы ряда Фурье в указанных точках и в точках $-\pi$, π.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов по горизонтали.
2. Определите заданную функцию переменной x и постройте ее график.
3. Найдите выражения для коэффициентов Эйлера — Фурье и для частичной суммы ряда как функции $S(x,n)$ переменных x и π.
4. Положив $n = 50$, вычислите коэффициенты Эйлера — Фурье и частичную сумму ряда $S(x,50)$.
5. Постройте графики $S(x,1)$, $S(x,2)$, $S(x,5)$, $S(x,10)$, $S(x,50)$ и сравните их между собой и с графиком $f(x)$.
6. Вычислите значения $S(x,1)$, $S(x,2)$, $S(x,5)$, $S(x,10)$, $S(x,50)$ в указанных точках и в точках $-\pi$, π.
7. Для $x = x_0$, где x_0 — точка непрерывности функции, постройте график частичной суммы $S(x,n)$ как функции переменной n.

Пример выполнения задания

Исследуйте графически поведение частичных сумм ряда Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi + x}{2}, & -\pi \le x \le 0; \\ \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Постройте графики частичных сумм для $n = 1, 2, 5, 10, 20, 50$. Вычислите значения частичных сумм ряда Фурье для $n = 10, 20, 50$ в точках $x = -\pi, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

Примерный вариант выполнения задания приведен ниже.

$$f(x) := \left| \begin{array}{ll} \dfrac{-\pi - x}{2} & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{\pi - x}{2} & \text{if } 0 < x \le \pi \end{array} \right. \qquad n := 50$$

Вычисление коэффициентов Фурье по формулам Эйлера — Фурье

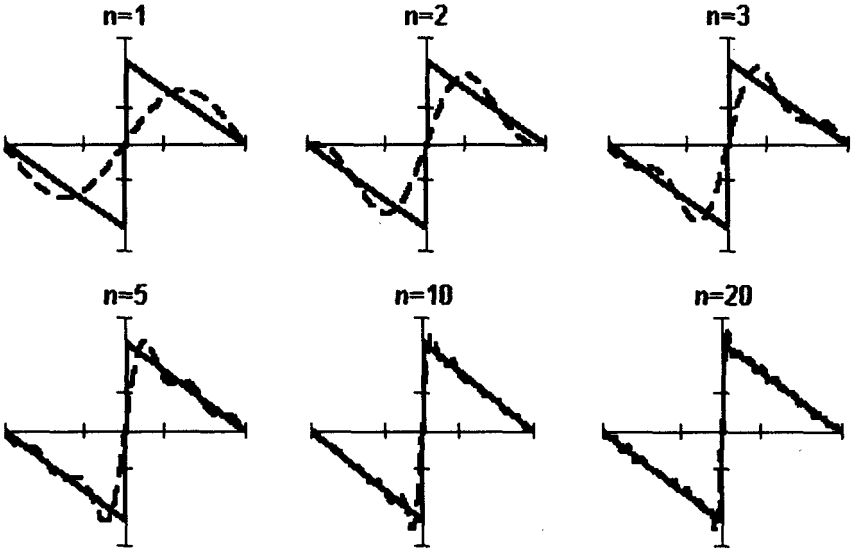
$k := 0..n$

$$a_k := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx \qquad b_k := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx$$

Вычисление частичной суммы ряда Фурье

$$S(x,n) := \frac{a_0}{2} + \left[\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\cos(k\cdot x) + b_k\cdot\sin(k\cdot x)\right)\right]$$

$$x := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{100}..\pi$$



$f(-\pi) = 0$ $\qquad$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.785$

$S(-\pi, 10) = -5.84\cdot10^{-5}$ $\qquad$ $S\left(\frac{\pi}{2}, 10\right) = 0.835$

$S(-\pi, 20) = -5.84\cdot10^{-5}$ $\qquad$ $S\left(\frac{\pi}{2}, 20\right) = 0.76$

$S(-\pi, 50) = -5.84\cdot10^{-5}$ $\qquad$ $S\left(\frac{\pi}{2}, 50\right) = 0.795$

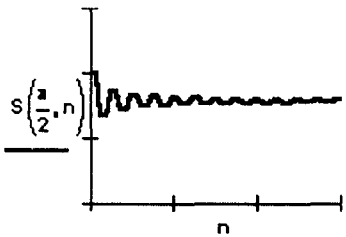
$f(0) = -1.571$ $\qquad$ $f(\pi) = 0$

$S(0,10) = -1.226 \cdot 10^{-3}$ $S(\pi,10) = -5.84 \cdot 10^{-5}$

$S(0,20) = -2.394 \cdot 10^{-3}$ $S(\pi,20) = -5.84 \cdot 10^{-5}$

$S(0,50) = -5.899 \cdot 10^{-3}$ $S(\pi,50) = -5.84 \cdot 10^{-5}$

$n := 1..50$



Указание. Для того чтобы определить функцию, заданную разными аналитическими выражениями на разных промежутках, лучше всего поступить следующим образом. Щелкнув в панели математических инструментов по кнопкам [ ], [ ], [αβ], [ ], откройте соответствующие панели и разместите их на рабочем документе, как показано на рис. 3.25. Введите имя функции переменной x, щелкните в панели калькулятора по кнопке присваивания [:=], затем в панели программирования — по кнопке [Add Line]. В рабочем документе справа от знака присваивания появится вертикальная черта с двумя помеченными строками для ввода. Перейдите в первую строку и щелкните по кнопке [if], введите слева от слова if выражение для вычисления функции, а справа — соответствующее ограничение на аргумент. При вводе выражений используйте кнопки панелей калькулятора, знаков отношений и греческого алфавита. Аналогично введите выражение во второй строке. Сохраните выражения для коэффициентов Фурье в виде векторов a и b. Для этого определите размерность вектора n равной 50 и определите диапазон изменения номера k компонент векторов a и b от 0 до n. Для того чтобы найти выражение для коэффициента Фурье a_k, введите с клавиатуры a, знак нижнего индекса (нажмите клавишу <[>), введите в позиции нижнего индекса k, вернитесь в основную строку, введите знак присваивания и выражение для коэффициента. Аналогично определите выражения для коэффициентов b_k. Частичную сумму ряда определите как функцию двух переменных — n и x. Прежде чем строить графики частичных сумм, задайте таблицу значений аргумента x на отрезке $[-\pi, \pi]$ с некоторым шагом (в рассмотренном выше примере выбран шаг $\pi/100$). Численное исследование частичных сумм состоит в сравнении значений частичных сумм для различных N со значениями функции на концах отрезка, в точке скачка и в точке непрерывности. Введите имя функции (частичной суммы), указав в скобках нужное значение аргумента, и нажмите клавишу <=>, в результате на экране будет отображено значение функции в точке. Полезную информацию о поведении частичных сумм дает график зависимости значений от n.

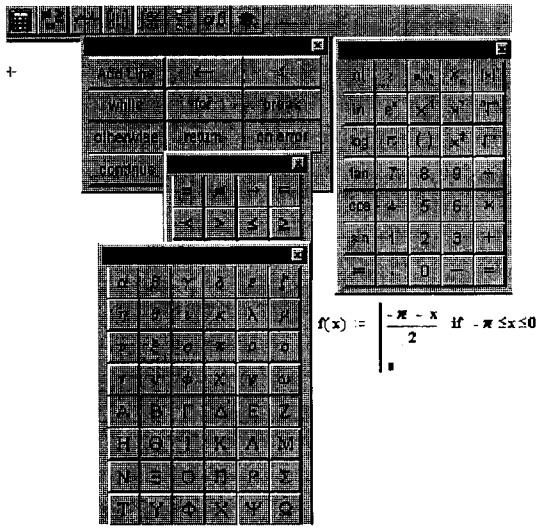


Рис. 3.25. Панели инструментов для ввода функции с использованием панели программирования

Приближение функций. Минимальное свойство коэффициентов Фурье

Функция

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(u_k \cos kx + v_k \sin kx\right),$$

где u_k, v_k — произвольные числа, называется тригонометрическим многочленом. *Тригонометрическим многочленом наилучшего приближения n-й степени* функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ называется тригонометрический многочлен $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(u_k \cos kx + v_k \sin kx\right)$, среднеквадратичное отклонение $\sigma_n(x)$ которого от функции $f(x)$ минимально:

$$\sigma_n(x) = \min_{T_n} \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - T_n(x)\right)^2 dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - P_n(x)\right)^2 dx}.$$

Для любой ограниченной интегрируемой на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ частичная сумма $S_n(x)$ ее ряда Фурье является тригонометрическим многочленом наилучшего приближения n-й степени.

ЗАДАНИЕ 3.34

Найдите для заданного значения погрешности ε тригонометрический многочлен наилучшего приближения функции $f(x)$ и наименьшей сте-

пени со среднеквадратичным отклонением, меньшим ε. Постройте график зависимости среднеквадратичного отклонения от степени многочлена.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов по горизонтали.
2. Определите заданную функцию переменной x.
3. Введите наибольшее значение n числа слагаемых в частичной сумме ряда Фурье, которое будет использовано в вычислениях*.
4. Найдите выражения для коэффициентов Эйлера — Фурье и для частичной суммы ряда как функции переменных x и n.
5. Найдите выражение для среднеквадратичного отклонения как функции степени тригонометрического многочлена n.
6. Выведите на экран таблицу значений $\sigma(k)$ среднеквадратичного отклонения для k от 1 до n.
7. Сравнивая табличные значения $\sigma(k)$ с заданным ε, найдите наименьшее k, для которого справедливо $\sigma(k) < \varepsilon$.

Пример выполнения задания

Для $f(x) = |x|$ найдите тригонометрический многочлен наилучшего приближения наименьшей степени со среднеквадратичным отклонением, меньшим 0.02. Постройте график зависимости среднеквадратичного отклонения от степени многочлена.

Примерный вариант выполнения задания для функции приведен ниже.

$$f(x) := |x| \qquad n := 30$$

Вычисление коэффициентов Фурье по формулам Эйлера — Фурье

$$k := 0..n$$

$$a_k := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx \qquad b_k := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx$$

*Введите значение $n = 30$; если этого окажется недостаточно, значение можно изменить.

Вычисление частичной суммы ряда Фурье

$$S(x,n) := \frac{a_0}{2} + \left[\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x)\right)\right]$$

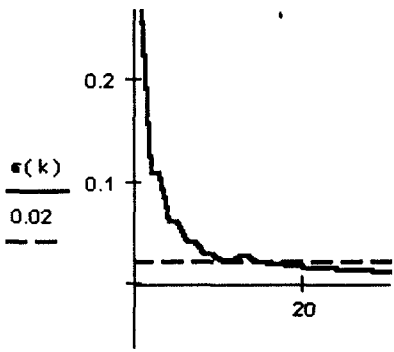
Вычисление среднеквадратичного отклонения

$$\sigma(n) := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S(x,n))^2 dx} \qquad k := 1..n \qquad s_k := \sigma(k)$$

$s^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0.273	0.273	0.109	0.109	0.061	0.061	0.04	0.04

Наименьшее значение n=15



Указание. Все операции выполняются так же, как в предыдущем задании. Для того чтобы отобразить таблицу значений среднеквадратичного отклонения по горизонтали, присвойте его значения соответствующим элементам вектора s и выведите в рабочий документ вектор s^T. Чтобы вывести в рабочий документ s^T, введите с клавиатуры s и щелкните по кнопке [M'] в панели [⁞⁞⁞].

Зависимость скорости сходимости ряда Фурье от гладкости функции

Скорость сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ зависит от ее гладкости (количества непрерывных производных). Если $f(x)$ непрерывно дифференцируема r раз на отрезке $[-\pi, \pi]$, то справедливо неравенство

$$\max_{[-\pi,\pi]} |f(x) - S_n(x)| \le K \frac{M \ln(n+1)}{n^r},$$

где $\max\limits_{[-\pi,\pi]} |f^{(r)}(x)| \le M$. Для среднеквадратичного отклонения справедлива оценка

$$\sigma_n(f) \le \frac{C}{(n+1)^r},$$

где

$$\sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx} \le C.$$

ЗАДАНИЕ 3.35

Сравните сходимость ряда Фурье для двух заданных функций разной гладкости.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов по горизонтали.
2. Определите функции и постройте их графики.
3. Найдите производные функций и постройте их графики.
4. Найдите выражения коэффициентов Фурье, частичных сумм ряда Фурье и среднеквадратичных отклонений для обеих функций.
5. Постройте графики частичных сумм и среднеквадратичных отклонений для обеих функций.
6. Выведите выражения для коэффициентов Фурье обеих функций и сравните степени номеров коэффициентов в знаменателях полученных выражений.

Пример выполнения задания

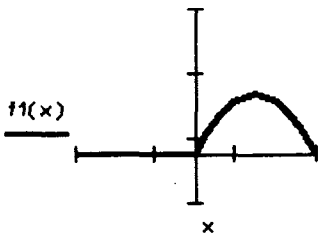
Сравните поведение частичных сумм и выражения коэффициентов Фурье для функций

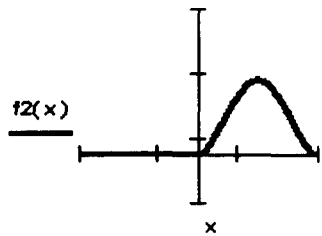
$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ -\dfrac{x(x-\pi)}{2}, & 0 < x \le \pi; \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{x^2(x-\pi)^2}{4}, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Примерный вариант выполнения задания для функции приведен ниже.

$$f1(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ -\dfrac{x\cdot(x-\pi)}{2} & \text{if } 0 < x \le \pi \end{cases} \qquad f2(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ x^2\cdot\dfrac{(x-\pi)^2}{4} & \text{if } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

$$x := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{20} .. \pi$$



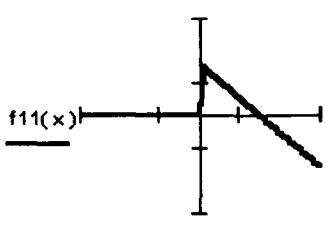


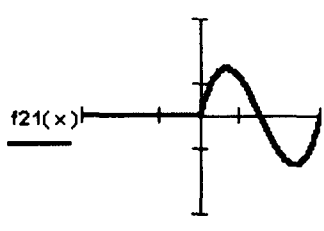
Вычисление производных 1-го порядка

$$f11(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{d}{dx}\cdot x\cdot\dfrac{(x-\pi)}{2} & \text{if } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

$$f21(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{d}{dx}x^2\cdot\dfrac{(x-\pi)^2}{4} & \text{if } 0 < x \le \pi \end{cases}$$

$$x := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{40} .. \pi$$





$n := 20 \qquad k := 0 .. n$

$$a_k := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f1(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx \qquad b_k := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f1(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx$$

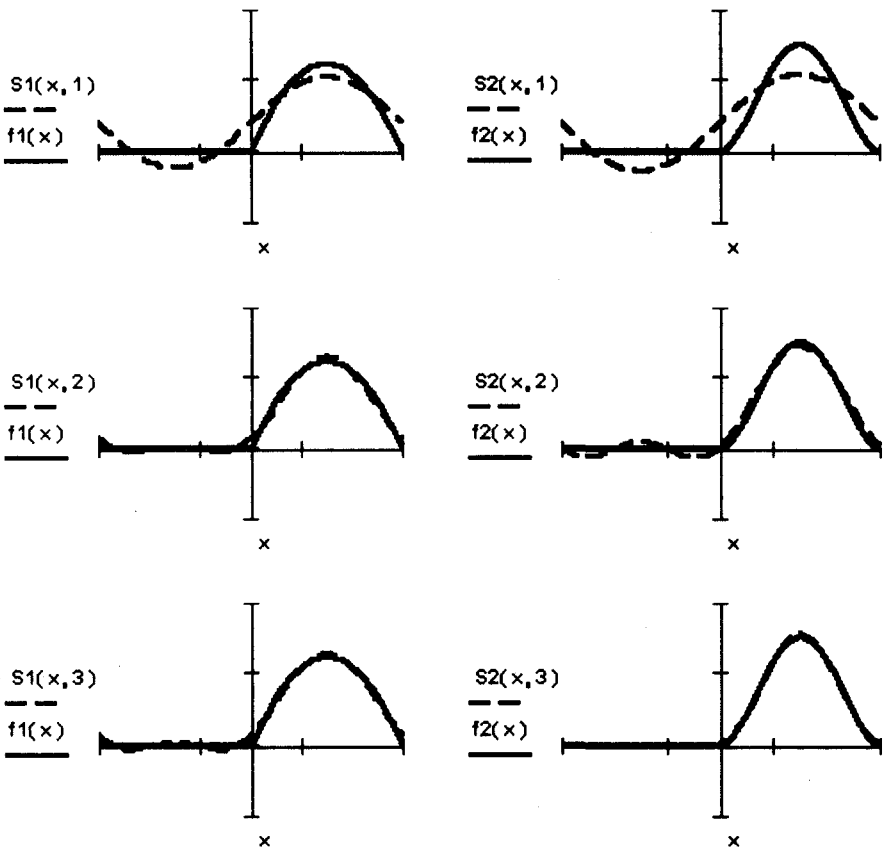
$$S1(x,n) := \frac{a_0}{2} + \left[\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\cos(k\cdot x) + b_k\cdot\sin(k\cdot x)\right)\right]$$

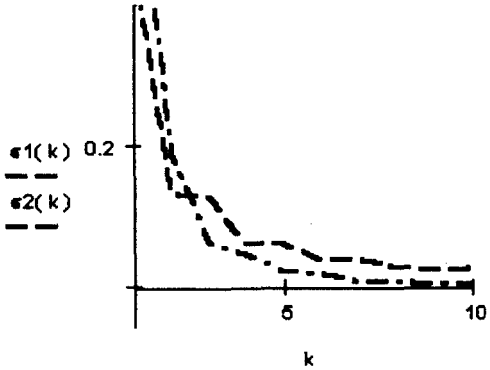
$$\sigma 1(n) := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f1(x) - S1(x,n))^2 dx}$$

$$a_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f2(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx \qquad b_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f2(x) \cdot \sin(k \cdot x)\, dx$$

$$S2(x,n) := \frac{a_0}{2} + \left[\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x) \right) \right]$$

$$\sigma 2(n) := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f2(x) - S2(x,n))^2 dx}$$





Аналитическое вычисление коэффициентов Фурье

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} -\frac{x\cdot(x-\pi)}{2}\cdot\cos(k\cdot x)\,dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{(k\cdot\cos(k\cdot\pi)\cdot\pi - 2\cdot\sin(k\cdot\pi))}{k^3} - \frac{1}{(2\cdot k^2)}\cdot\pi\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} x^2\cdot\frac{(x-\pi)^2}{4}\cdot\cos(k\cdot x)\,dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{(-12\cdot\sin(k\cdot\pi)+6\cdot k\cdot\cos(k\cdot\pi)\cdot\pi+k^2\cdot\sin(k\cdot\pi)\cdot\pi^2)}{k^5} - \frac{3}{k^4}\cdot\pi\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} -\frac{x\cdot(x-\pi)}{2}\cdot\sin(k\cdot x)\,dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{(k\cdot\sin(k\cdot\pi)\cdot\pi + 2\cdot\cos(k\cdot\pi))}{k^3} + \frac{1}{k^3}\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} x^2\cdot\frac{(x-\pi)^2}{4}\cdot\sin(k\cdot x)\,dx \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(-12\cdot\cos(k\cdot\pi) - 6\cdot k\cdot\sin(k\cdot\pi)\cdot\pi + k^2\cdot\cos(k\cdot\pi)\cdot\pi^2)}{k^5} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\cdot\frac{(-12 + k^2\cdot\pi^2)}{k^5}\right]$$

Указание. Все операции выполняются так же, как в предыдущих заданиях. Для того чтобы ввести символ производной, щелкните по кнопке в панели . Для получения аналитических выражений коэффициентов Фурье скопируйте в рабочий документ формулу для вычисления, выделите ее, щелкните по кнопке в панели и по рабочему документу правее и ниже стрелки.

Ряд Фурье на произвольном отрезке

Для кусочно-гладкой на отрезке $[-L, L]$ функции $f(x)$ задача о разложении в ряд Фурье на отрезке $[-L, L]$ линейной заменой сводится к задаче о разложении функции на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{k\pi x}{L}\right),$$

где

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx, \quad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx.$$

ЗАДАНИЕ 3.36

Исследуйте поведение частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-L, L]$.

Порядок выполнения задания

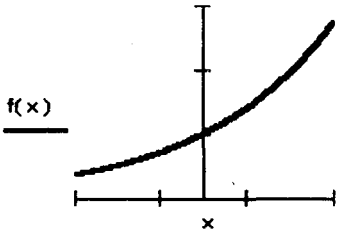
1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов по горизонтали.
2. Определите функцию и постройте ее график.
3. Определите значение L и наибольшее число слагаемых n.
4. Найдите аналитические выражения коэффициентов Фурье.
5. Постройте графики частичных сумм ряда для различных значений n.

Пример выполнения задания

Исследуйте поведение частичных сумм ряда Фурье функции $f(x) = e^x$ на отрезке $[-L, L]$.

Примерный вариант выполнения задания в Mathcad для этой функции приведен ниже.

$f(x) := \exp(x) \qquad L := 1$



$$\frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} \exp(x)\,dx \rightarrow \exp(1) - \exp(-1)$$

$$\frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} \exp(x)\cdot\cos\left(k\cdot\frac{\pi}{L}\cdot x\right)dx \rightarrow \exp(1)\cdot\frac{(\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{(1+k^2\cdot\pi^2)} + \exp(-1)\cdot\frac{(-\cos(k\cdot\pi)+k\cdot\pi\cdot\sin(k\cdot\pi))}{(1+k^2\cdot\pi^2)}$$

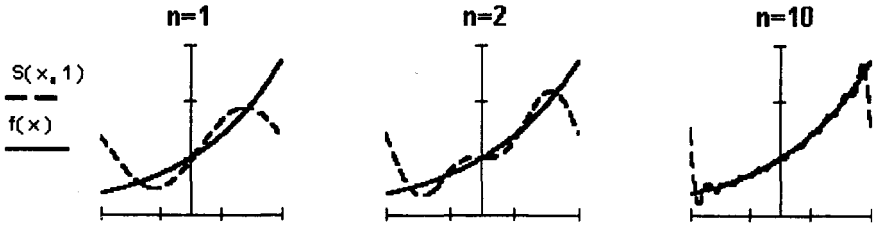
$$\frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} \exp(x)\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{L}\cdot x\right)dx \rightarrow -\exp(1)\cdot\frac{(k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)-\sin(k\cdot\pi))}{(1+k^2\cdot\pi^2)} + \exp(-1)\cdot\frac{(k\cdot\pi\cdot\cos(k\cdot\pi)+\sin(k\cdot\pi))}{(1+k^2\cdot\pi^2)}$$

$n := 10 \qquad k := 0..n$

$$a_k := \int_{-1}^{1} f(x)\cdot\cos(k\cdot\pi\cdot x)\,dx \qquad b_k := \int_{-1}^{1} f(x)\cdot\sin(k\cdot\pi\cdot x)\,dx$$

$$S(x,n) := \frac{a_0}{2} + \left[\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\cos(k\cdot\pi\cdot x) + b_k\cdot\sin(k\cdot\pi\cdot x)\right)\right]$$

$n := 1..50$



3.16 ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Графики функций двух переменных. Линии уровня. Локальные экстремумы

Переменная z (с областью изменения Z) называется *функцией независимых переменных* x, y в множестве M, если каждой паре (x,y) их значений из M по некоторому правилу или закону ставится в соответствие одно определенное значение z из множества Z.

Множество M — область определения функции, множество Z — область ее значений. Функциональная зависимость z от x, y обозначается так: $z = z(x,y)$, $z = f(x,y)$, $z = \varphi(x,y)$ и т.п.

Возьмем в пространстве систему координатных осей x, y, z, изобразим на плоскости xOy множество M; в каждой точке (x, y) этого множества восстановим перпендикуляр к плоскости и отложим на нем значение $z = f(x,y)$.

Геометрическое место полученных таким образом точек и является *пространственным графиком функции* $z = f(x,y)$.

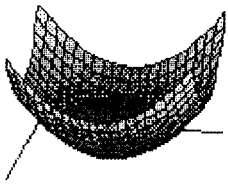
Фрагмент рабочего документа Mathcad с графиками функций $z = x^2 + y^2$, $u = xy$, $v = \sin(x^2 + y^2)$ приведен ниже.

$f(x,y) := x^2 + y^2$ $\quad$ $g(x,y) := x \cdot y$ $\quad$ $h(x,y) := \sin(f(x,y))$

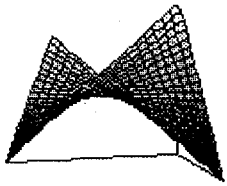
$N := 20$ $\quad$ $i := 0..N$ $\quad$ $j := 0..N$

$x_i := -2 + 0.2 \cdot i$ $\quad$ $y_j := -2 + 0.2 \cdot j$

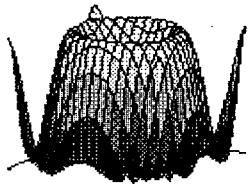
$z_{i,j} := f(x_i, y_j)$ $\quad$ $u_{i,j} := g(x_i, y_j)$ $\quad$ $v_{i,j} := h(x_i, y_j)$



z



u



v

Указание. Для того чтобы построить в Mathcad график функции двух переменных, необходимо предварительно вычислить значения функции на прямоугольной сетке, т.е. построить таблицу значений функции. Для этого введите с клавиатуры имя функции двух переменных f(x,y), знак равенства и выражение для ее вычисления. Присвойте переменной N значение, равное количеству узлов квадратной сетки в плоскости переменных x, y. Определите диапазон изменения

целых индексов i и j узлов сетки x_i, y_j соответственно. Для этого введите i:=0..N и j:=0..N (нажмите последовательно на клавиатуре клавиши <i><=><0><;><N> и <j><=><0><;><N>). Определите значения x_i из промежутка $[-2, 2]$ с шагом 0.2; введите с клавиатуры x, нажмите клавишу <[>, введите в позиции нижнего индекса i, знак присваивания и выражение для вычисления x_i. Аналогично определите узлы y_j. Табличные значения z_{ij} определите как значения функции в узлах сетки, $z_{ij} = f(x_i, y_j)$. Таким же образом определите значения двух других функций. Затем щелкните в панели по кнопке , введите в помеченной позиции имя z и щелкните по рабочему документу вне поля графиков. Дважды щелкните по полю графиков и установите в окнах параметры изображения. На рис. 3.26 представлен вид окон настройки графиков, приведенных в документе. Графики функций $u = xy$ и $v = \sin(x^2 + y^2)$ постройте таким же способом. При работе с панелями настройки параметров изображения можно посмотреть результат, полученный при изменении параметра изображения, не закрывая панели. Для этого после изменения параметра щелкните по кнопке Применить .

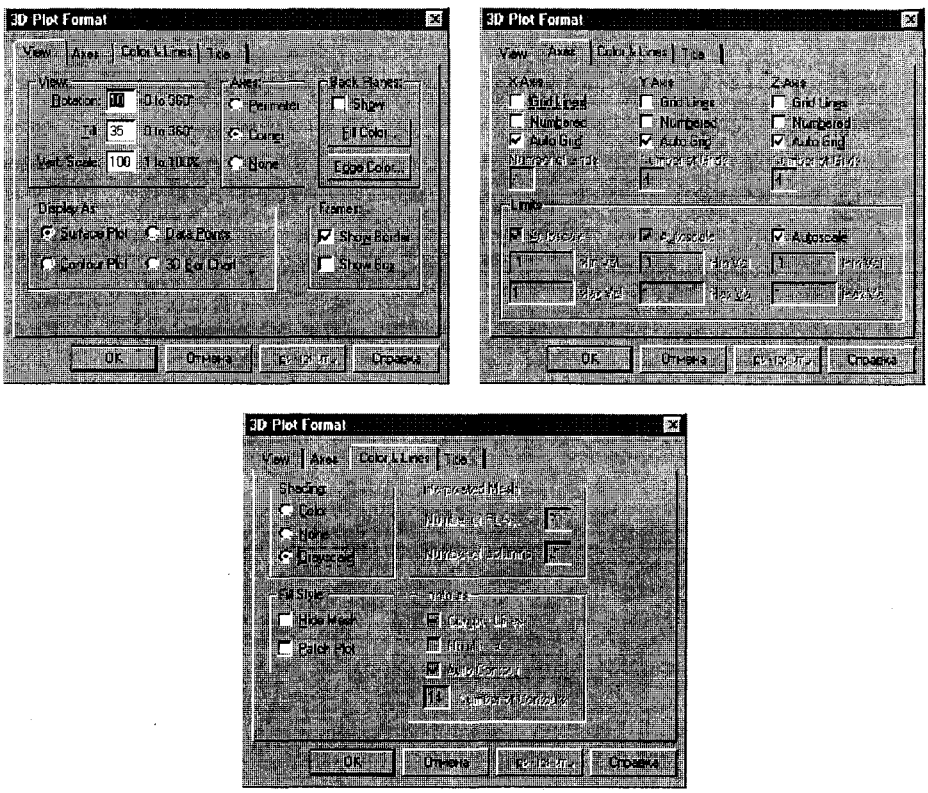


Рис. 3.26. Панели настройки параметров изображения

Линией уровня функции двух переменных x и y называется геометрическое место точек в плоскости xOy, в которых функция принимает одно и то же значение. Линии уровня функции $z = f(x, y)$ определяются уравнением $f(x, y) = C$, где $C = \text{const}$.

Рассматривая линии уровня функции двух переменных, можно исследовать характер изменения функции, найти (приближенно, но как угодно точно) координаты точек экстремума. На рис. 3.27 приведены линии уровня функций, графики которых изображены выше.

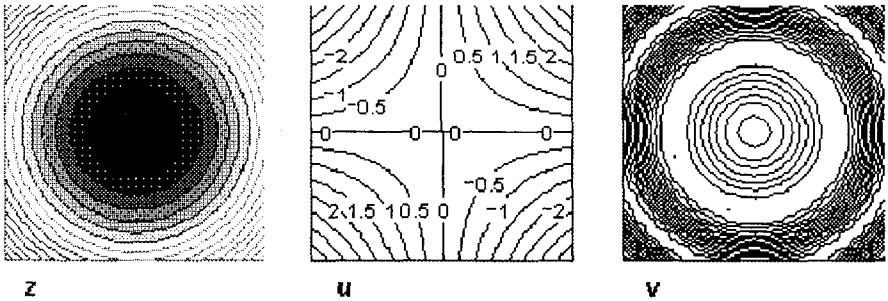


Рис. 3.27. Линии уровня функций двух переменных

Указание. Линии уровня можно построить, щелкнув в панели графиков по кнопке . В данном случае использован другой способ — линии уровня получены изменением параметров настройки графиков. На рис. 3.28 изображены панели настройки параметров графиков линий уровня для каждого из графиков, приведенных на рис. 3.27.

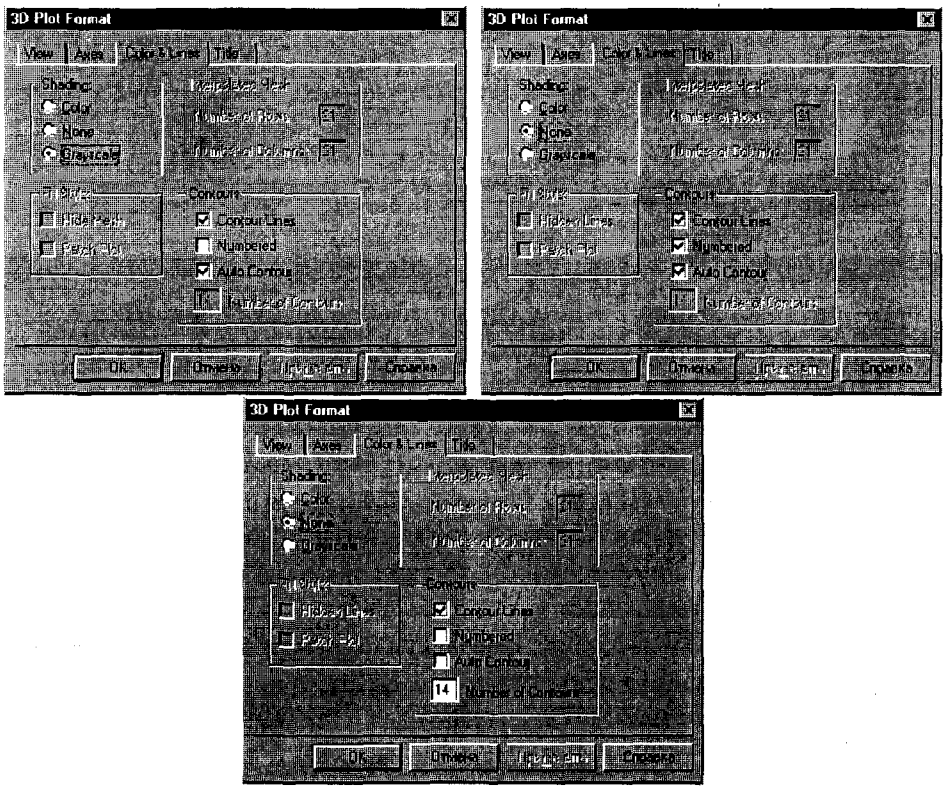


Рис. 3.28. Панели настройки параметров изображений линий уровня

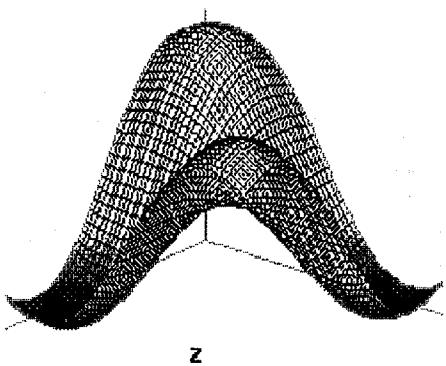
Точка $(x_0, y_0) \in \Omega$ называется точкой *локального минимума** (*максимума*) функции $z = f(x,y)$, определенной в области Ω, если существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0, y_0) \subset \Omega$, что для всех точек $(x,y) \in \overset{\circ}{U}(x_0, y_0)$ справедливо неравенство $f(x_0, y_0) \le f(x,y)$ $(f(x_0, y_0) \ge \ge f(x,y))$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с построением графика функции $z = \sin\frac{xy}{5}\exp\left(-x^2 - y^2\right)$ в области $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$.

$$f(x,y) := \sin\left(\frac{x \cdot y}{10}\right) \cdot \exp(-x^2 - y^2)$$

$$N := 50 \qquad i := 0..N \qquad j := 0..N$$

$$x_i := -1 + \frac{1}{25} \cdot i \qquad y_j := -1 + \frac{1}{25} \cdot j \qquad z_{i,j} := f(x_i, y_j)$$



Из графика видно, что функция имеет локальные минимумы и локальные максимумы.

На рис. 3.29 слева изображены линии уровня без числовой индикации, справа — на каждой линии уровня написано соответствующее значение функции. Видно, что в изображенной области функция имеет два локальных минимума (во втором и четвертом квадрантах), координаты точек локального минимума можно определить приближенно (это точки $(0.6, -0.6)$ и $(-0.6, 0.6)$), и две точки локального максимума (в первом и третьем квадрантах) — это точки $(0.6, 0.6)$ и $(-0.6, -0.6)$. Точка $(0, 0)$ — седловая точка. Поведение функции в окрестности этой точки близко к поведению функции $u = xy$, график которой — гиперболический параболоид — называют "седлом".

*Такие экстремумы (максимумы и минимумы) называют *нестрогими*. *Строгие* экстремумы имеют место в случае, когда выполнены строгие неравенства.

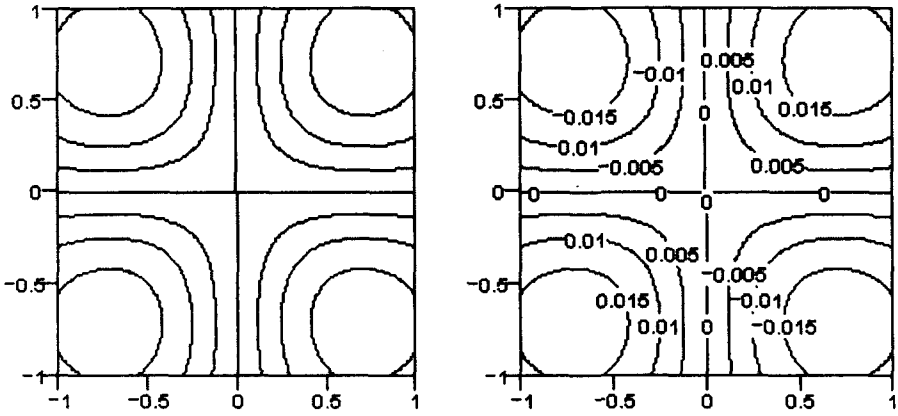


Рис. 3.29. Линии уровня функции $z = \sin\frac{xy}{5}\exp\left(-x^2 - y^2\right)$

ЗАДАНИЕ 3.37

Изобразите график и линии уровня функции $z = f(x,y)$ в указанном прямоугольнике $a < x < b$, $c < y < d$. Опишите поведение функции в заданной области (укажите приближенно координаты локальных экстремумов и седловых точек, если они есть).

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Введите определение функции.
3. Определите в плоскости переменных (x, y) прямоугольную сетку $x_i = a + ih$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $y_j = a + ih$, $j = 1, 2, \ldots, N$, в области $a < x < b$, $c < y < d$.
4. Сформируйте матрицу z_{ij} значений функции $z = f(x,y)$ на сетке: $z_{ij} = f(x_i, y_j)$.
5. Постройте линии уровня функции.
6. Проанализируйте картину линий уровня, найдите точки экстремума и седловые точки, если они есть, и укажите приближенно их координаты.

Пример выполнения задания

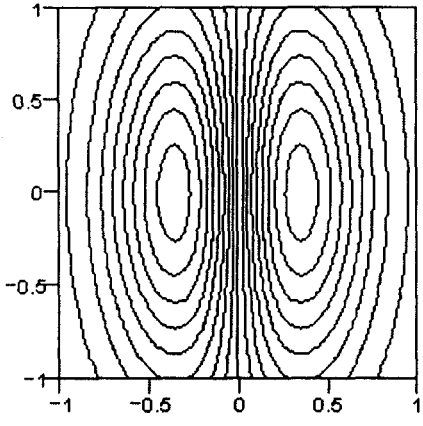
Постройте график и исследуйте поведение функции $z = x\exp\left(-x^2 - \frac{y^2}{4}\right)$ в прямоугольной области $-2 < x < 2$, $-2 < y < 2$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с линиями уровня функции z.

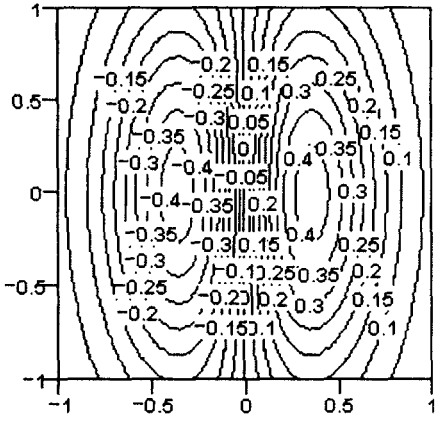
$$f(x,y) := x\cdot\exp\left(-x^2-\frac{y^2}{4}\right)$$

$N := 40 \qquad i := 0..N \qquad j := 0..N$

$x_i := -2+0.1\cdot i \qquad y_j := -2+0.1\cdot j \qquad z_{i,j} := f(x_i, y_j)$

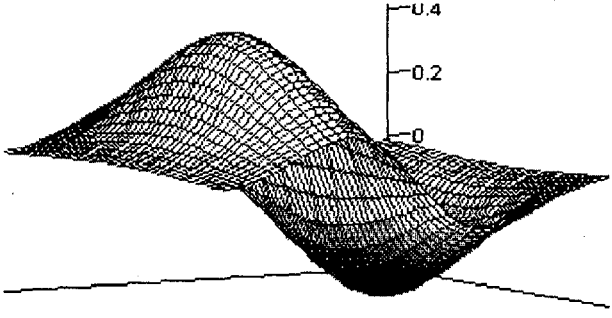


z



z

Указание. Для того чтобы построить линии уровня заданной функции, значения которой на прямоугольной сетке сохранены в матрице z, щелкните по кнопке в панели , введите в помеченной позиции имя z. Из графиков линий уровня видно, что функция имеет локальный минимум в точке $(-0.3, 0)$ (координаты определяются приближенно) и локальный максимум в точке $(0.3, 0)$. Изображенный на рис. 3.30 график функции подтверждает сделанные выводы.



z

Рис. 3.30. График функции $z = x\exp\left(-x^2-\frac{y^2}{4}\right)$

Частные производные. Производная по направлению. Градиент. Производные высших порядков

Пусть $f(x,y)$ — функция двух переменных x, y, определенная в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то говорят, что функция $f(x,y)$ имеет в точке (x_0, y_0) частную производную по переменной x. Аналогично определяется частная производная по y. Обозначают

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f'_x(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0),$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f'_y(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0).$$

Пусть $f(\boldsymbol{x})$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G \subset \mathbb{R}^n$ — функция n переменных, определенная в области G n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$.

Частной производной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменной x_i называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i} = \\ = \frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\partial x_i}.$$

Обозначаем: f'_{x_i}, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $D_{x_i} f$, $\partial_{x_i} f$.

Для приращения *дифференцируемой* функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ справедливо равенство

$$\Delta f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = f(x_1 + \Delta_1, x_2 + \Delta_2, \ldots, x_n + \Delta_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta_n + o\left(\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}\right).$$

Если в пространстве $\mathbb{R}^n$ задан единичный вектор

$$\boldsymbol{\ell} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n),$$

$$|\boldsymbol{\ell}| = \sqrt{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \ldots + \cos^2\alpha_n} = 1,$$

то изменение дифференцируемой функции $f(x)$ в направлении $\boldsymbol{\ell}$ характеризуется *производной по направлению*:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial \boldsymbol{\ell}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}} = (\operatorname{grad} f, \boldsymbol{\ell}),$$

где $(\operatorname{grad} f, \boldsymbol{\ell})$ — скалярное произведение вектора

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

на вектор направления $\boldsymbol{\ell}$.

Поскольку $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}} = |\operatorname{grad} f||\boldsymbol{\ell}|\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\operatorname{grad} f$ и $\boldsymbol{\ell}$, то вектор $\operatorname{grad} f$ указывает направление наискорейшего возрастания функции $f(\boldsymbol{x})$.

Дифференцируя частную производную как функцию нескольких переменных по одной из переменных, получим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Если смешанные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования.

Аналогично определяются производные более высоких порядков:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}$$

и т.п.

ЗАДАНИЕ 3.38

Найдите частные производные и градиент для функции $u = f(x, y, z)$. Вычислите в заданной точке производную по указанному направлению и градиент функции в этой точке. Найдите

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов по горизонтали.
2. Введите определение функции.
3. Используйте меню символьной математики для вычисления частных производных по всем переменным.
4. Определите частные производные как функции переменных x, y, z.
5. Определите вектор $\operatorname{grad} f$ как вектор, координаты которого — определенные в предыдущем пункте функции.
6. Вычислите $\operatorname{grad} f$ и $|\operatorname{grad} f|$ в указанной точке.
7. Определите вектор направления.
8. Вычислите производную по направлению в указанной точке.
9. Найдите производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
10. Найдите смешанные производные.

Пример выполнения задания

Найдите частные производные и градиент функции $u = xyze^{x+y+z}$. Вычислите в точке $M(0, 1, -1)$ производную по направлению $\ell = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ и градиент функции в этой точке. Найдите $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями.

$$\mathbf{f(x,y,z) := x \cdot y \cdot z \cdot exp(x+y+z)}$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{x \cdot y \cdot z \cdot exp(x+y+z)} \rightarrow \mathbf{y \cdot z \cdot exp(x+y+z) + x \cdot y \cdot z \cdot exp(x+y+z)}$$

$$\frac{d}{dy}\mathbf{x \cdot y \cdot z \cdot exp(x+y+z)} \rightarrow \mathbf{x \cdot z \cdot exp(x+y+z) + x \cdot y \cdot z \cdot exp(x+y+z)}$$

$$\frac{d}{dz}\mathbf{x \cdot y \cdot z \cdot exp(x+y+z)} \rightarrow \mathbf{x \cdot y \cdot exp(x+y+z) + x \cdot y \cdot z \cdot exp(x+y+z)}$$

$$\mathbf{dfx(x,y,z) := \frac{d}{dx} f(x,y,z)}$$

$$\mathbf{dfx(x,y,z) := y \cdot z \cdot exp(x+y+z) + x \cdot y \cdot z \cdot exp(x+y+z)}$$

$$\mathbf{dfx(x,y,z) := y \cdot z \cdot exp(x+y+z) \cdot (1+x)}$$

$$\mathbf{dfy(x,y,z) := \frac{d}{dy} f(x,y,z)}$$

$$dfy(x,y,z) := x\cdot z\cdot exp(x+y+z) + x\cdot y\cdot z\cdot exp(x+y+z)$$

$$dfy(x,y,z) := z\cdot x\cdot exp(x+y+z)\cdot(1+y)$$

$$dfz(x,y,z) := \frac{d}{dz}f(x,y,z)$$

$$dfz(x,y,z) := x\cdot y\cdot exp(x+y+z) + x\cdot y\cdot z\cdot exp(x+y+z)$$

$$dfz(x,y,z) := x\cdot y\cdot exp(x+y+z)\cdot(1+z)$$

$$gradf(x,y,z) := \begin{bmatrix} dfx(x,y,z) \\ dfy(x,y,z) \\ dfz(x,y,z) \end{bmatrix} \qquad I := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Вторая производная по x

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y,z) \rightarrow 2\cdot y\cdot z\cdot exp(x+y+z) + x\cdot y\cdot z\cdot exp(x+y+z)$$

$$2\cdot y\cdot z\cdot exp(x+y+z) + x\cdot y\cdot z\cdot exp(x+y+z)$$

$$y\cdot z\cdot exp(x+y+z)\cdot(2+x)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}f(x,y,z) \rightarrow z\cdot exp(x+y+z)\cdot(1+x)\cdot(1+y)$$

Указание. Частные производные функции нескольких переменных можно вычислить разными способами. В приведенном фрагменте использованы два способа. Щелкните по кнопке [$\frac{d}{dx}$] в панели [$\int\frac{dy}{dx}$], введите в помеченных позициях выражение для функции и переменную, по которой вычисляется производная, затем щелкните по кнопке [▪→] в панели [🎓] и по рабочему документу правее и ниже стрелки. Выражение для производной будет отображено в рабочем документе справа от стрелки. Для того чтобы определить частную производную по x как функцию переменных x, y, z, присвойте ей имя и перечислите в скобках аргументы (в приведенном фрагменте имя частной производной по x — dfx(x, y, z)), введите знак присваивания и, как описано выше, используя кнопки соответствующих панелей, введите справа оператор дифференцирования по x. Заключите правую часть оператора присваивания в выделяющую рамку и щелкните по строке **Simplify** в меню **Symbolics** (рис. 3.31). Полученное выражение можно упростить. Выделите рамкой правую часть полученного для производной выражения и щелкните по строке **Factor** в меню **Symbolics** (рис. 3.31).

Для того чтобы вычислить модуль градиента в указанной точке, щелкните по кнопке [|x|] в панели [⁞⁞⁞] и введите в помеченной позиции имя вектора. Совершенно аналогично введите вектор направления и вычислите его модуль. И,

наконец, вычислите производную по направлению как скалярное произведение соответствующих векторов — щелкните по кнопке $\vec{x} \times \vec{y}$ в панели и введите в помеченных позициях имена векторов-сомножителей.

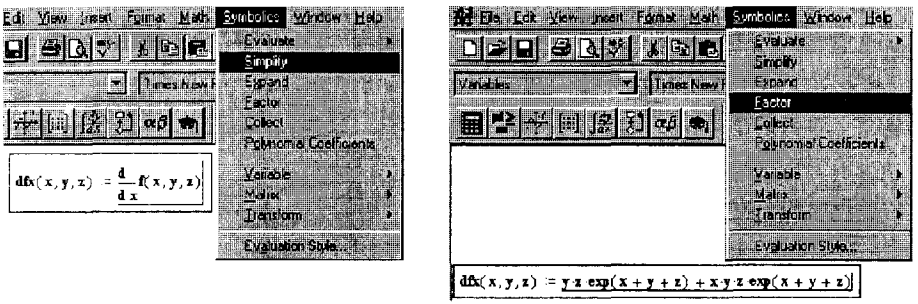


Рис. 3.31. Символьное дифференцирование и упрощение выражения для производной

3.17 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Формулы Тейлора и Маклорена. Аппроксимация функции многочленом

Если функция $z = f(x,y)$ имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) непрерывные частные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, то для любой точки (x, y) из этой окрестности справедлива *формула Тейлора* n-го порядка:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0) + o(\rho^n),$$

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$,

$$\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) \equiv (x-x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y},$$

$$\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) \equiv$$

$$\equiv (x-x_0)^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$$

и т.д.

Формула Тейлора, записанная в окрестности точки $(0,0)$, называется *формулой Маклорена*. Например, для $n=2$ в окрестности точки $(0,0)$ справедлива формула Маклорена:

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y+\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}x^2+$$
$$+2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}xy+\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}y^2+0(\rho^2).$$

Выражение

$$T_n(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\Big((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\Big)^k f(x_0,y_0)$$

называется *многочленом Тейлора n-го порядка.*

Из формулы Тейлора видно, что $f(x,y)-T_n(x,y)=o(\rho^n)$; это означает, что в окрестности точки (x_0,y_0) функцию можно приближенно заменить, или, как говорят, *аппроксимировать*, ее многочленом Тейлора, т.е. $f(x,y)\approx T_n(x,y)$. Чем ближе точка (x,y) к точке (x_0,y_0), тем выше точность такой аппроксимации; кроме того, точность аппроксимации растет с ростом величины n. Это означает, что, чем больше непрерывных производных имеет функция $f(x,y)$, тем с более высокой точностью многочлен Тейлора $T_n(x,y)$ аппроксимирует функцию $f(x,y)$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x,y)=\sin(x+\sin y)$ в окрестности точки $M(1,2)$. Запишем для нее многочлены Тейлора нулевого, первого и второго порядка:

$$T_0(x,y)=f(1,2),$$

$$T_1(x,y)=f(1,2)+\frac{\partial f(1,2)}{\partial x}(x-1)+\frac{\partial f(1,2)}{\partial y}(y-2),$$

$$T_2(x,y)=f(1,2)+\frac{\partial f(1,2)}{\partial x}(x-1)+\frac{\partial f(1,2)}{\partial y}(y-2)+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x^2}(x-1)^2+2\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x\partial y}(x-1)(y-2)+\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial y^2}(y-2)^2\Big).$$

Вычислим точные* значения функции и ее многочленов Тейлора T_0, T_1, T_2 в точках $M_0(1.4,2.8)$, $M_1(1.2,2.4)$ и $M_2(0.99,1.98)$ и расстояния этих точек до точки M.

*Здесь не обсуждаются погрешности округления, возникающие при любых вычислениях с действительными числами.

На рис. 3.32 приведена таблица соответствующих значений, вычисленных в Mathcad. В 1-й строке таблицы приведены расстояния от точки M до точек M_0, M_1 и M_2. Во 2-, 3-, 4- и 5-й строках соответственно — значения T_0, T_1, T_2 и $f(x,y)$, вычисленные в точках M_0, M_1 и M_2 (в правой таблице — разности $f(x,y) - T_i$ и значения $f(x,y)$).

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M_0 & M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.89443 & 0.44721 & 0.02236 \\ 0.94325 & 0.94325 & 0.94325 \\ 0.92098 & 0.93212 & 0.94381 \\ 1.01548 & 0.95574 & 0.94387 \\ 0.98655 & 0.95395 & 0.94387 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \rho \\ T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ F \end{array} \qquad R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M_0 & M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.89443 & 0.44721 & 0.02236 \\ 0.0433 & 0.01069 & 6.1585\cdot 10^{-4} \\ 0.06557 & 0.02183 & 5.89419\cdot 10^{-5} \\ -0.02893 & -1.79407\cdot 10^{-3} & -1.2236\cdot 10^{-7} \\ 0.98655 & 0.95395 & 0.94387 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \rho \\ F\text{-}T_0 \\ F\text{-}T_1 \\ F\text{-}T_2 \\ F \end{array}$$

Рис. 3.32. Значения первых трех многочленов Тейлора и точные значения функции

Из приведенных данных видно, что для каждого многочлена Тейлора с уменьшением расстояния до точки M уменьшается погрешность аппроксимации (разность между значением многочлена и значением функции в точке): для многочлена T_0 она уменьшается от 0.09 в точке M_0 до 0.0006 в точке M_2, т.е. приблизительно в сто пятьдесят раз, тогда как расстояние до точки M уменьшилось приблизительно в сорок раз; для многочлена T_1 погрешность уменьшилась от 0.06557 до 0.00006, а для T_2 — от 0.02893 до нуля (с точностью до пятого десятичного знака). С другой стороны, погрешность в каждой точке уменьшается с ростом степени многочлена: в точке M_0 — от 0.09 до 0.02893, в точке M_1 — от 0.0107 до 0.00179 и в точке M_0 — от 0.0006 до нуля. Приведенные числовые данные подтверждают, что в достаточно малой окрестности точки можно заменять значение функции значениями ее многочлена Тейлора.

ЗАДАНИЕ 3.39

Запишите для заданной функции $z = f(x,y)$ многочлены Тейлора нулевого, первого и второго порядка в окрестности указанной точки. Вычислите и сравните значения многочленов и функции в указанных точках. Приведите вычисленные значения в виде таблицы. Исследуйте зависимость погрешности аппроксимации функции многочленом Тейлора от расстояния между точками и от степени многочлена.

Выполните вычисления для функции из задания 3.37. Сравнивайте значения многочленов Тейлора в середине и в любых двух вершинах указанного прямоугольника.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов по горизонтали.
2. Введите определение функции.
3. Найдите частные производные первого порядка.
4. Найдите все частные производные второго порядка.
5. Вычислите значения производных в заданной точке.
6. Запишите выражения для многочленов Тейлора нулевой, первой и второй степени как функций переменных (x, y).
7. Вычислите расстояния от заданных точек до центра окрестности, значения функции и многочленов Тейлора в заданных точках; присвойте вычисленные значения элементам матрицы и выведите их в виде таблицы (матрицы).

Пример выполнения задания

Выполните задание для функции $f(x,y) = \sin(x + \sin y)$ из рассмотренного выше примера в окрестности точки $M(1, 2)$. Вычислите значения функции и ее многочленов Тейлора T_0, T_1, T_2 в точках $M_0(1.4, 2.8)$, $M_1(1.2, 2.4)$ и $M_2(0.99, 1.98)$.

Фрагмент рабочего документа с соответствующими вычислениями приведен ниже.

$$f(x,y) := \sin(x + \sin(y))$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x + \sin(y)) \qquad \cos(x + \sin(y))$$

$$fx(x,y) := \cos(x + \sin(y)) \qquad f(1,2) = 0.94325$$

$$\frac{d}{dy}\sin(x + \sin(y)) \qquad \cos(x + \sin(y))\cdot\cos(y)$$

$$fy(x,y) := \cos(x + \sin(y))\cdot\cos(y)$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x + \sin(y)) \qquad -\sin(x + \sin(y))$$

$$fxx(x,y) := -\sin(x + \sin(y))$$

$$\frac{d}{dy}\cos(x + \sin(y))\cdot\cos(y)$$

$$-\sin(x + \sin(y))\cdot\cos(y)^2 - \cos(x + \sin(y))\cdot\sin(y)$$

$$fyy(x,y) := -\sin(x + \sin(y))\cdot\cos(y)^2 - \cos(x + \sin(y))\cdot\sin(y)$$

$$\frac{d}{dy}\cos(x+\sin(y)) \qquad -\sin(x+\sin(y))\cdot\cos(y)$$

$$fxy(x,y) := -\sin(x+\sin(y))\cdot\cos(y)$$

$a := fx(1,2)$ $\qquad b := fy(1,2)$

$a = -0.33207$ $\qquad b = 0.13819$

$A := fxx(1,2)$ $\qquad B := fxy(1,2)$ $\qquad C := fyy(1,2)$

$A = -0.94325$ $\qquad B = 0.39253$ $\qquad C = 0.1386$

$$T0(x,y) := f(1,2)$$

$$T1(x,y) := T0(x,y) + a\cdot(x-1) + b\cdot(y-2)$$

$$T2(x,y) := T1(x,y) + \frac{1}{2!}\cdot\left(A\cdot(x-1)^2 + 2\cdot B\cdot(x-1)\cdot(y-2) + C\cdot(y-2)^2\right)$$

$$r(x,y) := \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

$ORIGIN := 1$ $\qquad i := 1..3$

$x_1 := 1.4$ $\qquad x_2 := 1.2$ $\qquad x_3 := 0.99$

$y_1 := 2.8$ $\qquad y_2 := 2.4$ $\qquad y_3 := 1.98$

$F_{1,i} := r(x_i, y_i)$ $\qquad F_{2,i} := T0(x_i, y_i)$ $\qquad F_{3,i} := T1(x_i, y_i)$

$F_{4,i} := T2(x_i, y_i)$ $\qquad F_{5,i} := f(x_i, y_i)$

$R_{1,i} := r(x_i, y_i)$ $\qquad R_{2,i} := F_{5,i} - T0(x_i, y_i)$ $\qquad R_{3,i} := F_{5,i} - T1(x_i, y_i)$

$R_{4,i} := F_{5,i} - T2(x_i, y_i)$ $\qquad R_{5,i} := f(x_i, y_i)$

Указание. Все вычисления выполняйте так, как показано в документе. В приведенном фрагменте многочлены Тейлора нулевого, первого и второго порядка обозначены соответственно как T0, T1 и T2. Производные первого и второго порядка исследуемой функции обозначены fx, fy, fxx, fyy и fxy и определены соответственно как функции переменных x, y. Выражения для вычисления производных присваиваются копированием в буфер обмена из рабочего документа выражения, вычисленного средствами символьной математики.

Локальный экстремум

Обозначим через $\Delta f(x_0, y_0) = f(x,y) - f(x_0, y_0)$ приращение функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0). Если (x_0, y_0) — точка локального минимума функции $f(x,y)$, то существует окрестность $\delta(x_0, y_0)$, в которой

$\Delta f(x_0, y_0) > 0$*. Из формулы Тейлора первого порядка

$$\Delta f(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) + 0(\rho)$$

следует, что приращение $\Delta f(x_0,y_0)$ дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x,y)$ сохраняет знак, если *главная линейная* часть приращения функции в точке экстремума (максимума или минимума) равна нулю, т.е. выполнено *необходимое условие экстремума.*

Если (x_0, y_0) — точка локального экстремума функции $f(x,y)$, то в этой точке обращаются в нуль обе частные производные первого порядка: $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$.

Такая точка называется *стационарной точкой.* Если в точке (x_0, y_0) выполнено необходимое условие экстремума, то приращение функции в этой точке имеет вид

$$\Delta f(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \\ + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 + 0(\rho).$$

Обозначим

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}.$$

Справедливо следующее *достаточное условие экстремума.* Пусть функция $f(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) и

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0.$$

Если $AC - B^2 > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция достигает экстремума. При этом если $A > 0$, то этот экстремум — минимум, а если $A < 0$, то этот экстремум — максимум. Если же $AC - B^2 < 0$, то в точке (x_0, y_0) экстремума нет.

Геометрически достаточное условие экстремума означает, что в окрестности экстремума график функции $z = f(x,y)$ близок к поверхности параболоида $z = A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2$.

ЗАДАНИЕ 3.40

Запишите для заданной функции $z = f(x,y)$ формулу Тейлора указанного в условии порядка в окрестности указанной точки. Найдите

*Если (x_0, y_0) — точка локального максимума, то $\Delta f(x_0, y_0) < 0$.

стационарные точки функции. Исследуйте каждую из них на экстремум. Изобразите график и линии уровня функции в окрестности стационарных точек.

Выполните вычисления для функции из задания 3.37. Формулу Тейлора записывайте в центре указанного в этом задании прямоугольника.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов по горизонтали.
2. Введите определение функции.
3. Найдите частные производные функции.
4. Постройте линии уровня заданной функции.
5. Найдите стационарные точки.
6. Вычислите

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$$

в каждой стационарной точке (x_0, y_0) и исследуйте ее на экстремум.

7. Изобразите поверхность

$$z = A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2$$

и график функции $z = f(x, y)$ в окрестности каждой стационарной точки (x_0, y_0).

8. Изобразите линии уровня функции

$$z = A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2$$

и график функции $z = f(x, y)$ в окрестности каждой стационарной точки (x_0, y_0).

Пример выполнения задания

Запишите формулу Тейлора четвертого порядка для функции $z = \sin xy \exp(-x^2 - y^2)$ в окрестности точки $(1, 0)$. Найдите стационарные точки функции. Исследуйте каждую из них на экстремум. Изобразите график и линии уровня функции в окрестности стационарных точек.

Фрагмент рабочего документа с соответствующими вычислениями и графиками приведен ниже*.

*В приведенном фрагменте исследована только одна стационарная точка.

$f(x,y) := \sin(x \cdot y) \cdot \exp(-(x^2 + y^2))$

$f(x,y)$ series, $x=1, y=0, 4$ →

$y \cdot \exp(-1) - y \cdot \exp(-1) \cdot (x-1) - (x-1)^2 \cdot y \cdot \exp(-1) - \frac{7}{6} \cdot y^3 \cdot \exp(-1)$

$dfx(x,y) := \frac{d}{dx} f(x,y)$

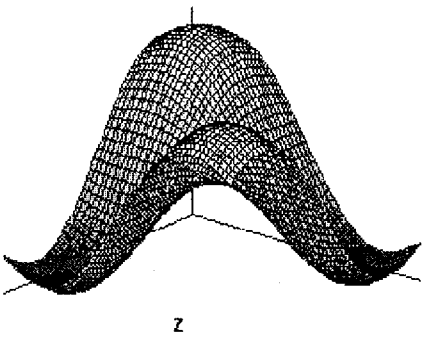
$dfx(x,y) := \exp(-x^2 - y^2) \cdot (\cos(x \cdot y) \cdot y - 2 \cdot x \cdot \sin(x \cdot y))$

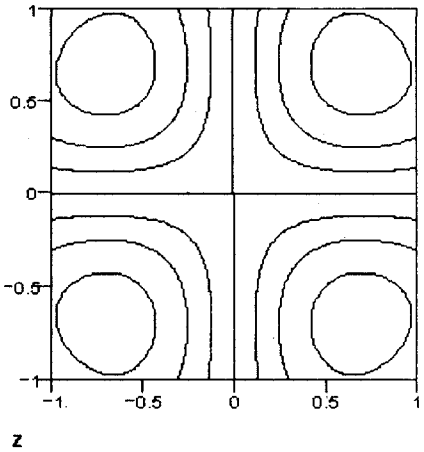
$dfy(x,y) := \frac{d}{dy} f(x,y)$

$dfy(x,y) := -\exp(-x^2 - y^2) \cdot (-\cos(x \cdot y) \cdot x + 2 \cdot \sin(x \cdot y) \cdot y)$

$N := 50$ $\quad i := 0..N$ $\quad j := 0..N$

$x_i := -1 + \frac{1}{25} \cdot i$ $\quad y_j := -1 + \frac{1}{25} \cdot j$ $\quad z_{i,j} := f(x_i, y_j)$





Given

$\exp(-x^2 - y^2) \cdot (\cos(x \cdot y) \cdot y - 2 \cdot x \cdot \sin(x \cdot y)) = 0$

$-\exp(-x^2 - y^2) \cdot (-\cos(x \cdot y) \cdot x + 2 \cdot \sin(x \cdot y) \cdot y) = 0$

$\begin{bmatrix} x0 \\ y0 \end{bmatrix} := \text{Find}(x,y)$ $\quad x0 = -0.681$ $\quad y0 = 0.681$

$A := \frac{d^2}{dx^2} f(x,y)$ $\quad B := \frac{d}{dx}\frac{d}{dy} f(x,y)$ $\quad C := \frac{d^2}{dy^2} f(x,y)$

$A = 0.775$ $\quad B = 0.113$ $\quad C = 0.775$

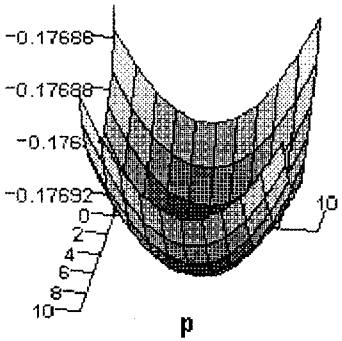
$A \cdot C - B^2 = 0.588$

$g(x,y) := A \cdot (x - x0)^2 + (2 \cdot B \cdot (x - x0) \cdot (y - y0)) + C \cdot (y - y0)^2$

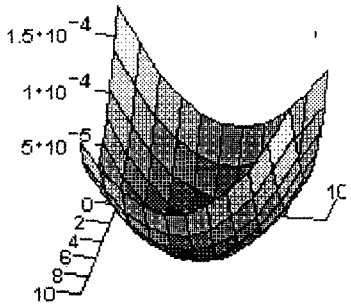
$i := 0..10$ $\qquad$ $j := 0..10$

$x_i := x0 - 0.01 + 0.002 \cdot i$ $\qquad$ $y_j := y0 - 0.01 + 0.002 \cdot j$

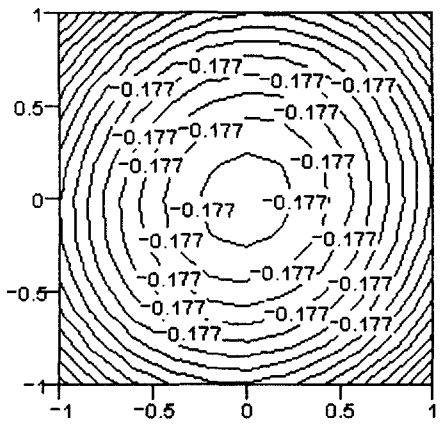
$p_{i,j} := f(x_i, y_j)$ $\qquad$ $q_{i,j} := g(x_i, y_j)$



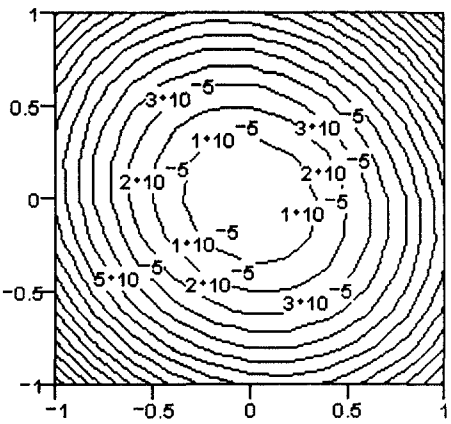
p



q



p



q

Указание. Для того чтобы получить формулу Тейлора четвертого порядка в окрестности точки (1, 0) для функции, определенной в рабочем документе именем f(x,y), воспользуйтесь панелью инструментов символьной математики. Для этого щелкните по свободному месту в рабочем документе, в панели щелкните по кнопке разложения в ряд series, введите в соответствующих позициях имя функции, координаты точки и порядок формулы: f(x,y) series, x=1, y=0, 4. Затем щелкните в рабочем документе правее и ниже стрелки. Результат — разложение по степеням $x - 1$ и y будет отображен в рабочем документе справа от стрелки. В приведенном фрагменте получено разложение

$$z = \sin xy \exp(-x^2 - y^2) = -\frac{1}{e}y - \frac{1}{e}(x-1)y - \frac{7}{6e}y^3 + o(\rho^4).$$

Частные производные первого порядка вычислите так же, как при выполнении задания 3.38. Для того чтобы определить стационарные точки, нужно решить систему двух нелинейных уравнений относительно двух переменных, символьное решение которой удается не всегда. Для отыскания численного решения задайте

начальное приближение решения. Постройте, действуя известным из предыдущего раздела образом, график поверхности и линии уровня. Определите по графику начальное приближение первой из стационарных точек (в приведенном фрагменте выбрана точка из второго квадранта). Присвойте переменным x, y начальные значения из окрестности выбранной для исследования точки. Для решения системы уравнений используйте функцию Find. Введите в рабочий документ ключевое слово Given, затем — выражения для частных производных и приравняйте их нулю, используя знак символьного равенства. Далее присвойте вектору-столбцу с двумя символьными координатами x0, y0 решение, найденное функцией Find(x,y). Для того чтобы выполнить исследование на экстремум в найденной точке, вычислите значения A, B, C и значение $AC - B^2$. В приведенном примере в точке $(x0, y0) = (0.681, 0.681)$ выполнено достаточное условие максимума. Определите функцию двух переменных, равную $A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2$, сформируйте таблицы ее значений и значений исследуемой функции в окрестности стационарной точки $x \in (x_0 - 0.01, x_0 + 0.01)$, $y \in (y_0 - 0.01, y_0 + 0.01)$, постройте их графики и линии уровня. Сравните полученные изображения. Выполните аналогичные исследования для остальных стационарных точек функции.

3.18 ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Производственные функции

Производственная функция нескольких переменных описывает зависимость объема выпускаемой продукции от затрачиваемых или используемых ресурсов, т.е. в записи $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выпуск y единиц* продукции определяется объемами x_1, x_2, ..., x_n затрачиваемых ресурсов. Естественно, что областью определения производственной функции (говорят еще: *многофакторной* производственной функции) является множество $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$.

Если производственная функция описывает технологию действующего предприятия, то в качестве ресурсов могут фигурировать затраты рабочего времени, сырья, комплектующих изделий, энергии, основного капитала. Если производственная функция описывает экономику региона, то в качестве ресурсов обычно рассматривают основной капитал, живой труд и природные ресурсы, а значением функции в этом случае обычно является совокупный продукт (доход) региона.

Рассмотрим производственную функцию двух переменных $Q = f(K, L)$, описывающую зависимость выпуска продукции Q от вложенного капитала K и затраченного труда L.

*Выпуск может измеряться как в натуральных, так и в стоимостных показателях.

График производственной функции двух переменных — поверхность в трехмерном пространстве. Линия уровня производственной функции, т.е. линия, в каждой точке которой объем выпуска при разных значениях K и L один и тот же, называется *изоквантой* или *кривой безразличия* производства. Уравнение изокванты имеет вид $f(K,L) = \text{const}$.

Уравнение касательной к изокванте $f(K,L) = Q_0$ в точке (K_0, L_0), $f(K_0,L_0) = Q_0$, записывается так:

$$(K - K_0)\frac{\partial}{\partial K}f(K_0,L_0) + (L - L_0)\frac{\partial}{\partial L}f(K_0,L_0) = 0.$$

Изокванты не пересекаются; большему объему производства отвечают изокванты, более удаленные от начала координат; касательные к изоквантам имеют отрицательный угловой коэффициент.

При исследовании свойств производственной функции используют *предельные* величины.

Предельным продуктом капитала называется предел отношения приращения количества произведенной продукции к вызвавшему это приращение приросту вложенного капитала, т.е. частная производная производственной функции $Q = f(K,L)$ по переменной K:

$$Q'_K = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{f(K + \Delta K, L) - f(K,L)}{\Delta K} = \frac{\partial}{\partial K}f(K,L).$$

Аналогично *предельным продуктом труда* называется предел отношения приращения количества произведенной продукции к вызвавшему это приращение приросту вложенного труда, т.е. частная производная производственной функции $Q = f(K,L)$ по переменной L:

$$Q'_L = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{f(K, L + \Delta L) - f(K,L)}{\Delta L} = \frac{\partial}{\partial L}f(K,L).$$

При одновременном изменении вложенного труда и капитала приращение выпуска можно приближенно вычислять по формуле

$$\Delta Q \approx Q'_K \Delta K + Q'_L \Delta L.$$

Величина $R = -\dfrac{dK}{dL}$, вычисленная в точках изокванты, называется *коэффициентом заменяемости ресурсов*. Он показывает, на сколько единиц нужно увеличить вложение капитала при уменьшении на единицу вложенного труда с тем, чтобы выпуск не изменился. Геометрический смысл коэффициента заменяемости ресурсов — угловой коэффициент касательной к изокванте.

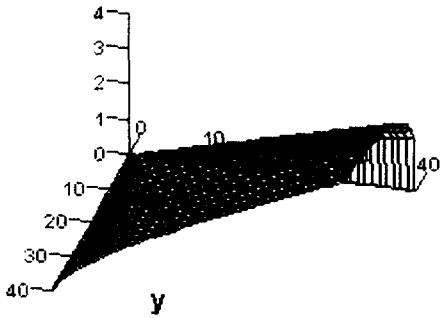
Величину $R = -\dfrac{dK}{dL}$ можно вычислить как производную функции, заданной неявно:

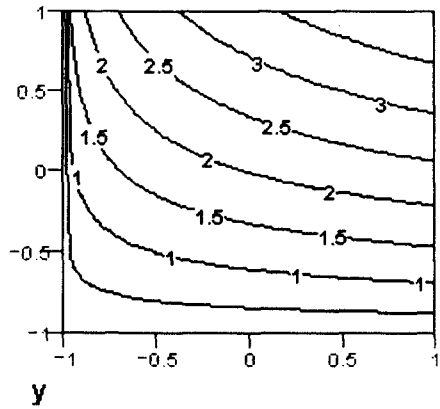
$$Q(K,L) = \text{const}, \qquad R = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial Q}{\partial L} : \frac{\partial Q}{\partial K}.$$

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с графиком производственной функции $Q = K^{1/4}L^{3/4}$ и ее изоквантами. Здесь же вычислены предельные продукты труда и капитала, а также коэффициент заменяемости ресурсов, построена изокванта $K^{1/4}L^{3/4} = 1$ и касательная к ней в точке $K = 1$, $L = 1$.

$$Q(K,L) := K^{\frac{1}{4}} \cdot L^{\frac{3}{4}}$$

$$i := 0..40 \qquad j := 0..40 \qquad k_i := i \cdot 0.1 \qquad l_j := j \cdot 0.1 \qquad y_{i,j} := Q(k_i, l_j)$$





Предельный продукт труда

$$Ql(K,L) := \frac{d}{dL}Q(K,L) \qquad Ql(K,L) \rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{K^{\left(\frac{1}{4}\right)}}{L^{\left(\frac{1}{4}\right)}}$$

Предельный продукт капитала

$$Qk(K,L) := \frac{d}{dK}Q(K,L) \qquad Qk(K,L) \rightarrow \frac{1}{\left[4 \cdot K^{\left(\frac{3}{4}\right)}\right]} \cdot L^{\left(\frac{3}{4}\right)}$$

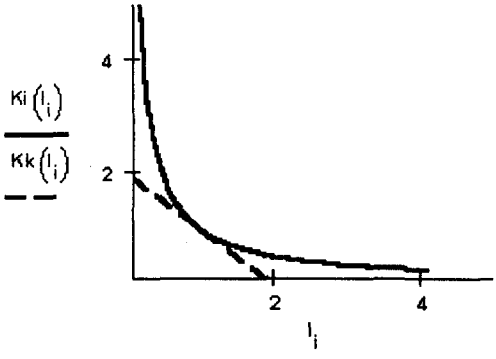
Коэффициент заменяемости ресурсов

$$R(K,L) := \frac{Ql(K,L)}{Qk(K,L)} \qquad R(K,L) \rightarrow 3 \cdot \frac{K}{L}$$

Изокванта K*L=1 и касательная к ней

$Ki(L) := \frac{1}{L}$ $\quad L0 := 1$ $\quad K0 := Ki(L0)$ $\quad K0 = 1$

$Kk(L) := 1 - (L - 1)$ $\quad i := 0..40$ $\quad l_i := (i + 1)\cdot 0.1$



ЗАДАНИЕ 3.41

Постройте график и изокванты заданной производственной функции. Вычислите предельные продукты труда и капитала, а также коэффициент заменяемости ресурсов. Постройте какую-нибудь изокванту и касательную к ней.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Определите производственную функцию как функцию двух переменных K и L.
3. Постройте график производственной функции и изокванты.
4. Найдите выражение для предельного продукта труда.
5. Найдите выражение для предельного продукта капитала.
6. Найдите коэффициент заменяемости ресурсов.
7. Запишите уравнение какой-либо изокванты, разрешите его относительно K.
8. Для произвольного фиксированного значения L вычислите соответствующее значение K на изокванте.
9. Запишите уравнение касательной к изокванте в вычисленной точке.
10. Изобразите на графике изокванту и касательную к ней.

Пример выполнения задания

Примерный вариант выполнения задания для функции $Q = K^{1/4}L^{3/4}$ приведен выше.

Эластичность производственной функции (эластичность выпуска)

Эластичность выпуска по труду E_L и *эластичность выпуска по капиталу* E_K определяются формулами:

$$E_L = \frac{L}{Q}\frac{\partial Q}{\partial L}, \qquad E_K = \frac{K}{Q}\frac{\partial Q}{\partial K}$$

и показывают, на сколько процентов произойдет относительное увеличение выпуска при относительном увеличении соответствующего ресурса на 1%.

Сумма $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$ значений эластичности выпуска по всем ресурсам называется *эластичностью производства*: $E = E_K + E_L$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисления значений эластичности функции, рассмотренной в предыдущем примере.

$$Q(K,L) := K^{\frac{1}{4}} \cdot L^{\frac{3}{4}}$$

$$Ek(K,L) := \frac{K}{Q(K,L)} \cdot \left(\frac{d}{dK} Q(K,L)\right) \qquad Ek(K,L) \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$El(K,L) := \frac{L}{Q(K,L)} \cdot \left(\frac{d}{dL} Q(K,L)\right) \qquad El(K,L) \rightarrow \frac{3}{4}$$

$$E(K,L) := Ek(K,L) + El(K,L) \qquad E(K,L) \rightarrow 1$$

ЗАДАНИЕ 3.42

Найдите значения эластичности выпуска по ресурсам и эластичности производства для производственной функции из предыдущего задания.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Определите производственную функцию как функцию двух переменных.
3. Вычислите эластичность выпуска по труду и по капиталу.
4. Вычислите эластичность производства.

Пример выполнения задания

Примерный вариант выполнения задания для функции $Q = K^{1/4}L^{3/4}$ приведен выше.

Производственная функция Кобба — Дугласа

Производственной функцией Кобба — Дугласа называется функция вида

$$Q(K,L) = AK^{\alpha}L^{\beta},$$

где Q — объем выпускаемой продукции; K — затраты капитала; L — объем трудовых затрат; A, α, β — положительные параметры, $\alpha < 1$, $\beta < 1$, причем величина A зависит от выбранных единиц измерения величин Q, K и L, а также от эффективности производственного процесса.

Для величины эффективности выпуска в модели, описываемой функцией Кобба — Дугласа, справедливы соотношения:

$$\frac{Q(K,L)}{K} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{K} = \frac{AL^{\beta}}{K^{1-\alpha}},$$

$$\frac{Q(tK,tL)}{tK} = t^{(\alpha+\beta)-1}\frac{AL^{\beta}}{K^{1-\alpha}} = t^{(\alpha+\beta)-1}\frac{Q(K,L)}{K},$$

$$\frac{Q(K,L)}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{\beta}}{L} = \frac{AK^{\alpha}}{L^{1-\beta}},$$

$$\frac{Q(tK,tL)}{tL} = t^{(\alpha+\beta)-1}\frac{AK^{\alpha}}{L^{1-\beta}} = t^{(\alpha+\beta)-1}\frac{Q(K,L)}{L}.$$

Приведенные равенства означают, что если увеличить затраты труда и капитала в t раз, то при $\alpha+\beta=1$ эффективность производства не изменится: при $\alpha+\beta<1$ она падает, а при $\alpha+\beta>1$ растет.

Предельная производительность капитала, предельная производительность труда и предельная норма замены труда капиталом для функции Кобба — Дугласа соответственно равны:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha\frac{Q}{K}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta\frac{Q}{L}, \qquad R_{KL} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = \frac{\beta K}{\alpha L}.$$

Для эластичности σ_{KL} предельной нормы замещения труда капиталом справедливо соотношение:

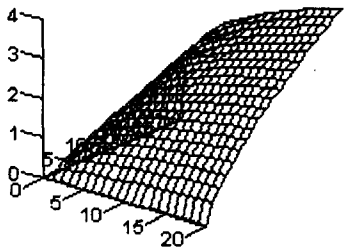
$$\sigma_{KL} = \frac{d\ln\frac{K}{L}}{d\ln R_{KL}} = \frac{\frac{L}{K}d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{\alpha L}{\beta K}d\left(\frac{\beta K}{\alpha L}\right)} = 1,$$

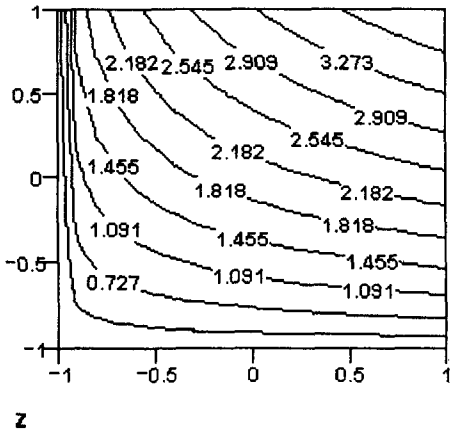
т.е. для функции Кобба — Дугласа *эластичность предельной нормы замещения труда капиталом постоянна и равна единице.* Это важнейшее свойство функции Кобба — Дугласа.

Исследование с помощью Mathcad производственной функции Кобба — Дугласа $Q(K,L) = 2K^{0.3}L^{0.7}$ представлено ниже.

$$Q(K,L) := 2\cdot K^{0.3}\cdot L^{0.7}$$

$$i := 1..20 \qquad j := 1..20 \qquad K_i := i\cdot 0.1 \qquad L_j := j\cdot 0.1 \qquad z_{i,j} := Q(K_i, L_j)$$





$$Ek(k,l) := \frac{K}{Q(K,L)}\cdot\frac{d}{dK}Q(K,L) \qquad Ek(K,L) \rightarrow .3$$

$$El(k,l) := \frac{L}{Q(K,L)}\cdot\frac{d}{dL}Q(K,L) \qquad El(K,L) \rightarrow .7$$

$$E(K,L) := Ek(K,L) + El(K,L) \qquad E(K,L) \rightarrow 1.0$$

$$R(K,L) := -\frac{\frac{d}{dL}Q(K,L)}{\frac{d}{dK}Q(K,L)} \qquad R(K,L) \rightarrow -2.3333333333333333333\cdot\frac{K^{1.0}}{L^{1.0}}$$

ЗАДАНИЕ 3.43

Изобразите график заданной функции Кобба — Дугласа двух переменных. Постройте для нее изокванты. Вычислите значение эластичности выпуска по ресурсам и предельную норму замены ресурсов.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Определите функцию Кобба — Дугласа как функцию двух переменных K и L.

3. Определите сетки значений обеих переменных и сформируйте матрицу значений в узлах сетки.
4. Постройте график функции, выбрав в окне параметров графика режим построения поверхности.
5. Постройте изокванты, выбрав в окне параметров графика режим построения линий уровня.
6. Вычислите эластичность выпуска, эластичность производства и предельную норму замены труда капиталом как функции двух переменных.

Пример выполнения задания

Примерный вариант выполнения задания для функции $y = 2x_1^{0.3}x_2^{0.7}$ приведен выше.

Производственная функция CES (функция с постоянной эластичностью замещения)

Рассмотренная выше функция Кобба — Дугласа — это производственная функция с эластичностью замещения, равной единице.

Естественным обобщением функции Кобба — Дугласа являются функции с постоянной, но не обязательно единичной, эластичностью замещения. Такие производственные функции называются CES-функциями* и имеют вид:

$$Q(K,L) = A\left(uK^{-\rho} + (1-u)L^{-\rho}\right)^{-\frac{n}{\rho}}.$$

Здесь $\rho \geq -1$, $n > 0$, $A > 0$, $0 < u < 1$.

CES-функция определена при $K > 0$, $L > 0$.

Предельная норма замещения труда капиталом для такой функции равна $\frac{1-u}{u}\left(\frac{L}{K}\right)^{-\rho-1}$:

$$R_{KL} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} = \frac{A\left(-\frac{n}{\rho}\right)\left(uK^{-\rho} + (1-u)L^{-\rho}\right)^{-\frac{n}{\rho}-1}(1-u)(-\rho)L^{-\rho-1}}{A\left(-\frac{n}{\rho}\right)\left(uK^{-\rho} + (1-u)L^{-\rho}\right)^{-\frac{n}{\rho}-1}u(-\rho)K^{-\rho-1}} =$$

$$= \frac{1-u}{n}\left(\frac{L}{K}\right)^{-\rho-1},$$

*CES — Constant Elasticity of Substitution — постоянная эластичность замещения.

а эластичность замещения постоянна и равна $\frac{1}{1+\rho}$:

$$\sigma_{KL} = \frac{d\ln\frac{K}{L}}{d\ln R_{KL}} = \frac{\frac{L}{K}d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{1}{R_{KL}}dR_{KL}} = \frac{\frac{L}{K}d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{\partial R}{\partial K}dK + \frac{\partial R}{\partial L}dL}R_{KL} =$$

$$= \frac{\frac{L}{K}d\left(\frac{K}{L}\right)}{\frac{1-u}{u}(\rho+1)\left(\frac{L}{K}\right)^{-\rho}d\left(\frac{K}{L}\right)}\frac{1-u}{u}\left(\frac{L}{K}\right)^{-\rho-1} = \frac{1}{1+\rho}.$$

Как и для функции Кобба — Дугласа, поведение эффективности определяется параметрами производственной функции и не зависит от величины K и L.

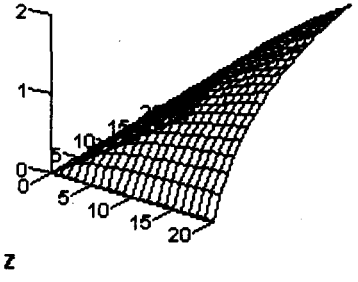
Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с определением CES-функции $Q(K,L) = 1.002\left(0.6412K^{-0.81} + 0.3588L^{-0.81}\right)^{-1/0.081}$, ее графиком и изоквантами, а также с вычислением предельной нормы замены труда капиталом и эластичности.

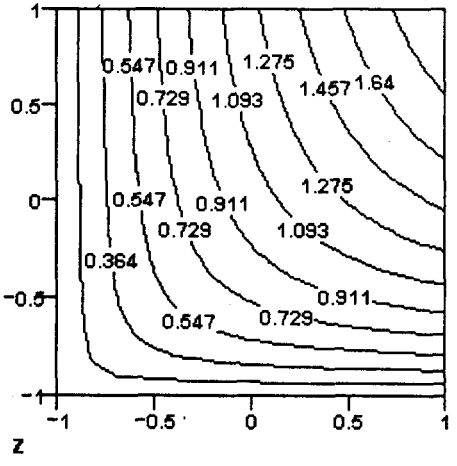
$$Q(K,L) := 1.002\cdot\left(0.6412\cdot K^{-0.81} + 0.3588\cdot L^{-0.81}\right)^{\frac{-1}{0.81}}$$

$A := 1.002 \qquad u := 0.6412 \qquad \rho := 0.81 \qquad n := 1$

$i := 1..20 \qquad j := 1..20$

$K_i := i\cdot 0.1 \qquad L_j := j\cdot 0.1 \qquad z_{i,j} := Q(K_i, L_j)$





$$R(K,L) := \frac{\frac{d}{dL}Q(K,L)}{\frac{d}{dK}Q(K,L)} \qquad R(K,L) \rightarrow \frac{.55957579538365564567}{L^{1.81}} \cdot K^{1.81}$$

$$\sigma := \frac{1}{1+\rho} \qquad \sigma = 0.552$$

ЗАДАНИЕ 3.44

Исследуйте поведение заданной CES-функции. Изобразите ее график и изокванты. Вычислите предельную норму замены труда капиталом и эластичность.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Определите заданную CES-функцию как функцию двух переменных K и L.
3. Определите сетки значений обеих переменных и сформируйте матрицу значений в узлах сетки.
4. Постройте график функции, выбрав в окне параметров графика режим построения поверхности.
5. Постройте линии уровня, выбрав в окне параметров графика режим построения линий уровня.
6. Определите предельную норму замены труда капиталом и ее эластичность как функцию двух переменных и введите выражения для их вычисления.
7. Выведите полученные выражения в рабочий документ.

Пример выполнения задания

Выше приведен примерный вариант выполнения задания для CES-функции

$$Q(K,L) = 1.002\left(0.6412K^{-0.81} + 0.3588L^{-0.81}\right)^{-1/0.081}$$

ГЛАВА 4

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1 ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ MATHCAD

Познакомимся с основными функциями Mathcad, предназначенными для численного* решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, и с некоторыми инструментами для исследования уравнений: построения фазовых кривых и векторных полей. Используемые для решения задачи Коши алгоритмы и методы исследования решений описаны в последующих разделах. Решение граничных задач и уравнений с частными производными в книге не рассматриваются.

Все функции Mathcad предназначены для решения задачи Коши нормальных системы обыкновенных дифференциальных уравнений; задача Коши для уравнений сводится к решению задачи для системы. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x_0) = y_{0,1}, \\ y_2(x_0) = y_{0,2}, \\ \ldots\ldots \\ y_n(x_0) = y_{0,n}. \end{cases}$$

Численное решение этой задачи состоит в построении таблицы приближенных значений $y_{i,1}$, $y_{i,2}$, ..., $y_{i,n}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ на отрезке $[x_0, x_N]$ в точках x_0, x_1, ..., x_N, которые называются *узлами сетки*.

Обозначив

$$\boldsymbol{Y}(x) = (y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)),$$
$$\boldsymbol{Y}_0 = (y_{0,0},\ y_{0,1},\ \ldots,\ y_{0,n}),$$
$$\boldsymbol{Y}' = (y_1'(x),\ y_2'(x),\ \ldots,\ y_n'(x)),$$
$$\boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{Y}) = (f_1(x, y_1, \ldots, y_n),\ f_2(x, y_1, \ldots, y_n),\ \ldots,\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n)),$$

*В Mathcad нет средств символьного решения дифференциальных уравнений.

где $\boldsymbol{Y}$ — искомое решение; $\boldsymbol{Y}_0$ — вектор начальных условий; $\boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{Y})$ — вектор правых частей, запишем систему дифференциальных уравнений в векторной форме:

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{Y}), \quad \boldsymbol{Y}(x_0) = \boldsymbol{Y}_0.$$

В Mathcad решить задачу Коши для такой системы можно с помощью следующих функций:

rkfixed(y, x1, x2, npoints, D) —решение задачи на отрезке методом Рунге — Кутты с постоянным шагом;

Rkadapt(y, x1, x2, npoints, D) —решение задачи на отрезке методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага;

rkadapt(y, x1, x2, acc, npoints, D, kmax, save) — решение задачи в заданной точке методом Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага;

Bulstoer(y, x1, x2, npoints, D) — решение задачи на отрезке методом Булирша — Штера;

bulstoer(y, x1, x2, acc, npoints, D, kmax, save) — решение задачи в заданной точке методом Булирша — Штера;

Stiffr(y, x1, x2, acc, D, J) — решение задачи для жестких систем на отрезке с использованием алгоритма Розенброка;

stiffr(y, x1, x2, acc, D, J, kmax, save) — решение задач для жестких систем в заданной точке с использованием алгоритма Розенброка;

Stiffb(y, x1, x2, acc, D, J) — решение задачи для жестких систем на отрезке с использованием алгоритма Булирша — Штера;

stiffb(y, x1, x2, acc, D, J, kmax, save) — решение задач для жестких систем в заданной точке с использованием алгоритма Булирша — Штера.

Смысл параметров для всех функций одинаков и определяется математической постановкой задачи:

y — вектор начальных условий $\boldsymbol{Y}_0$, $y_i = (\boldsymbol{Y})_i$;

x1, x2 — начальная и конечная точки отрезка интегрирования системы; для функций, вычисляющих решение в заданной точке, x1 — начальная точка, x2 — заданная точка;

npoints — число узлов на отрезке $[x_1, x_2]$; при решении задачи на отрезке результат содержит npoints + 1 строку;

D — имя вектора-функции* $D(x,y)$, содержащей правые части $\boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{Y})$, $D_i(x,y) = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$;

*D — Derivative (англ.) — производная, имя вектора, содержащего выражения для производных (derivatives) искомого решения.

J — имя матрицы-функции $J(x,y)$ размерности $n \times (n+1)$, в которой содержится матрица Якоби правых частей:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_n(x,y)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x,y)}{\partial y_n} \end{pmatrix};$$

acc — параметр, контролирующий погрешность решения при автоматическом выборе шага интегрирования (если погрешность решения больше acc, то шаг сетки уменьшается; шаг уменьшается до тех пор, пока его значение не станет меньше save);

kmax — максимальное число узлов сетки, в которых может быть вычислено решение задачи на отрезке (максимальное число строк в результате);

save — наименьшее допустимое значение шага неравномерной сетки.

Результат работы функции — матрица, содержащая $n+1$ столбец; ее первый столбец содержит координаты узлов сетки, второй столбец — вычисленные приближенные значения решения $y_1(x)$ в узлах сетки, $(k+1)$-й — значения решения $y_k(x)$.

При решении задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка результаты вычислений всех приведенных выше функций — матрица, в первом столбце которой содержатся координаты узлов сетки x_0, x_1, ..., x_n, а во втором — значения приближенного решения в соответствующих узлах.

Задача Коши для дифференциального уравнения порядка выше первого (n-го порядка) сводится к задаче Коши для эквивалентной нормальной системы дифференциальных уравнений n-го порядка.

Пусть $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_{0,1}$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$.

Обозначив

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y'(x), \quad \ldots,$$
$$y_k(x) = y^{(k-1)}(x), \quad \ldots, \quad y_n(x) = y^{(n-1)}(x),$$

$$y_0 = y(x_0), \quad y_{0,1} = y'(x_0), \quad \ldots,$$
$$y_{0,k} = y^{(k)}(x), \quad \ldots, \quad y_{0,n-1} = y^{(n-1)}(x),$$

получим задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений, решение которой в Mathcad описано выше:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(x_0) = y_{0,0}, \\ y_2(x_0) = y_{0,1}, \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x_0) = y_{0,n-1}. \end{cases}$$

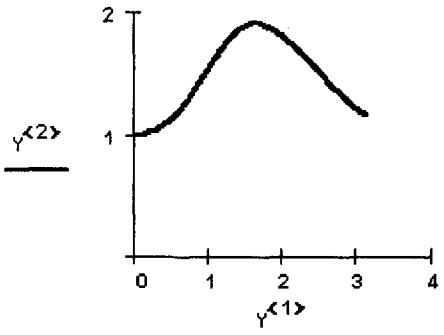
Решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Найдем на отрезке $[0, \pi]$ приближенное решение уравнения $y' = \sin xy$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, и построим график найденного решения. Решим задачу численно, используя алгоритм Рунге — Кутты с фиксированным шагом на сетке из 20 равноотстоящих узлов.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисления и график, приведен ниже.

$\mathrm{ORIGIN} := 1 \quad y_1 := 1 \quad D(x,y) := \sin(x \cdot y_1)$

$Y := \mathrm{rkfixed}(y, 0, \pi, 20, D)$



Y =

	1	2
1	0	1
2	0.157	1.012
3	0.314	1.05
4	0.471	1.115
5	0.628	1.208
6	0.785	1.331
7	0.942	1.477
8	1.1	1.633
9	1.257	1.774
10	1.414	1.874

Указание. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное 1, чтобы нумерация компонент вектора начиналась с единицы. При решении задачи Коши для уравнения первого порядка вектор решения имеет единственную компоненту y_1. Вектор правых частей также содержит одну компоненту. Перед обращением к функции rkfixed присвойте переменной y_1 начальное значение, равное единице, а переменной $D(x, y)$ — выражение для правой части уравнения, равное $\sin(x \cdot y_1)$. В приведенном фрагменте результаты вычислений функции $\mathrm{rkfixed}(y, 0, \pi, 20, D)$ присвоены матрице Y; она содержит в первом столбце координаты 20 узлов равномерной сетки на отрезке $[0, \pi]$, а во втором — приближенные значения решения в этих узлах (в приведенном документе представлена только часть таблицы). Для того чтобы вывести

в рабочий документ таблицу значений решения, нажмите на клавиатуре клавиши <Y><=>, и таблица значений будет выведена в рабочем документе справа от знака равенства. Щелкните по полю таблицы и просмотрите ее, используя стрелки прокрутки. Для того чтобы построить график решения, щелкните по кнопке в панели графиков и введите в качестве переменной на оси абсцисс $Y^{<1>}$ (столбец координат узлов сетки), а на оси ординат — $Y^{<2>}$ (столбец значений решения в узлах сетки). Чтобы ввести номер столбца, введите имя матрицы, щелкните по кнопке в панели и введите в помеченной позиции номер столбца.

Решение задачи Коши для дифференциальных уравнений высших порядков

Найдем на отрезке $[0, 3]$ приближенное решение уравнения $y'' = e^{-xy}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, и построим график найденного решения.

Сведем решение задачи для уравнения второго порядка к задаче для эквивалентной нормальной системы второго порядка. Обозначим $y_1(x) = y(x)$ и $y_2(x) = y'(x)$. Поскольку $y''(x) = \left(y'(x)\right)' = y_2'(x)$, то получим

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \exp(-xy_1), \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

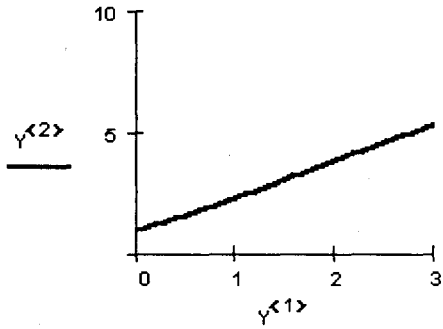
Решим задачу численно, используя алгоритм Рунге — Кутты с фиксированным шагом на сетке из 20 равноотстоящих узлов.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисления и график, приведен ниже.

$y''=\exp(-xy),\ y(0)=1,\ y'(0)=1$

$ORIGIN := 1 \qquad D(x,y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ \exp(-x \cdot y_1) \end{bmatrix}$

$y := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Y := rkfixed(y, 0, 3, 30, D)$



Y =

	1	2	3
1	0	1	1
2	0.1	1.105	1.095
3	0.2	1.219	1.179
4	0.3	1.34	1.251
5	0.4	1.469	1.313
6	0.5	1.602	1.363
7	0.6	1.741	1.403
8	0.7	1.883	1.434
9	0.8	2.027	1.457
10	0.9	2.174	1.474
11	1	2.322	1.485
12	1.1	2.471	1.494

Указание. Определите вектор y и вектор-функцию D(x, y) как матрицы размерности 2×1. Присвойте компонентам вектора y начальные значения, а компонентам вектора D(x, y) — выражения для правых частей уравнений системы. В остальном действуйте так же, как в примере 1.

Решение задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Найдем на отрезке [0, 3] приближенное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + \sin x y_3, \\ y_2' = -y_1^2, \\ y_3' = -y_3 - y_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0, \\ y_3(0) = 1 \end{cases}$$

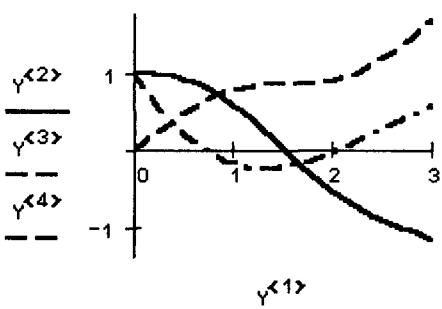
и построим графики для найденного решения. Решим задачу численно, используя алгоритм Рунге — Кутты с фиксированным шагом на сетке из 30 равноотстоящих узлов.

При решении этой задачи все действия в Mathcad выполняются совершенно так же, как при решении задачи предыдущего примера. Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисления и график, приведен ниже.

ORIGIN := 1

$$y := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D(x,y) := \begin{bmatrix} -y_2 + \sin(x \cdot y_3) \\ (y_1)^2 \\ -y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

Y := rkfixed(y,0,3,30,D)



Y =

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0.1	0.999	0.1	0.81
3	0.2	0.995	0.199	0.638
4	0.3	0.984	0.298	0.483
5	0.4	0.964	0.393	0.344
6	0.5	0.932	0.483	0.221
7	0.6	0.889	0.566	0.113
8	0.7	0.833	0.64	0.021
9	0.8	0.764	0.704	-0.057
10	0.9	0.683	0.757	-0.121
11	1	0.591	0.797	-0.17
12	1.1	0.49	0.827	-0.205
13	1.2	0.382	0.846	-0.227

Указание. Для того чтобы построить графики найденного решения (графики функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$), введите в качестве переменной на оси абсцисс $Y^{<1>}$ (столбец координат узлов сетки), а на оси ординат введите, разделяя запятой, $Y^{<2>}$, $Y^{<3>}$ и $Y^{<4>}$ (столбцы, содержащие соответственно значения $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $y_3(x)$ в узлах сетки).

Решение задачи Коши для жесткой системы

Найдем на отрезке $[0, 2]$ приближенное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = -11y_1 + 9y_2, \\ y_2' = 9y_1 - 11y_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

и построим графики найденного решения.

Эта система относится к классу жестких систем. Решим задачу численно на сетке из 20 равноотстоящих узлов с помощью функции Stiffr, предназначенной для решения жестких систем и использующей алгоритм Рунге — Кутты. Перед обращением к функции Stiffr необходимо, помимо начального вектора y и вектора правых частей $D(x,y)$, определить матрицу $J(x,y)$ размерности 2×3:

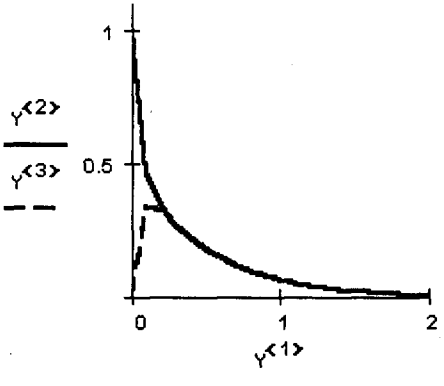
$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -11 \end{pmatrix}.$$

Все остальные действия в Mathcad выполняются совершенно так же, как при решении задач предыдущих примеров. Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисления и график, представлен ниже.

$\mathbf{ORIGIN} := 1$

$$\mathbf{y} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \begin{bmatrix} -11 \cdot y_1 + 9 \cdot y_2 \\ 9 \cdot y_1 - 11 \cdot y_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \begin{bmatrix} 0 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -11 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Y} := \mathbf{Stiffr}(\mathbf{y}, 0, 2, 20, \mathbf{D}, \mathbf{J})$



Y =

	1	2	3
1	0	1	0
2	0.1	0.477	0.342
3	0.2	0.344	0.326
4	0.3	0.276	0.273
5	0.4	0.225	0.225
6	0.5	0.184	0.184
7	0.6	0.151	0.151
8	0.7	0.123	0.123
9	0.8	0.101	0.101

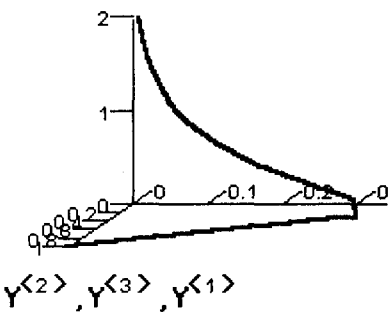
При исследовании автономных систем дифференциальных уравнений второго порядка полезную информацию можно получить, рассматривая интегральные и фазовые кривые системы.

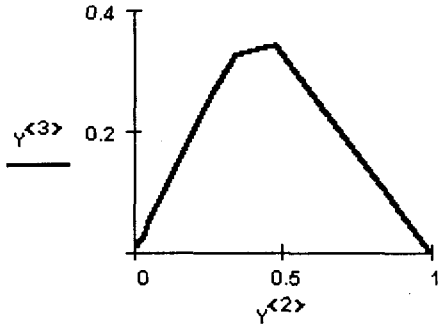
Построение интегральных и фазовых кривых автономной системы

Построим фазовую и интегральную кривые, отвечающие решению задачи из примера 4.

$$\begin{cases} y_1' = -11y_1 + 9y_2, \\ y_2' = 9y_1 - 11y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Ниже приведены изображения интегральной и фазовой кривых, решения задачи, найденного с помощью функции Stiffr.





Указание. Для того чтобы построить интегральную кривую, щелкните по свободному месту в рабочем документе, затем — по кнопке в панели графиков и введите через запятую в помеченной позиции имена векторов-столбцов матрицы решения Y: $Y^{<2>}$, $Y^{<3>}$, $Y^{<1>}$. При таком порядке следования столбцов на графике отображаются точки с абсциссами $(y_1)_i$, ординатами $(y_2)_i$ и аппликатами x_i. Параметры настройки графика установите так, как показано на рис. 4.1. Чтобы изобразить фазовую кривую, щелкните по кнопке в панели и укажите в качестве аргумента второй столбец $Y^{<2>}$, а в качестве функции — $Y^{<3>}$. При этом на оси абсцисс отображаются координаты $(y_1)_i$, на оси ординат — $(y_2)_i$. Параметры графика установите так, как показано на рис. 4.2.

При исследовании автономных систем дифференциальных уравнений второго порядка полезную информацию о свойствах решений можно получить, построив векторное поле системы.

Запишем автономную систему второго порядка

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(y_1, y_2). \end{cases}$$

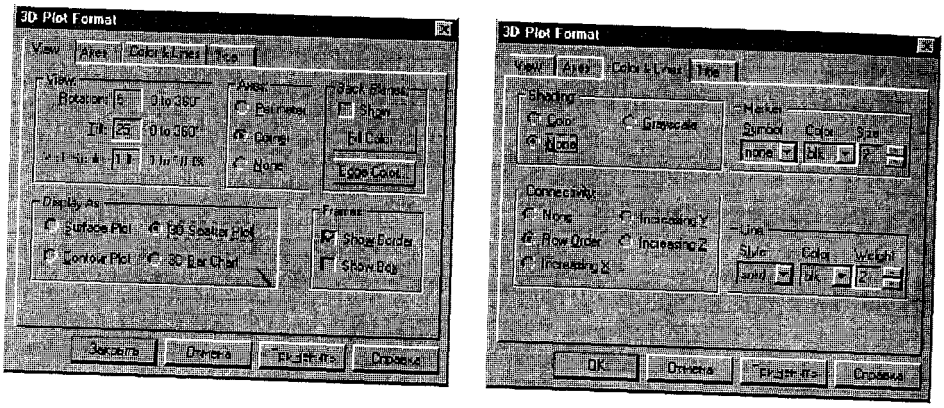


Рис. 4.1. Окна настройки параметров изображения интегральных кривых

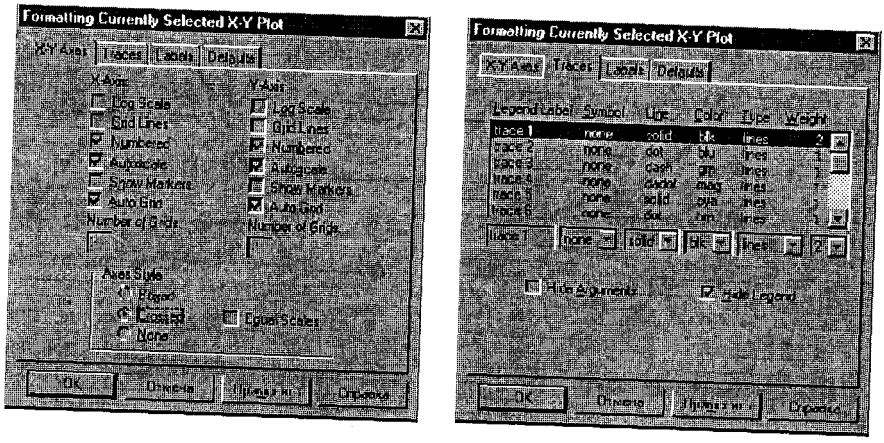


Рис. 4.2. Окна настройки параметров изображения фазовых кривых

Эта система полностью определяется заданием векторного поля $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = (f_1(y_1, y_2),\ f_2(y_1, y_2))$, поскольку векторное поле $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$ задает в каждой точке касательную и направление движения вдоль фазовой кривой системы, проходящей через эту точку.

Построение векторного поля автономной системы

Построим векторное поле системы

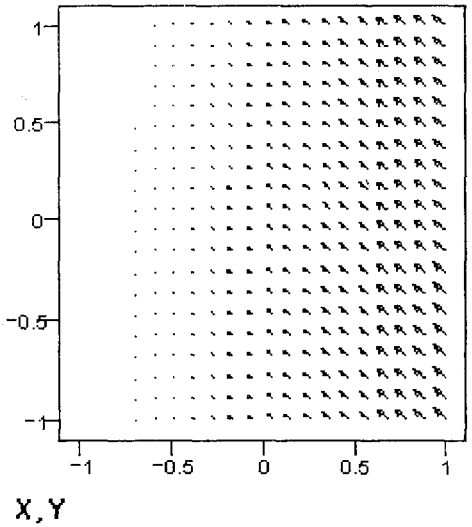
$$\begin{cases} y_1' = -11y_1 + 9y_2, \\ y_2' = 9y_1 - 11y_2. \end{cases}$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с построением векторного поля системы приведен ниже.

$ORIGIN := 1 \qquad f1(x,y) := -11\cdot x + 9\cdot y \qquad f2(x,y) := 9\cdot x - 11\cdot y$

$i := 1..20 \qquad j := 1..20 \qquad x_i := 0.05\cdot(i-1) \qquad y_j := 0.002\cdot(j-1)$

$X_{i,j} := f1(x_i, y_j) \qquad Y_{i,j} := f2(x_i, y_j)$



Указание. Введите выражения для вычисления правых частей. Определите диапазоны изменения индексов узлов сетки. Установите, как показано в документе, матрицы координат векторов векторного поля. Для того чтобы построить векторное поле, щелкните в панели графиков по кнопке векторного поля и введите в помеченной позиции через запятую сначала имя матрицы, содержащей первые координаты векторов, а затем — имя матрицы со вторыми координатами и щелкните по рабочему документу вне поля графиков. Щелкнув дважды по полю графиков, установите параметры изображения, как на рис. 4.3.

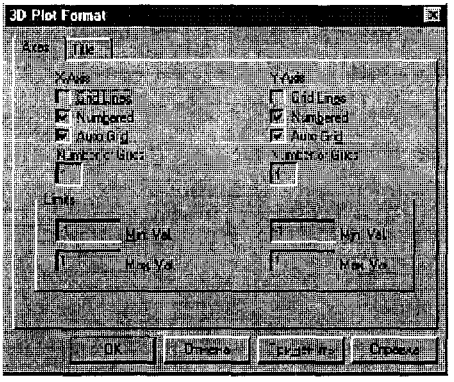


Рис. 4.3. Окно настройки параметров изображения векторного поля

4.2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$F(x,y,y') = 0,$$

где F — известная функция трех переменных, определенная в области $G \subset \mathbb{R}^3$; x — независимая переменная из интервала (a, b), $y = y(x)$ — неизвестная функция; $y' = y'(x)$ — ее производная.

Функция $y = y(x)$ называется *решением дифференциального уравнения*, если она при всех $x \in (a, b)$ удовлетворяет уравнению

$$F\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0.$$

График решения дифференциального уравнения называют *интегральной кривой* дифференциального уравнения. В дальнейшем будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно производной, т.е. уравнения в *нормальной форме*:

$$y' = f(x,y).$$

Если дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$, $(x, y) \in G$, имеет в области G решение, то, вообще говоря, таких решений бесконечно много, они могут быть заданы в виде $y = y(x,C)$, где C — произвольная константа, такая, что $(x, y(x,C)) \in G$, и $y'(x,C) \equiv f\big(x, y(x,C)\big)$ при произвольных значениях C. Однако, если поставить задачу — найти решение, удовлетворяющее *начальному условию* $y(x_0) = y_0$, то при определенных условиях такая задача имеет единственное решение. Задача об отыскании решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется *задачей Коши**.

Рассмотрим задачу Коши $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$. Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в области G, $(x_0, y_0) \in G$, то на некотором интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ существует единственное решение уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию.

Для дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ теорема существования и единственности имеет простую геометрическую интерпретацию — при непрерывных в области $G \subset \mathbb{R}^2$ правой части $f(x,y)$ и ее

*Начальные условия для обыкновенных дифференциальных уравнений называют *условиями Коши*.

частной производной $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ через каждую точку $(x_0, y_0) \in G$ проходит только одна интегральная кривая $y = y(x, C_0)$ семейства $y = y(x, C)$, такая, что $y(x_0, C_0) = y_0$. На рис. 4.4 изображено несколько интегральных кривых уравнения* $y' = y - y^2$.

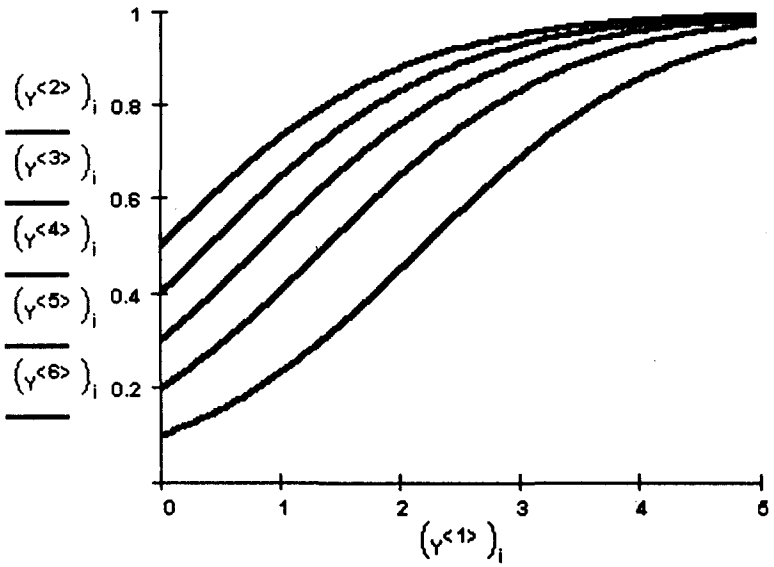


Рис. 4.4. Семейство интегральных кривых уравнения первого порядка

Уравнение с разделяющимися переменными

Для уравнения с разделяющимися переменными, имеющего вид

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y),$$

выражение

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{Y(y)} = \int_{x_0}^{x} X(x)\,dx$$

задает решение $y = y(x)$ задачи Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$ как функцию переменной x, неявно.

*Это уравнение называют уравнением *логистической модели*, которая применяется для анализа роста народонаселения, популяций и других саморазвивающихся систем.

ЗАДАНИЕ 4.1

Найдите решение уравнения с разделяющимися переменными $y' = X(x)Y(y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Изобразите график решения.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений и режим отображения результатов символьных вычислений по горизонтали.
2. Разделите аналитически (на бумаге) переменные в заданном уравнении, записав его правую часть в виде $f(x,y) = X(x)Y(y)$.
3. Определите подынтегральные функции $X(x)$ и $\frac{1}{Y(y)}$.
4. Вычислите символьно интегралы с переменными верхними пределами.
5. Запишите уравнение, задающее неявно $y(x)$ как функцию x, и решите его символьно относительно переменной y.
6. Определите решение как функцию переменной x.
7. Постройте график найденного решения.

Пример выполнения задания

Решите следующую задачу Коши: $y' = \dfrac{e^x}{y(1+e^x)}$, $y(0) = 1$. Изобразите график решения.

Разделив переменные, получим

$$y\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями и графиком приведен ниже.

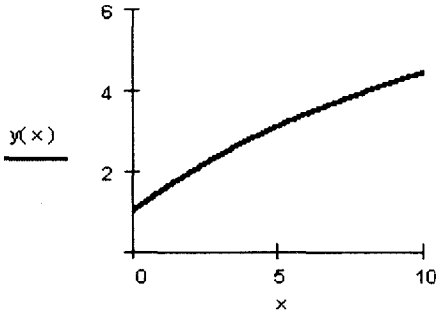
$$X(x) := \frac{\exp(x)}{1+\exp(x)} \qquad Y(y) := y$$

$$\int_0^x X(t)\,dt \rightarrow \ln(1+\exp(x)) - \ln(2) \qquad \int_1^y Y(t)\,dt \rightarrow \frac{1}{2}\cdot y^2 - \frac{1}{2}$$

$$\ln(1+\exp(x)) - \ln(2) - \left(\frac{1}{2}\cdot y^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2\cdot\ln(1+\exp(x))-2\cdot\ln(2)+1} \\ \sqrt{2\cdot\ln(1+\exp(x))-2\cdot\ln(2)+1} \end{bmatrix}$$

$$y(x) := \sqrt{2\cdot\ln(1+\exp(x))-2\cdot\ln(2)+1}$$



Указание. Для того чтобы вычислить символьно интегралы с переменными верхними пределами, щелкните по кнопке в панели , введите в помеченных позициях пределы интегрирования, подынтегральную функцию и переменную интегрирования, выделите интеграл рамкой, щелкните по кнопке в панели и затем — в рабочем документе вне выделяющей рамки. Чтобы найти явное выражение для решения, запишите в рабочем документе разность вычисленных при интегрировании функций, выделите рамкой переменную y и щелкните по строке **Solve** в пункте **Variable** меню **Symbolics** (рис. 4.5).

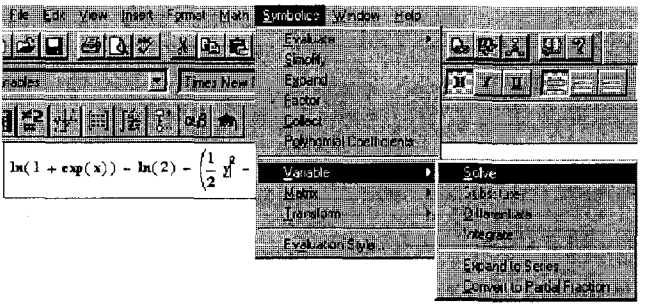


Рис. 4.5. Символьное решение уравнения

В приведенном примере уравнение имеет два решения. Выбираем второе из них, поскольку именно для него $y(0) = 1 > 0$. Для того чтобы построить график найденного решения, щелкните по кнопке в панели и введите в помеченных позициях аргумент x и имя функции переменной x.

Численное решение задачи Коши методом Рунге — Кутты

Аналитическое выражение для решений дифференциальных уравнений, за исключением линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, удается получить достаточно редко. В Mathcad нет средств символьного решения уравнений, но достаточно хорошо представлены методы численного решения задачи Коши.

Численное решение задачи Коши состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, ..., y_N решения $y(x)$ в узлах сетки x_1, x_2, ..., x_N, $y(x_i) \approx y_i$. Если $x_k = x_0 + kh$, $k = 1, 2, \ldots, N$, то сетка называется *равномерной* (h — шаг метода).

Численный метод решения задачи Коши называется *одношаговым*, если для вычисления решения в точке $x_0 + h$ используется информация о решении только в точке x_0.

Для оценки погрешности метода на одном шаге сетки точное решение раскладывают по формуле Тейлора в окрестности узла x_i:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \\ + \frac{1}{2!}y''(x_i)h^2 + \ldots + O(h^p) = y_i + f(x_i, y_i)h + \ldots + O(h^p).$$

Если расчетные формулы численного метода согласуются с разложением по формуле Тейлора до членов порядка h^p, то число p называется *порядком метода*.

Методом Рунге — Кутты обычно называют одношаговый метод четвертого порядка, относящийся к широкому классу методов Рунге — Кутты. В этом методе величины y_{i+1} вычисляются по следующим формулам:

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right),$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f\left(x_i + h, y_i + hk_3\right),$$
$$y_{i+1} = \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right).$$

Погрешность метода на одном шаге сетки равна Mh^4. Практически оценить величину M достаточно сложно. При оценке погрешности обычно используют *правило Рунге*. Для этого сначала проводят вычисления с шагом h, а затем — с шагом $\frac{h}{2}$. Если $y_i^{(k)}$ — приближение, вычисленное с шагом h, а $y_i^{(k/2)}$ — с шагом $\frac{h}{2}$, то справедлива оценка

$$\left|y_{2i}^{(k/2)} - y(x_{2i})\right| \le \frac{16}{15}\left|y_{2i}^{(k/2)} - y_{2i}^{(k)}\right|.$$

За оценку погрешности решения, вычисленного с шагом $\frac{h}{2}$, принимают величину

$$\max_i \frac{\left|y_{2i}^{(k/2)} - y_{2i}^{(k)}\right|}{15}.$$

В Mathcad для решения задачи Коши на отрезке $[x_0, x_{end}]$ методом Рунге — Кутты с постоянным шагом $h = \frac{|x_{end} - x_0|}{N}$ предназначена функция rkfixed(y, x_0, x_{end}, N, D).

Результаты вычислений функции rkfixed — матрица, в первом столбце которой содержатся координаты узлов равномерной сетки x_0, x_1, ..., $x_N = x_{end}$, а во втором — значения приближенного решения в соответствующих узлах. Перед обращением к функции rkfixed необходимо присвоить переменной y значение y_0, переменной x_0 — начальное значение аргумента, переменной x_{end} — значение конечной точки отрезка интегрирования, переменной N — количество узлов равномерной сетки. Переменной D(x, y) присваивается выражение для вычисления правой части $f(x, y)$.

ЗАДАНИЕ 4.2

Решите на отрезке $[x_0, x_{end}]$ задачу Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ методом Рунге — Кутты с постоянным шагом. Изобразите графики решений, вычисленных с шагом h, $2h$ и $\frac{h}{2}$.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Присвойте начальное значение решения переменной y_1.
4. Определите правую часть уравнения f(x, y).
5. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле $N = \left[\frac{|x_{end} - x_0|}{h}\right]$.
6. Сохраните решение в матрице Y1.
7. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле $N = 2\left[\frac{|x_{end} - x_0|}{h}\right]$.
8. Сохраните решение в матрице Y2.
9. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле $N = \left[\frac{|x_{end} - x_0|}{2h}\right]$.
10. Сохраните решение в матрице Y3.
11. Постройте на одном графике все три найденные решения.
12. Оцените погрешности найденных решений по формуле Рунге.

Пример выполнения задания

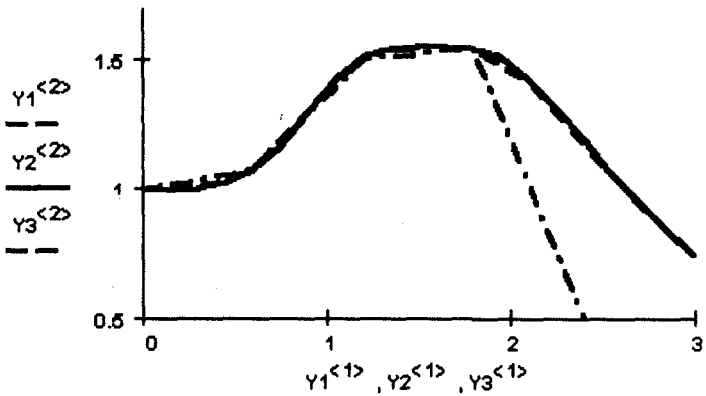
Решите задачу Коши $y' = x^2y^3\sin^3(x+y)$, $y(0) = 1$ на отрезке $[0, 3]$ методом Рунге — Кутты с постоянным шагом. Изобразите графики решений, вычисленных с шагом 0.3, 0.6, 0.15. Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями и графиками приведен ниже.

$\mathbf{ORIGIN := 1}$ $\qquad$ $\mathbf{y_1 := 1}$

$$\mathbf{f(x,y) := x^2\cdot(y_1)^3\cdot(\sin(x+y_1))^3}$$

$\mathbf{Y1 := rkfixed(y,0,3,10,f)}$ $\qquad$ $\mathbf{Y2 := rkfixed(y,0,3,20,f)}$

$\mathbf{Y3 := rkfixed(y,0,3,5,f)}$



$\mathbf{i := 1..10}$ $\qquad$ $\mathbf{k := 1..5}$

$$\mathbf{Er1_i := \left|(Y1^{\langle 2\rangle})_i - (Y2^{\langle 2\rangle})_{2\cdot i}\right|} \qquad \mathbf{er1 := \frac{max(Er1)}{15}} \qquad \mathbf{er1 = 8.852\cdot 10^{-3}}$$

$$\mathbf{Er2_k := \left|(Y3^{\langle 2\rangle})_k - (Y1^{\langle 2\rangle})_{2\cdot k}\right|} \qquad \mathbf{er2 := \frac{max(Er2)}{15}} \qquad \mathbf{er2 = 0.032}$$

Указание. Присвойте значение решения в начальной точке первой и единственной координате вектора решения y_1. Определите функцию f(x,y), вычисляющую значения правой части уравнения. Присвойте матрице с именем Y1 решение, вычисленное функцией rkfixed(y,0.3,10,f). Присвойте матрицам Y2 и Y3 решения, вычисленные на сетках из 20 и 5 узлов соответственно. Для того чтобы изобразить на одном графике все три решения, введите в окне графиков в позиции аргумента, разделяя запятой, имена первых столбцов матриц решений $Y1^{<1>}$, $Y2^{<1>}$, $Y3^{<1>}$, а в позиции функции, также разделяя запятой, введите имена вторых столбцов $Y1^{<2>}$, $Y2^{<2>}$, $Y3^{<2>}$. Приведенные в документе оценки погрешностей решений er1, er2 означают, что погрешности решений, вычисленных с шагом 0.15 и 0.3, — соответственно величины порядка 0.01 и 0.05.

4.3
УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$, где F — известная функция $n+2$ переменных, определенная в области $D\subset\mathbb{R}^{n+2}$; x — независимая переменная из интервала (a,b); y — неизвестная функция; n — порядок уравнения.

Функция $y=y(x)$ называется *решением* дифференциального уравнения, если она удовлетворяет уравнению

$$F\big(x,y(x),y'(x),y''(x),\ldots,y^{(n)}(x)\big)=0.$$

График решения дифференциального уравнения называют *интегральной кривой* дифференциального уравнения.

В дальнейшем будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешенные относительно старшей производной, т.е. уравнения в *нормальной форме*:

$$y^{(n)}=f\big(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\big).$$

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений. Однако задача об отыскании решения, удовлетворяющего *начальному условию**

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_{0,1},\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_{0,n-1},$$

при определенных ограничениях на правую часть уравнения имеет единственное решение. Справедлива следующая теорема.

Если функция $f(x,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$, и ее частные производные $\dfrac{\partial f(x,\boldsymbol{y})}{\partial y_i}$, $i=1,2,\ldots,n$, непрерывны в области $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $(x,\ \boldsymbol{y})=(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\in D$, то на некотором интервале (x_0-h,x_0+h) существует единственное решение уравнения $y^{(n)}=f\big(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\big)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_{0,1}$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0)=y_{0,n-1}$, $(x,\ \boldsymbol{y}_0)=(x,\ y_0,\ y_{0,1},\ \ldots,\ y_{0,n-1})\in D$.

На рис. 4.6 приведены графики решений дифференциального уравнения второго порядка

$$y''=-a|k|y'-\omega^2y,\quad k=0.1,\quad \omega^2=0.25,$$

*Как и для уравнений первого порядка, такая задача называется *задачей Коши*.

описывающего изменение объема производства в некоторой замкнутой экономической системе*.

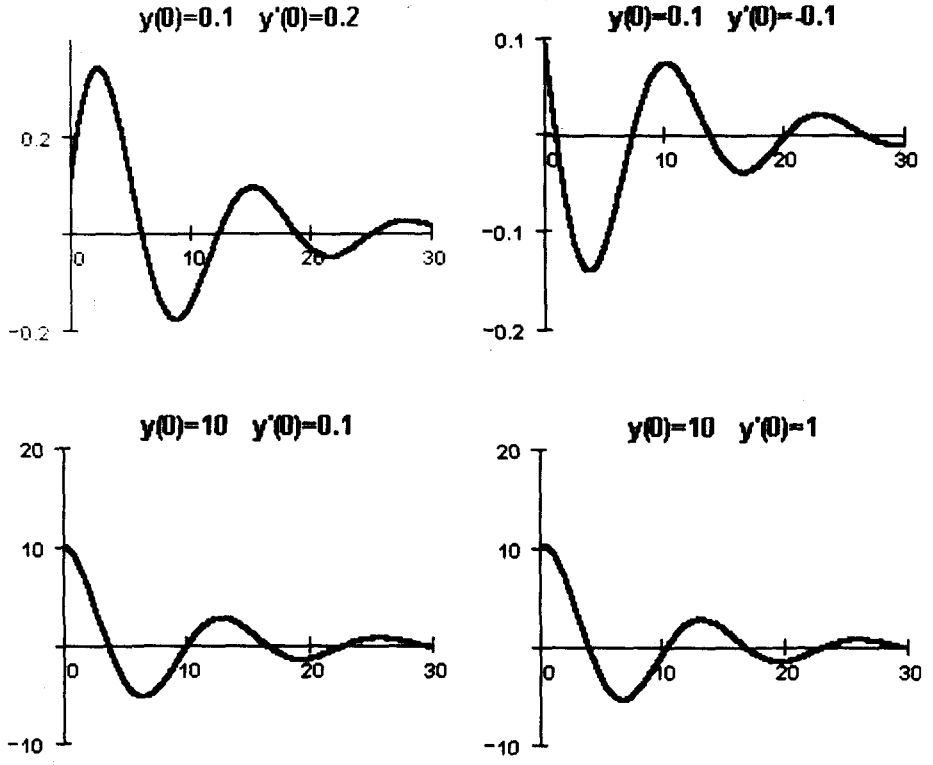


Рис. 4.6. Графики решений уравнения второго порядка с различными начальными условиями

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{0,1},\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$$

может быть сведена к задаче Коши для системы n дифференциальных уравнений 1-го порядка, которая в векторной форме имеет вид

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{Y}), \quad \boldsymbol{Y}(x_0) = \boldsymbol{Y}_0,$$

*Уравнение описывает поведение разности $y(x) = Y(x) - G/s$ между объемом производства $Y(x)$ и фиксированной величиной отношения G/s правительственных расходов G к предельной склонности населения к сбережению s в замкнутой экономической системе. Колебания решений около нуля (см. рис. 4.6) соответствуют периодам спада и подъема в экономике.

где

$$\boldsymbol{Y}' = (y_1'(x),\ y_2'(x),\ \ldots,\ y_n'(x)),$$

$$\boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{Y}) = (y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ f(x,y_1,\ldots,y_n)).$$

Численное решение задачи Коши для этой системы состоит в построении таблицы приближенных значений $y_{i,1}$, $y_{i,2}$, ..., $y_{i,N}$ координат $y_i(x)$ вектора решения $\boldsymbol{y}(x)$ в точках x_1, x_2, ..., x_N.

Чтобы получить расчетные формулы метода Рунге — Кутты для систем дифференциальных уравнений, достаточно в расчетных формулах для уравнений первого порядка заменить y, $f(x,y)$, k_1, k_2, k_3, k_4 на $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{Y})$, $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$, $\boldsymbol{k}_4$.

Параметры функции rkfixed(y,x_0,x_{end},N,D), вычисляющей решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений n-го порядка на отрезке $[x_0, x_{end}]$ с постоянным шагом $h = \frac{x_{end} - x_0}{N}$, имеют следующую структуру:

- вектор-столбец y содержит начальное значение решения в точке x_0;
- x_0, x_{end} — границы отрезка интегрирования системы;
- N — число узлов сетки;
- вектор-столбец D содержит выражения для правых частей уравнений системы.

Результаты вычислений функции rkfixed(y,x_0,x_{end},N,D) — матрица размерности $(N+1) \times (n+1)$. Первый столбец матрицы D содержит координаты узлов равномерной сетки, а остальные n столбцов — значения искомых решений y_i в узлах сетки*, т.е. $D^{<i+1>} = y_i$ или, что то же самое, $x_j = D_{j,1}$, $D_{j,i+1} = Y_i(x_j)$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение задачи Коши $y'' - 2|k|y' - \omega^2 y$, $k = 0.1$, $\omega^2 = 0.25$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0.1$. В документе приведены необходимые комментарии.

$y_1 = y \qquad y_2 = \frac{d}{dx}y$

$\frac{d}{dx}y_1 = y_2 \qquad \frac{d}{dx}y_2 = 0.2\,y_2 - 0.25\,y_1$

ORIGIN := 1 — **нумерация координат вектора начинается с единицы**

N := 3000 — **число узлов сетки равно 3000**

*В соответствии с формулами, позволяющими записать уравнение n-го порядка в виде системы, второй столбец матрицы D содержит значения решения уравнения в узлах сетки, а остальные столбцы — значения в этих узлах производных решения до $(n-1)$-го порядка: $D^{<i+2>} = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

$$y := \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$ **начальные условия**

$$f(x, y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ 0.2 \cdot y_2 - 0.25 \cdot y_1 \end{bmatrix}$$ **вектор правых частей**

$Y := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 30, N, f)$ **матрица Y содержит значения решения уравнения и его производной в узлах сетки**

$Y^{\langle 1 \rangle}$ **содержит координаты узлов**

$Y^{\langle 2 \rangle}$ **содержит значения решения в узлах**

$Y^{\langle 3 \rangle}$ **содержит значения производной решения в узлах**

Y =

	1	2	3
1	0	0.1	0.2
2	0.01	0.102	0.2
3	0.02	0.104	0.2
4	0.03	0.106	0.2
5	0.04	0.108	0.201
6	0.05	0.11	0.201

ЗАДАНИЕ 4.3

Решите задачу Коши $y_1' = f_1(x, y_1, y_2)$, $y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$, $y_1(a) = y_{1,0}$, $y_2(a) = y_{2,0}$ на отрезке $[a, b]$ методом Рунге — Кутты с постоянным шагом $h = 0.1$. Изобразите графики решений, вычисленных с шагами h, $2h$, $\frac{h}{2}$.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Присвойте начальное значение решения вектору-столбцу с именем y.
4. Определите правую часть уравнения, присвойте соответствующие выражения элементам вектора-столбца с именем f(x, y).
5. Найдите величину $N = \left[\frac{|x_{end} - x_0|}{h}\right]$.

6. Вычислите решение, используя функцию rkfixed(y, a, b, N, f) с параметром N, найденным в предыдущем пункте.
7. Сохраните решение в матрице Y1.
8. Вычислите решение, используя функцию rkfixed(y, a, b, N, f) с параметром N, найденным по формуле $N = 2\left[\frac{|x_{end} - x_0|}{h}\right]$.
9. Сохраните решение в матрице Y2.
10. Вычислите решение, используя функцию rkfixed(y, a, b, N, f) с параметром N, найденным по формуле $N = \left[\frac{|x_{end} - x_0|}{2h}\right]$.
11. Сохраните решение в матрице Y3.
12. Постройте на одном графике все три найденные решения.
13. Оцените погрешности найденных решений по формуле Рунге.

Пример выполнения задания

Решите на отрезке [0, 3] методом Рунге — Кутты с постоянным шагом задачу Коши

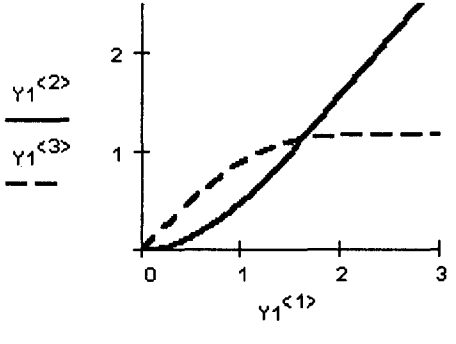
$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = e^{-xy_1}, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 0, \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Оцените погрешности решений, вычисленных с шагами 0.1, 0.05, и изобразите графики приближенных решений. Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями и графиками приведен ниже.

ORIGIN := 1 N := 30

$$y := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad f(x, y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ \exp(-x \cdot y_1) \end{bmatrix}$$

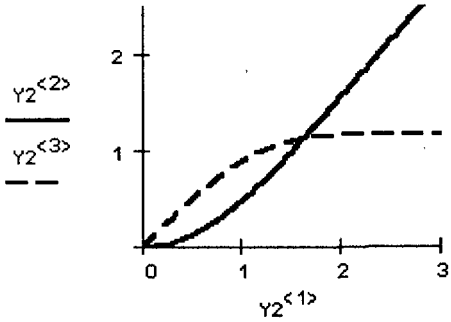
Y1 := rkfixed(y, 0, 3, N, f)



Y1 =

	1	2	3
1	0	0	0
2	0.1	$5 \cdot 10^{-3}$	0.1
3	0.2	0.02	0.2
4	0.3	0.045	0.299
5	0.4	0.08	0.397
6	0.5	0.124	0.492
7	0.6	0.178	0.584

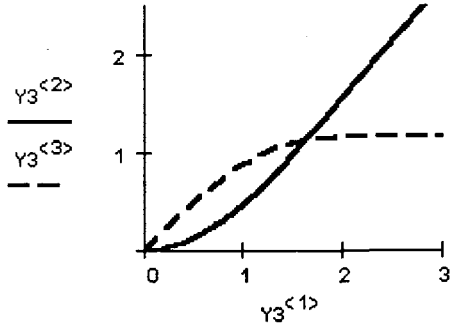
$Y2 := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 3, 2 \cdot N, f)$



$Y2 =$

	1	2	3
1	0	0	0
2	0.05	$1.25 \cdot 10^{-3}$	0.05
3	0.1	$5 \cdot 10^{-3}$	0.1
4	0.15	0.011	0.15
5	0.2	0.02	0.2
6	0.25	0.031	0.25

$Y3 := \mathrm{rkfixed}\left(y, 0, 3, \frac{N}{2}, f\right)$



$Y3 =$

	1	2	3
1	0	0	0
2	0.2	0.02	0.2
3	0.4	0.08	0.397
4	0.6	0.178	0.584
5	0.8	0.312	0.753
6	1	0.477	0.893
7	1.2	0.667	1

$i := 1 .. 30$

$Er1_i := \left| (Y1^{\langle 2 \rangle})_i - (Y2^{\langle 2 \rangle})_{2 \cdot i} \right| \quad er1 := \frac{\max(Er1)}{15} \quad er1 = 3.898 \cdot 10^{-3}$

$k := 1 .. \frac{N}{2}$

$Er2_k := \left| (Y3^{\langle 2 \rangle})_k - (Y1^{\langle 2 \rangle})_{2 \cdot k} \right| \quad er2 := \frac{\max(Er2)}{15} \quad er2 = 7.797 \cdot 10^{-3}$

Указание. Переменной N присвойте значение, равное $\frac{|b-1|}{h} = \frac{3}{0.1} = 30$, а компонентам вектора y — значение решения в начальной точке. Определите и введите вектор-столбец правых частей f(x,y). Решение, вычисленное функцией rkfixed(y,0,3,N,f), присвойте матрице с именем Y1. В матрицах Y2 и Y3 сохраните решения, вычисленные для N = 60 и N = 15. Для того чтобы изобразить на одном графике приближенные решения y_1 и y_2, введите в позиции аргумента графика имя 1-го столбца матрицы решений $Y1^{\langle 1 \rangle}$, а в позиции функции — имена 2-го и 3-го столбцов $Y1^{\langle 2 \rangle}$, $Y1^{\langle 3 \rangle}$. Аналогично постройте графики приближенных решений, вычисленные для N = 60 и N = 15. Приведенные в документе величины er1 и er2 означают, что погрешности решений, вычисленных с шагами 0.05 и 0.1, — величины порядка 0.005 и 0.01.

4.4
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Принцип суперпозиции

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x),$$

где $y = y(x)$ — неизвестная функция; $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$, $f(x)$ — известные функции, которые будем полагать непрерывными на промежутке (a, b).

Выражение в левой части уравнения называется *линейным дифференциальным оператором* n-го порядка:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y.$$

Уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

и

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \quad f(x) \not\equiv 0,$$

называются соответственно *однородным* и *неоднородным* линейным дифференциальным уравнением n-го порядка. Будем записывать однородное и неоднородное линейные дифференциальные уравнения в виде $L(y) = 0$ и $L(y) = f(x)$.

Принцип суперпозиции основан на следующих свойствах решений линейных уравнений:

1. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два решения однородного линейного уравнения $L(y) = 0$, то их линейная комбинация $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ при любых постоянных c_1, c_2 является решением однородного уравнения.

2. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два решения неоднородного линейного уравнения $L(y) = f(x)$, то их разность $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ является решением однородного уравнения $L(y) = 0$.

3. Любое решение неоднородного линейного уравнения $L(y) = f(x)$ есть сумма частного (фиксированного) решения неоднородного уравнения и некоторого решения однородного уравнения.

4. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения неоднородных линейных уравнений $L(y) = f_1(x)$ и $L(y) = f_2(x)$, то их сумма $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$.

Например, функции $y_1(x) = \ln x$ и $y_2(x) = x$ — два решения линейного уравнения:

$$y'' + \frac{1}{x(1-\ln x)}y' - \frac{1}{x^2(1-\ln x)}y = 0,$$

а функция $y_3(x) = \frac{1-2\ln x}{4x}$ — решение неоднородного уравнения:

$$y'' + \frac{1}{x(1-\ln x)}y' - \frac{1}{x^2(1-\ln x)}y = \frac{1-\ln x}{x^3}.$$

Подстановкой в уравнения легко проверить, что функция $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ является решением однородного уравнения при любых c_1, c_2, а функция $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_3(x)$ — решением приведенного выше неоднородного уравнения.

Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, в котором выполнены соответствующие подстановки.

ORIGIN := 1

y1(x) := ln(x)

$$\frac{d^2}{dx^2}y1(x) + \left[\frac{1}{x\cdot(1-\ln(x))}\cdot\left(\frac{d}{dx}y1(x)\right)\right] - \frac{y1(x)}{x^2\cdot(1-\ln(x))} \rightarrow 0$$

y2(x) := x

$$\frac{d^2}{dx^2}y2(x) + \left[\frac{1}{x\cdot(1-\ln(x))}\cdot\left(\frac{d}{dx}y2(x)\right)\right] - \frac{y2(x)}{x^2\cdot(1-\ln(x))} \rightarrow 0$$

y(x, c1, c2) := c1·y1(x) + c2·y2(x)

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x,c1,c2) + \left[\frac{1}{x\cdot(1-\ln(x))}\cdot\left(\frac{d}{dx}y(x,c1,c2)\right)\right] - \frac{y(x,c1,c2)}{x^2\cdot(1-\ln(x))} \rightarrow 0$$

$$y3(x) := \frac{1-2\cdot\ln(x)}{4\cdot x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y3(x) + \left[\frac{1}{x\cdot(1-\ln(x))}\cdot\left(\frac{d}{dx}y3(x)\right)\right] - \frac{y3(x)}{x^2\cdot(1-\ln(x))} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-(-1+\ln(x))}{x^3}$$

$$y4(x, c1, c2) := y(x, c1, c2) + y3(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y4(x,c1,c2) + \left[\frac{1}{x\cdot(1-\ln(x))}\cdot\left(\frac{d}{dx} y4(x,c1,c2)\right)\right] - \frac{y4(x,c1,c2)}{x^2\cdot(1-\ln(x))} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-(-1+\ln(x))}{x^3}$$

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение

Для уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + (x)y = 0,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные постоянные коэффициенты, справедливы следующие утверждения.

1. Существуют n линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ уравнения, а любые $n+1$ решений линейно зависимы.

2. При любых значениях констант c_1, c_2, ..., c_n функция $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ является решением уравнения.

3. Для любых начальных значений x_0, y_0, $y_{0,1}$, ..., $y_{0,n-1}$ существуют такие значения c_1^*, c_2^*, ..., c_n^*, что решение $y^*(x) = c_1^* y_1(x) + c_2^* y_2(x) + \ldots + c_n^* y_n(x)$ удовлетворяет начальным условиям $y^*(x_0) = y_0$, $\left(y^*(x_0)\right)' = y_{0,1}$, $\left(y^*(x_0)\right)^{(n-1)} = y_{0,n-1}$.

Выражение $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ называется *общим решением* линейного однородного уравнения.

Для построения системы n линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, называемой *фундаментальной системой решений*, существует простой алгоритм, основанный на том, что если решение уравнения имеет вид $y(x) = e^{\lambda x}$, то число λ является корнем характеристического уравнения $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$. Левая часть характеристического уравнения называется *характеристическим многочленом* линейного дифференциального уравнения. Таким образом, задача о решении линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами сводится к решению алгебраического уравнения.

Если характеристическое уравнение имеет n различных действительных корней λ_1, λ_2, ..., λ_n, то фундаментальная система решений уравнения имеет вид:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad y_n(x) = e^{\lambda_n x}.$$

Если какой-либо из действительных корней характеристического уравнения повторяется r раз, т.е. имеет кратность r, то ему отвечают r функций в фундаментальной системе решений. Например, если $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_{k+r-1} = \lambda$, то в фундаментальную систему решений уравнения входят r функций, отвечающих этому r-кратному корню: $y_k(x) = e^{\lambda x}$, $y_{k+1}(x) = xe^{\lambda x}$, $y_{k+2}(x) = x^2 e^{\lambda x}$, $\ldots$, $y_{k+r-1}(x) = x^{r-1}e^{\lambda x}$.

Если характеристическое уравнение имеет комплексные корни, то каждой паре простых* комплексных корней $\lambda_{k,k+1} = \alpha \pm i\beta$ в фундаментальной системе решений отвечает пара функций: $y_k(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{k+1}(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Если же комплексная пара корней имеет кратность r, $\lambda_{k,k+1} = \ldots = \lambda_{2k+2r-2,2k+2r-1} = \alpha \pm i\beta$, то в фундаментальную систему входят $2r$ функций, отвечающих этой r-кратной паре комплексных корней:

$$
\begin{array}{ll}
e^{\alpha x}\cos\beta x, & e^{\alpha x}\sin\beta x, \\
xe^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, \\
x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, & x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, & x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.
\end{array}
$$

ЗАДАНИЕ 4.4

Найдите общее решение линейного однородного уравнения второго порядка. Решите задачу Коши с начальными условиями $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1$. Проверьте правильность решения. Изобразите его график.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Запишите характеристический многочлен уравнения и найдите его корни.
4. Определите функции фундаментальной системы решений как функции аргумента x.
5. Запишите общее решение уравнения как функцию переменных x, c1, c2.
6. Найдите производные первого и второго порядка общего решения.
7. Запишите и решите систему уравнений для определения констант c1, c2.

*Не кратных, имеющих кратность $r = 1$.

8. Определите решение задачи Коши как функцию переменной x.
9. Проверьте решение подстановкой в уравнение.
10. Проверьте выполнение начальных условий.
11. Постройте график решения.
12. Решите задачу Коши методом Рунге — Кутты и постройте график приближенного решения.
13. Сравните полученные графики.

Пример выполнения задания

Найдите общее решение однородного уравнения $y'' + 2y' + 3y = 0$. Решите задачу Коши с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Проверьте правильность решения. Изобразите его график. Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями и графиками приведен ниже. Для сравнения приведено решение задачи с помощью функции rkfixed и его график.

$$P(\lambda) := \lambda^2 + 2\cdot\lambda + 3 \qquad P(\lambda) := \begin{bmatrix} -1 + i\cdot\sqrt{2} \\ -1 - i\cdot\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$y1(x) := \exp(-x)\cdot\cos\left(\sqrt{2}\cdot x\right) \qquad y2(x) := \exp(-x)\cdot\sin\left(\sqrt{2}\cdot x\right)$$

$$y(x, c1, c2) := c1\cdot y1(x) + c2\cdot y2(x)$$

$$y(x, c1, c2) := c1\cdot\left(\exp(-x)\cdot\cos\left(\sqrt{2}\cdot x\right)\right) + c2\cdot\left(\exp(-x)\cdot\sin\left(\sqrt{2}\cdot x\right)\right)$$

$$dy1(x, c1, c2) := \frac{d}{dx}y(x, c1, c2) \qquad dy2(x, c1, c2) := \frac{d^2}{dx^2}y(x, c1, c2)$$

$$dy2(x, c1, c2) + 2\cdot dy1(x, c1, c2) + 3\cdot y(x, c1, c2) \rightarrow 0$$

$$dy1(x, c1, c2) \rightarrow -c1\cdot\exp(-x)\cdot\cos\left(\sqrt{2}\cdot x\right) - c1\cdot\exp(-x)\cdot\sin\left(\sqrt{2}\cdot x\right)\cdot\sqrt{2} -$$
$$- c2\cdot\exp(-x)\cdot\sin\left(\sqrt{2}\cdot x\right) + c2\cdot\exp(-x)\cdot\cos\left(\sqrt{2}\cdot x\right)\cdot\sqrt{2}$$

$$dy1(x, c1, c2) := -c1\cdot\exp(-x)\cdot\cos\left(\sqrt{2}\cdot x\right) - c1\cdot\exp(-x)\cdot\sin\left(\sqrt{2}\cdot x\right)\cdot\sqrt{2} -$$
$$- c2\cdot\exp(-x)\cdot\sin\left(\sqrt{2}\cdot x\right) + c2\cdot\exp(-x)\cdot\cos\left(\sqrt{2}\cdot x\right)\cdot\sqrt{2}$$

$$y(0, c1, c2) \rightarrow c1 \qquad dy1(0, c1, c2) \rightarrow -c1 + c2\cdot\sqrt{2}$$

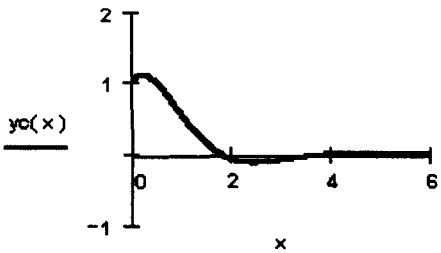
Given $c1=1 \qquad -c1 + c2\cdot\sqrt{2}=1$

$$\text{Find}(c1,c2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad yc(x) := y1(x) + \sqrt{2}\cdot y2(x)$$

$$dyc1(x) := \frac{d}{dx}yc(x) \qquad dyc2(x) := \frac{d^2}{dx^2}yc(x)$$

$$dyc2(x) + 2\cdot dyc1(x) + 3\cdot yc(x) \rightarrow 0$$

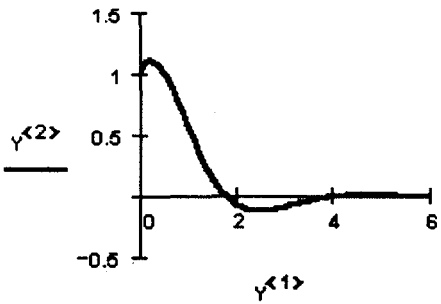
$$yc(0) = 1 \qquad dyc1(0) = 1$$



$$ORIGIN := 1$$

$$y := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad f(x,y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ -2\cdot y_2 - 3\cdot y_1 \end{bmatrix}$$

$$Y := \text{rkfixed}(y,0,6,60,f)$$



Указание. Для того чтобы вычислить корни характеристического многочлена, выделите в выражении для $P(\lambda)$ рамкой переменную λ и щелкните в строке **Solve** пункта **Variable** меню **Symbolics**. В дальнейшем действуйте так, как показано в приведенном фрагменте. Для проверки правильности вычисленного решения определите первую и вторую производные как функции переменной x, запишите выражение для $L(y)$, выделите его рамкой, щелкните в панели по кнопке , а затем — по рабочему документу справа от стрелки.

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение. Метод подбора

В соответствии с принципом суперпозиции общее решение линейного неоднородного уравнения может быть записано как сумма общего решения однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения.

Метод подбора применяют для отыскания частных решений неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и правыми частями вида:

$$P_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

где $P_k(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены соответственно степени k и m. Правые части такого вида называют обобщенными многочленами.

Метод подбора, или *метод неопределенных коэффициентов*, состоит в следующем.

Искомое решение уравнения записывается в виде:

$$y(x) = x^s\big(\widetilde{P}_r(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_r(x)\sin\beta x\big)e^{\alpha x},$$

где $\widetilde{P}_r(x) = p_r x^r + p_{r-1}x^{r-1} + \ldots + p_1 x + p_0$, $\widetilde{Q}_r(x) = q_r x^r + q_{r-1}x^{r-1} + \ldots + q_1 x + q_0$ — многочлены степени $r = \max(k,m)$ с неизвестными коэффициентами p_r, p_{r-1}, $\ldots$, p_1, p_0, q_r, q_{r-1}, $\ldots$, q_1, q_0.

Сомножитель x^s называют *резонансным сомножителем.* Резонанс имеет место в случаях, когда среди корней характеристического уравнения есть корень $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности s, действительная часть которого совпадает с коэффициентом в показателе степени экспоненты, а мнимая — с коэффициентом в аргументе тригонометрической функции в правой части уравнения.

Подставив выражение для решения с неопределенными коэффициентами в левую часть уравнения, получим обобщенный многочлен того же вида, что и многочлен в правой части уравнения. Два обобщенных многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при сомножителях вида $x^t e^{\alpha x}\cos\beta x$, $x^t e^{\alpha x}\sin\beta x$ с одинаковыми степенями t. Приравняв коэффициенты при таких сомножителях, получим систему $2(r+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно $2(r+1)$ неизвестных. Можно показать, что такая система совместна и имеет единственное решение. Решение системы — неизвестные коэффициенты многочленов, входящие в искомое выражение для частного решения неоднородного уравнения.

ЗАДАНИЕ 4.5

Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка $L(y) = f(x)$. Проверьте правильность решения.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Воспользуйтесь выражением для общего решения однородного уравнения из задания 4.4 либо выполните пп. 1–4 из порядка выполнения этого задания.
4. Запишите выражение для частного решения как функцию переменной x и неизвестных коэффициентов.
5. Найдите выражения для производных решения и выражение для $L(y)$.
6. Запишите матрицу линейной системы для неизвестных коэффициентов.
7. Решите систему.
8. Запишите частное решение как функцию переменной x.
9. Запишите выражение для общего решения как функцию переменной и произвольных констант c1, c2.
10. Проверьте решение подстановкой в уравнение.

Пример выполнения задания

Найдите общее решение неоднородного уравнения $y'' + 2y' + 3y = x^2 + 1$. Проверьте правильность решения.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями приведен ниже.

$$y1(x) := \exp(-x)\cdot\cos\left(\sqrt{2}\cdot x\right) \qquad y2(x) := \exp(-x)\cdot\sin\left(\sqrt{2}\cdot x\right)$$

$$y(x, c1, c2) := c1\cdot y1(x) + c2\cdot y2(x)$$

$$y(x, c1, c2) := c1\cdot\left(\exp(-x)\cdot\cos\left(\sqrt{2}\cdot x\right)\right) + c2\cdot\left(\exp(-x)\cdot\sin\left(\sqrt{2}\cdot x\right)\right)$$

$$f(x) := x^2 + 1$$

$$ycn(x, a2, a1, a0) := a2\cdot x^2 + a1\cdot x + a0$$

$$dycn1(x, a2, a1, a0) := \frac{d}{dx}ycn(x, a2, a1, a0)$$

$$dycn2(x, a2, a1, a0) := \frac{d^2}{dx^2}\, ycn(x, a2, a1, a0)$$

$$dycn2(x, a2, a1, a0) + 2 \cdot dycn1(x, a2, a1, a0) + 3 \cdot ycn(x, a2, a1, a0) \rightarrow$$
$$\rightarrow 2 \cdot a2 + 4 \cdot a2 \cdot x + 2 \cdot a1 + 3 \cdot a2 \cdot x^2 + 3 \cdot a1 \cdot x + 3 \cdot a0$$

$$2 \cdot a2 + 4 \cdot a2 \cdot x + 2 \cdot a1 + 3 \cdot a2 \cdot x^2 + 3 \cdot a1 \cdot x + 3 \cdot a0$$

$$3 \cdot a2 \cdot x^2 + (3 \cdot a1 + 4 \cdot a2) \cdot x + 2 \cdot a2 + 3 \cdot a0 + 2 \cdot a1 = x^2 + 1$$

$$\text{Given} \quad 3 \cdot a2 = 1 \qquad 4 \cdot a2 + 3 \cdot a1 = 0 \qquad 2 \cdot a2 + 2 \cdot a1 + 3 \cdot a0 = 1 \qquad Find(a2, a1, a0) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-4}{9} \\ \frac{11}{27} \end{bmatrix}$$

$$ycn(x) := \frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{4}{9} \cdot x + \frac{11}{27}$$

$$dycn1(x) := \frac{d}{dx} ycn(x) \qquad dycn2(x) := \frac{d^2}{dx^2}\, ycn(x)$$

$$dycn2(x) + 2 \cdot dycn1(x) + 3 \cdot ycn(x) \rightarrow 1 + x^2$$

Указание. Действуйте так же, как при выполнении предыдущих заданий. Для того чтобы привести подобные в выражении, полученном после подстановки выражения для решения в $L(y)$, выделите рамкой переменную x и щелкните по строке **Collect** в меню **Symbolics** (рис. 4.7).

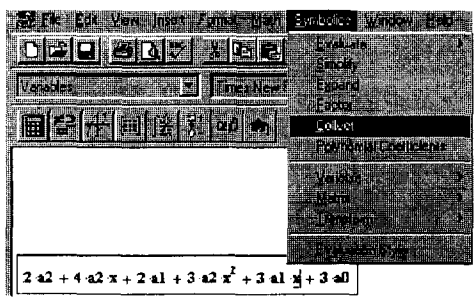


Рис. 4.7. Приведение подобных в Mathcad

4.5 ЖЕСТКИЕ СИСТЕМЫ. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МАТРИЧНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

В вычислительной практике часто встречаются системы дифференциальных уравнений, которые принято называть *жесткими*. Не приводя точного определения жесткой системы, проиллюстрируем содержание этого понятия и возникающие проблемы на примере линейной системы двух дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть требуется численно решить задачу Коши

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 - 998y_2, \\ y_2' = -1000y_2, \end{cases}$$

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 1,$$

которую можно записать в векторной форме $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & -998 \\ 0 & -1000 \end{pmatrix}$ — матрица системы; $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ — искомое решение; $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ — начальное значение решения.

Точное решение системы нетрудно вычислить описанным в предыдущем разделе методом:

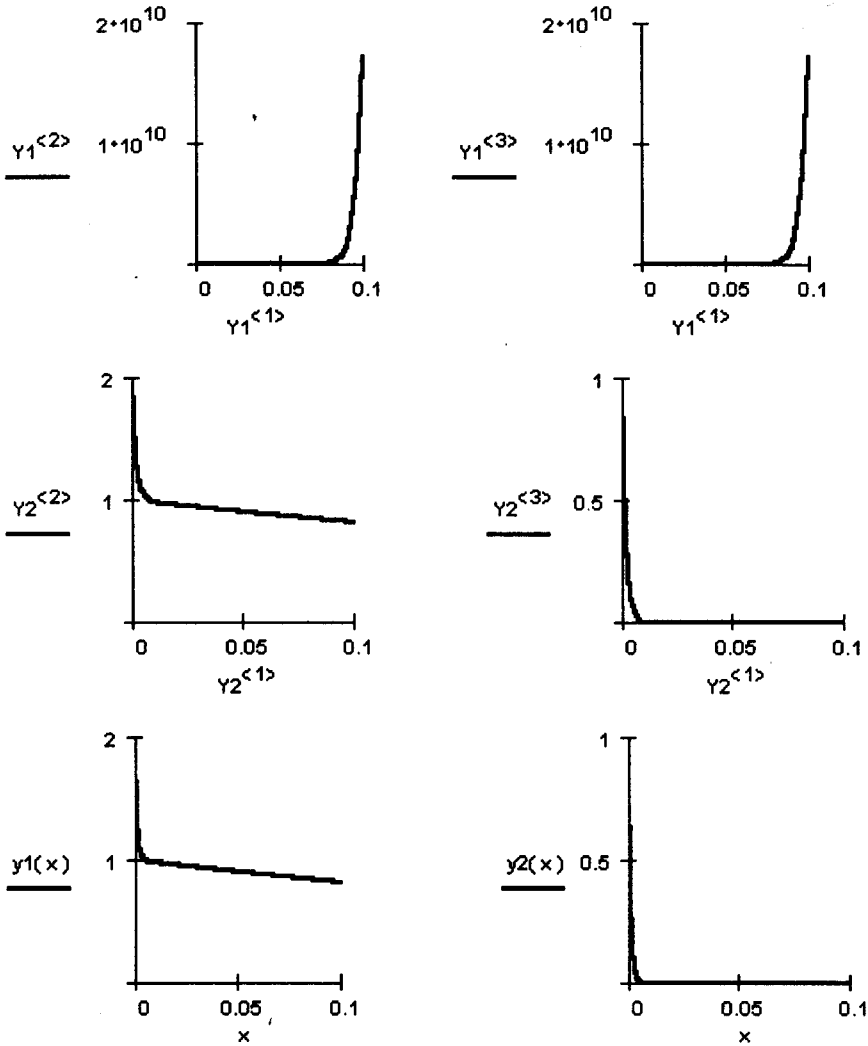
$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} e^{-2x} + e^{-1000x} \\ e^{-1000x} \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} y_1(x) = e^{-2x} + e^{-1000x}, \\ y_2(x) = e^{-1000x}. \end{cases}$$

Слагаемое e^{-1000x} убывает очень быстро, а слагаемое e^{-2x} — гораздо медленнее. Попытаемся применить к этой задаче метод Рунге — Кутты. Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение задачи методом Рунге — Кутты с различными шагами, графики полученных решений и график точного решения, приведен ниже.

$$\mathbf{ORIGIN} := 1 \qquad \mathbf{y} := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \begin{bmatrix} -2 \cdot y_1 - 998 \cdot y_2 \\ -1000 \cdot y_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y1} := \mathbf{rkfixed}(\mathbf{y}, 0, 0.1, 30, \mathbf{f}) \qquad \mathbf{y1}(\mathbf{x}) := \exp(-2 \cdot \mathbf{x}) + \exp(-1000 \cdot \mathbf{x})$$

$$\mathbf{Y2} := \mathbf{rkfixed}(\mathbf{y}, 0, 0.1, 50, \mathbf{f}) \qquad \mathbf{y2}(\mathbf{x}) := \exp(-1000 \cdot \mathbf{x})$$



Видно, что полученные приближенные решения уже на первых шагах содержат большие ошибки. Для получения правдоподобного результата на отрезке $[0, 0.1]$ нужно выбрать шаг, меньший 0.003. Если интервал интегрирования достаточно велик, то потребуется выполнить вычисления для очень большого числа шагов. Казалось бы, эту трудность можно преодолеть следующим образом: вести вычисления с малым шагом, а затем, когда компонента e^{-1000x} станет пренебрежимо малой, увеличить шаг и до конца промежутка интегрирования вести вычисления с большим шагом. На самом деле это не так. Вторая компонента заставляет вести интегрирование с малым шагом *на всем промежутке интегрирования*. Это и означает, что система *жесткая*. Жесткость системы проявляется тогда, когда длина промежутка ин-

тегрирования T удовлетворяет соотношению $T \geq \frac{1}{|\lambda_{\max}|}$, где $\lambda_{\max}$ — наибольшее собственное число матрицы системы (наибольший по абсолютной величине корень характеристического уравнения).

Для интегрирования жестких систем необходимо применять специально разработанные методы. Опишем метод, предназначенный для интегрирования только однородных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Задача Коши для такой системы формулируется в векторной форме следующим образом: найти решение системы

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \dots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

Аналитическое решение этой задачи записывается в виде

$$\boldsymbol{y} = e^{Ax}\boldsymbol{y}_0,$$

где e^{Ax} — матричная экспонента, определяемая формулой:

$$e^{Ax} = E + Ax + \frac{1}{2!}(Ax)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(Ax)^n + \ldots$$

Здесь E — единичная матрица той же размерности, что и матрица A.

Если матрица имеет диагональную форму:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

т.е. если λ_1, λ_2, ..., λ_n — собственные значения матрцы A, то матричная экспонента может быть вычислена по формуле

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}.$$

Если матричная экспонента известна, то решение задачи Коши вычисляется по универсальной формуле $y = e^{Ax}y_0$ с различными начальными условиями y_0.

Матрицу системы можно привести к диагональной форме, если она имеет собственный базис (см. разд. 2.8) — базис из собственных векторов, и тогда решение задачи Коши может быть записано в виде: $y = C\Lambda C^{-1}y_0$, где C — матрица перехода от исходного базиса к собственному базису матрицы A, Λ — матричная экспонента, записанная в собственном базисе матрицы A. Матрицы жестких систем таковы, что погрешности вычисления C и C^{-1} приводят к совершенно недостоверным результатам.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение задачи Коши для жесткой системы по формуле $y = C\Lambda C^{-1}y_0$ со всеми необходимыми комментариями, приведен ниже.

Решение задачи Коши методом матричной экспоненты

$$\text{ORIGIN} := 1 \qquad A := \begin{bmatrix} -2 & -998 \\ 0 & -1000 \end{bmatrix} \qquad Y0 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Точное решение Yprec(x) $\quad Ypr(x) := \begin{bmatrix} \exp(-2\cdot x) + \exp(-1000\cdot x) \\ \exp(-1000\cdot x) \end{bmatrix}$

1. Приведение матрицы A к диагональному виду в собственном базисе матрицы A

$$C := \text{eigenvecs}(A) \quad Adiag := C^{-1}\cdot A\cdot C \qquad Adiag = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1\cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

2. Формирование матрицы exp(Ax) в собственном базисе

$$expAd(x) := \begin{bmatrix} \exp(-2\cdot x) & 0 \\ 0 & \exp(-1\cdot 10^3\cdot x) \end{bmatrix}$$

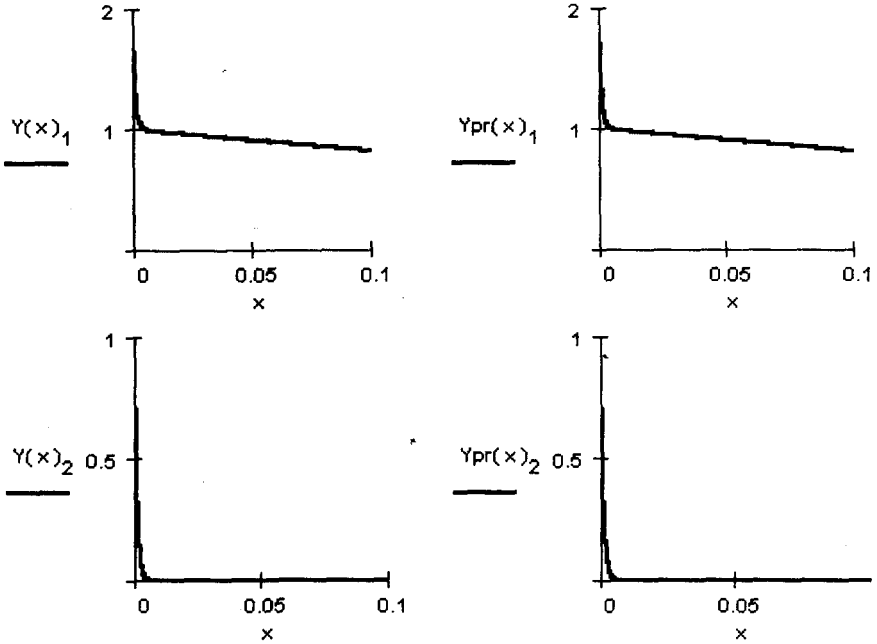
3. Вычисление матричной экспоненты в исходном базисе

$$expA(x) := C\cdot expAd(x)\cdot C^{-1}$$

4. Вычисление решения $\quad Y(x) := expA(x)\cdot Y0$

5. Сравнение с точным решением

$$Y(0.1) = \begin{bmatrix} 0.819 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Ypr(0.1) = \begin{bmatrix} 0.819 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Теперь рассмотрим алгоритм, не требующий существования собственного базиса у матрицы правых частей системы.

Пусть необходимо проинтегрировать систему с шагом H, т.е. найти решения в точках, кратных H. Если известна матричная экспонента e^{Ah}, то решение в точках $x = H; 2H, 3H, \ldots$ вычисляется по формулам:

$$\boldsymbol{y}(H) = e^{AH}\boldsymbol{y}_0, \quad \boldsymbol{y}(2H) = e^{AH}\boldsymbol{y}(H), \quad \boldsymbol{y}(3H) = e^{AH}\boldsymbol{y}(2H)$$

и т.д.

Задача сведена к точному вычислению матрицы e^{AH}. Можно поступить следующим образом:

- разбить отрезок $[0, H]$ на k частей так, чтобы шаг $h = H/k$ удовлетворял условию $\|Ah\| < 0.1$;
- в тейлоровском разложении матричной экспоненты взять 4–5 членов* и вычислить e^{Ah} по схеме Горнера:

$$e^{Ah} = E + Ah\Big(E + \frac{Ah}{2}\Big(E + \frac{Ah}{3}(E + \ldots)\Big)\Big);$$

- вычислить i-й столбец матрицы e^{Ah}, используя формулу $\left(e^{AH}\right)^{<i>} = \left(e^{Ah}\right)^k E_{(i)}$, где $E_{(i)}$ — вектор-столбец, в i-й строке которого стоит единица, а остальные элементы — нули.

*Условие $\|Ah\| < 0.1$ обеспечивает достаточно высокую точность вычисления e^{Ah}.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение описанным методом задачи Коши для жесткой системы на отрезке $[0, 10H]$ со всеми необходимыми комментариями, приведен ниже.

Решение задачи Коши методом матричной экспоненты

ORIGIN := 1

$$A := \begin{bmatrix} -2 & -998 \\ 0 & -1000 \end{bmatrix} \qquad Y0 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H := 0.1 \qquad E := \mathrm{identity}(2)$$

Точное решение Yprec(x) $\quad Ypr(x) := \begin{bmatrix} \exp(-2\cdot x) + \exp(-1000\cdot x) \\ \exp(-1000\cdot x) \end{bmatrix}$

Приближенное вычисление матричной экспоненты

Выбор шага h $\quad k := 2000 \qquad \mathrm{norm1}\left(A\cdot\frac{H}{k}\right) = 0.1 \qquad h := \frac{H}{k}$

Вычисление матричной экспоненты exp(Ah)
по формуле Тейлора

$$Ah := A\cdot h \qquad expAh := E + Ah\cdot\left[E + \frac{1}{2}\cdot Ah\cdot\left[E + \frac{1}{3}\cdot Ah\cdot\left(E + \frac{1}{4}\cdot Ah\right)\right]\right]$$

Вычисление матричной экспоненты exp(AH) $\quad expAH := expAh$

Вычисление матрицы решений в точках, кратных H
i-й столбец матрицы Y содержит решение в точке (i-1)H

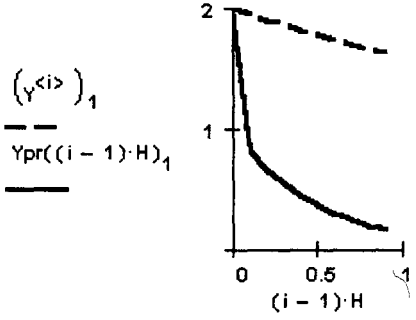
$$i := 1..10 \qquad Y^{\langle i\rangle} := expAH^{i-1}\cdot Y0$$

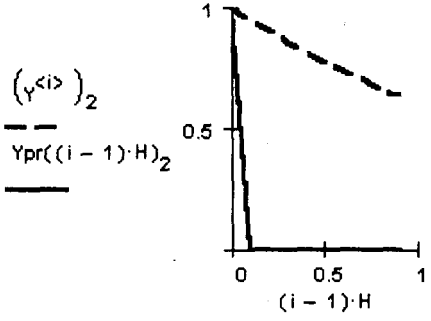
Y =

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	1.951	1.905	1.86	1.818	1.778	1.74	1.704
2	1	0.951	0.905	0.861	0.819	0.779	0.741	0.705

Сравнение с точным решением $\quad Y^{\langle 1\rangle} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Ypr(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Y^{\langle 2 \rangle} = \begin{bmatrix} 1.951 \\ 0.951 \end{bmatrix} \qquad Ypr(H) = \begin{bmatrix} 0.819 \\ 0 \end{bmatrix}$$





Указание. Результаты приближенного решения задачи Коши сохраните в матрице Y, две строки которой содержат значения y_1 и y_2 в точках $x = H, 2H, 3H, \ldots, 10H$. Для этого определите известным способом диапазон изменения индекса i от 1 до 10 и присвойте i-му столбцу матрицы Y значения приближенного решения в точке $x = (i-1)H$. При построении графиков введите в качестве аргумента величину $(i-1)H$, а в качестве функции — элементы матрицы Y. На левом графике изображены точные и приближенные значения y_1, на правом — y_2. Из приведенных вычислений видно, что точное и приближенное решения совпадают с точностью до погрешности графики.

В Mathcad для численного решения жестких систем могут использоваться две функции Stiffb и Stiffr с одними и теми же параметрами: Stiffb(y, x_0, x_{end}, acc, D, J, k, save) и Stiffr(y, x_0, x_{end}, acc, D, J, k, save). Обе эти функции реализуют специальные, отличные от метода матричной экспоненты, алгоритмы решения жестких систем и решают задачу Коши для произвольных жестких систем дифференциальных уравнений. Правила обращения к этим функциям описаны в разд. 4.1. При решении на отрезке $[x_0, x_{end}]$ задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = y_{10}, \\ y_2(0) = y_{20}, \\ \ldots\ldots \\ y_n(0) = y_{n0} \end{cases}$$

вектор $\boldsymbol{y}$, вектор-функция $D(x, \boldsymbol{y})$ и матричная функция $J(x, \boldsymbol{y})$ имеют вид:

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \ldots \\ y_{n0} \end{pmatrix}, \qquad D(x, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix},$$

$$J(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\end{pmatrix}.$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение задачи Коши для системы из предыдущего примера, приведен ниже.

$$\mathbf{ORIGIN} := 1 \qquad \mathbf{y} := \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

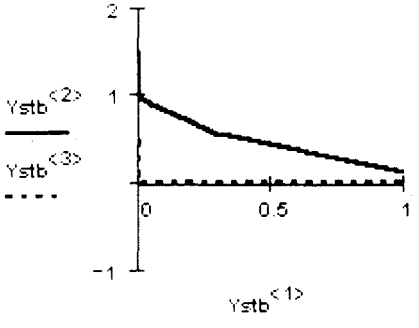
$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \begin{bmatrix}-2\cdot y_1 - 998\cdot y_2\\ -1000\cdot y_2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \begin{bmatrix}0 & -2 & -998\\ 0 & 0 & -1000\end{bmatrix}$$

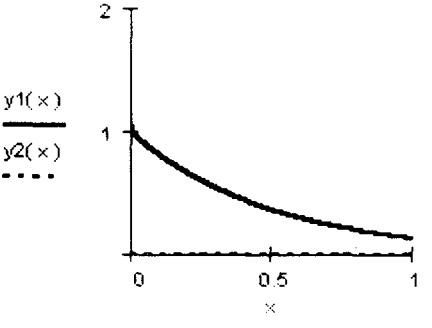
$$\mathbf{Ystb} := \mathbf{stiffb}(\mathbf{y},0,1,0.001,\mathbf{f},\mathbf{J},100,0.0001)$$

$$\mathbf{Ystb} = \begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 0.01 & 0.974782 & -5.417153\cdot 10^{-3}\\ 0.014723 & 0.971017 & 3.285001\cdot 10^{-5}\\ 0.054048 & 0.897541 & 3.404638\cdot 10^{-7}\\ 0.290923 & 0.558866 & 5.298028\cdot 10^{-10}\\ 1 & 0.135373 & 1.261773\cdot 10^{-13}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y1}(\mathbf{x}) := \exp(-2\cdot x) + \exp(-1000\cdot x) \qquad \mathbf{y2}(\mathbf{x}) := \exp(-1000\cdot x)$$

$$\mathbf{y1}(1) = 0.135335 \qquad \mathbf{y2}(1) = 0$$





Указание. Из приведенных в документе графиков и численных значений видно, что погрешность решения задачи на отрезке [0, 1] функцией Stiffb с выбранными значениями параметров превышает погрешность метода матричной экспоненты. В представленном фрагменте увеличено число отображаемых знаков результатов вычислений. Для того чтобы установить нужное число знаков при выводе, щелкните по строке **Number** в меню **Format** и введите в окне нужное число знаков.

ЗАДАНИЕ 4.6

Найдите в указанных точках решение задачи Коши для заданной жесткой системы методом матричной экспоненты и с использованием функций Stiffb или Stiffr. Матричную экспоненту вычислите приближенно, используя тейлоровское разложение. Постройте и сравните графики полученных решений.

Порядок выполнения задания

1. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
2. Введите начальные условия и значение H.
3. Выберите значение h.
4. Вычислите приближенно матричную экспоненту e^{Ah}.
5. Вычислите матричную экспоненту $e^{A\mathsf{H}}$.
6. Вычислите приближенное решение задачи Коши в указанных точках и постройте его график.
7. Вычислите решение задачи Коши на указанном промежутке, используя стандартные функции Mathcad. Постройте график решения.
8. Сравните полученные графики.

Пример выполнения задания

Примерный вариант выполнения задания для решения на отрезке [0, 1] задачи Коши

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 - 998y_2, \\ y_2' = -1000y_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

приведен выше.

4.6 АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется *автономной*, если независимая переменная не входит явно в систему. В теории автономных систем принято обозначать независимую переменную буквой t, а искомое решение — $\boldsymbol{x}(t)$.

Автономная система n-го порядка, записанная в нормальной форме, имеет вид:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

где

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \dots \\ f_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Название *автономная система* оправдано тем, что решение само управляет своим изменением, поскольку производная $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ зависит только от $\boldsymbol{x}$. Автономные системы называют также *динамическими* системами.

Любая нормальная система может быть преобразована в автономную: если $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, то, обозначив $x_{n+1} = t$, можем записать автономную систему:

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(x_{n+1}, \boldsymbol{x}), \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} = 1. \end{cases}$$

Фазовая плоскость, фазовые кривые

Ограничимся случаем $n = 2$ и будем полагать, что правая часть системы $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ непрерывно дифференцируема в области $G \subset \mathbb{R}^2$, т.е. заведомо справедлива теорема существования и единственности решения. В дальнейшем рассматриваем автономные системы второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Пусть $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$ — решение автономной системы второго порядка. Тогда уравнения

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t) \end{cases}$$

задают в параметрической форме кривую на плоскости x_1, x_2. Эта кривая называется *фазовой кривой*, или *фазовой траекторией* системы.

Плоскость, на которой расположены фазовые траектории, называется *фазовой плоскостью* автономной системы*.

Интегральные кривые рассматриваемой системы изображаются в трехмерном пространстве переменных x_1, x_2, t. Если $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$ — решение системы, то интегральная кривая задается в параметрической форме уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ t = t, \end{cases}$$

а фазовая траектория — не что иное, как проекция интегральной кривой на фазовую плоскость (плоскость x_1, x_2).

На рис. 4.8 приведены изображения интегральной кривой и фазовой траектории автономной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -3x_1 - 3x_2, \\ x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0. \end{cases}$$

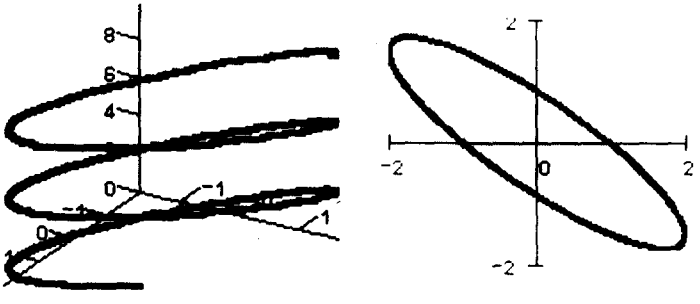


Рис. 4.8. Интегральная кривая и фазовая траектория автономной системы

Указание. Графики, приведенные на рис. 4.8, получены следующим образом. Сначала с помощью функции rkfixed решена задача Коши для системы. Затем в пространстве x_1, x_2, t построено изображение интегральной кривой — линии, координаты точек которой x_{1j}, x_{2j}, t_k вычислены функцией rkfixed, а на плоскости x_1, x_2 построено изображение соответствующей фазовой траектории — линии, координаты точек которой x_{1j}, x_{2j}.

*Для $n > 2$ фазовые траектории располагаются в *фазовом пространстве*.

ЗАДАНИЕ 4.7

Изобразите интегральные кривые и соответствующие фазовые кривые заданной системы, проходящие через заданные точки.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное 1.
3. Определите вектор-столбец начальных условий для первой задачи Коши.
4. Определите вектор-столбец правых частей системы.
5. Выберите значение шага интегрирования h и вычислите количество шагов N интегрирования системы на отрезке $[x_0, x_{end}]$ по формуле $\mathsf{N} = \left[\frac{|x_{end} - x_0|}{h}\right]$.
6. Решите задачу Коши для первого начального условия.
7. Изобразите интегральную кривую для первой задачи Коши.
8. Изобразите соответствующую фазовую кривую.
9. Определите вектор-столбец начальных условий для второй задачи Коши.
10. Решите задачу Коши для второго начального условия.
11. Изобразите интегральную кривую для второй задачи Коши.
12. Изобразите соответствующую фазовую кривую.

Пример выполнения задания

Изобразите интегральные кривые и соответствующие фазовые кривые системы

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1 - 0.1(x_1^2 - 1)x_2, \end{cases}$$

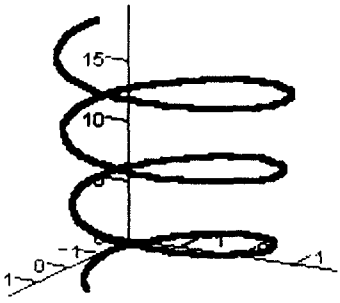
проходящие через точки $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ и $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = -0.5$.

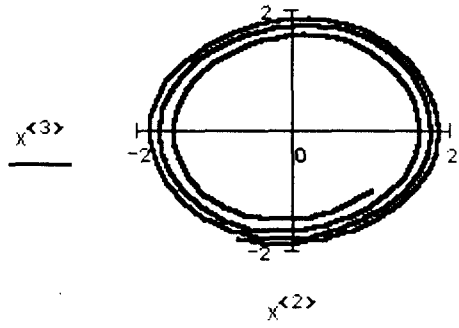
Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение задачи, приведен ниже.

Здесь в качестве интегральных и фазовых кривых изображены графики соответствующих приближенных решений и их проекции. Соответствующие задачи решены методом Рунге — Кутты с фиксированным шагом $h = 0.2$.

$$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad \mathbf{x} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) := \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - 0.1\cdot\left[(x_1)^2 - 1\right]\cdot x_2 \end{bmatrix}$$

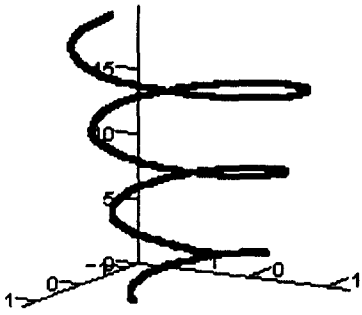
$$\mathbf{X} := \mathrm{rkfixed}(\mathbf{x}, 0, 20, 100, \mathbf{f}) \qquad i := 1..100$$

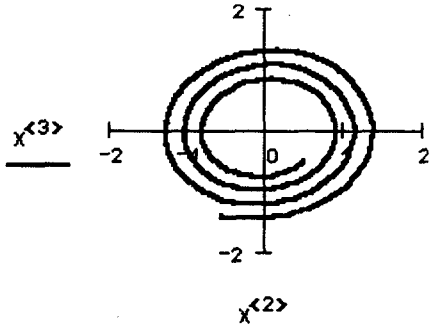




$X^{\langle 2\rangle}, X^{\langle 3\rangle}, X^{\langle 1\rangle}$

$$x := \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \qquad X := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 20, 100, f)$$





$X^{\langle 2\rangle}, X^{\langle 3\rangle}, X^{\langle 1\rangle}$

Указание. Решите задачу Коши методом Рунге — Кутты с фиксированным шагом, присвоив решение матрице X. Элементы 1-го столбца $X^{<1>}$ матрицы X содержат координаты t_i точек $\left((x_1)_i, (x_2)_i, t_i\right)$, соответствующие значения $(x_1)_i$, $(x_2)_i$ присвоены элементам 2-го и 3-го столбца матрицы X. Для того чтобы построить график интегральной кривой, щелкните по кнопке в панели , введите через запятую в позиции, указанной меткой, имена векторов-столбцов матрицы X: $X^{<2>}$, $X^{<3>}$, $X^{<1>}$. При таком порядке следования столбцов на графике отображаются точки с абсциссами $(x_1)_i$, ординатами $(x_2)_i$ и аппликатами t_i. Параметры настройки графика установите так, как показано на рис. 4.9. Чтобы изобразить фазовую кривую, щелкните по кнопке в панели и укажите в качестве аргумента $X^{<2>}$, а в качестве функции — $X^{<3>}$. При этом на оси абсцисс отображаются координаты $(x_1)_i$, на оси ординат — $(x_2)_i$. Параметры графика установите так, как показано на рис. 4.10. Затем введите в качестве начальных условий ординату второй точки и решите задачу Коши, сохранив все параметры функции rkfixed, и изобразите новую интегральную кривую и соответствующую ей фазовую траекторию. Из приведенных рисунков видно, что с ростом t точка на фазовой плоскости (x_1, x_2) удаляется от заданной начальной точки, а интегральные кривые имеют вид спирали, раскручивающейся в направлении оси t.

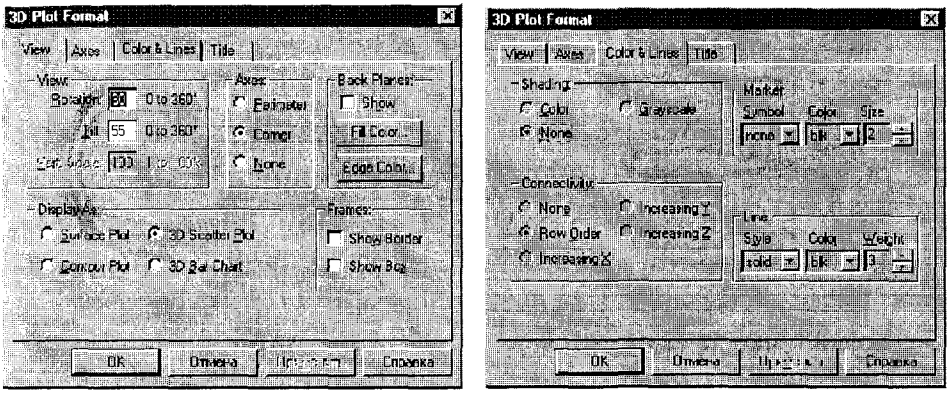


Рис. 4.9. Окна настройки параметров изображения интегральных кривых

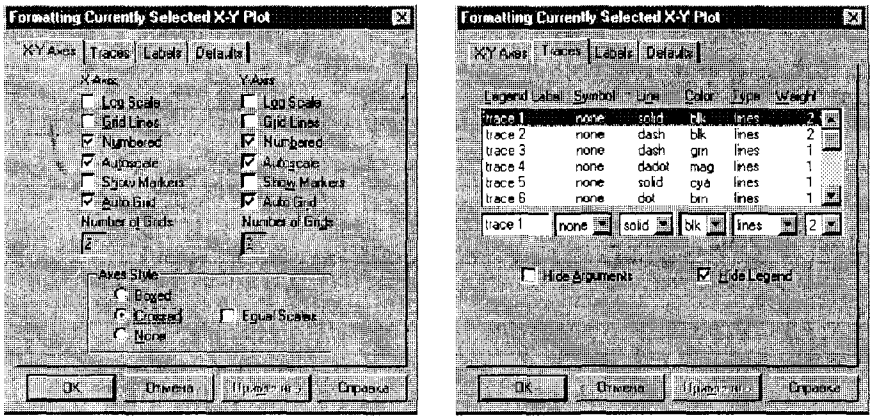


Рис. 4.10. Окна настройки параметров изображения фазовых кривых

Точки покоя линейной автономной системы

Для фазовых траекторий автономной системы $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ с непрерывно дифференцируемой правой частью $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ справедливы следующие утверждения:

- если существует такая точка $\boldsymbol{a}$, что $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = 0$, то $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{a}$, $-\infty < t < \infty$, является решением автономной системы, т.е. соответствующая фазовая траектория — точка;
- две фазовые кривые либо не имеют общих точек, либо совпадают;
- фазовая траектория, отличная от точки, есть гладкая кривая*;

---

* *Гладкой* называется кривая, в каждой точке которой есть ненулевой касательный вектор.

- всякая фазовая кривая принадлежит к одному из трех типов — гладкая кривая без самопересечений, замкнутая гладкая кривая (цикл), точка;
- если фазовая кривая, отвечающая решению $\boldsymbol{x}(t) = \varphi(t)$, есть гладкая замкнутая кривая, то это решение есть периодическая функция.

Точка $\boldsymbol{a}$, в которой правая часть системы обращается в нуль, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = 0$, называется *положением равновесия* системы. Положение равновесия называют также *точкой покоя* автономной системы.

Точка покоя $\boldsymbol{a}$ называется *устойчивой по Ляпунову*, если:

1) существует такое $\Delta > 0$, что для $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{a}| < \Delta$ решение задачи Коши с начальным условием $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ существует при $0 \le t < \infty$;

2) для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что если $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{a}| \le \delta$ и $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, то $|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{a}| \le \varepsilon$ при всех $0 \le t < \infty$.

Устойчивая точка покоя называется *асимптотически устойчивой*, если $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}$ при достаточно малых $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{a}|$.

Очевидно, что линейная автономная система с невырожденной матрицей

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

имеет единственную точку покоя: точку $(0, 0)$ — $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 0$, $-\infty < t < \infty$.

При этом характер точки покоя (ее устойчивость, асимптотическую устойчивость, неустойчивость) можно установить по значениям собственных чисел матрицы системы.

А именно, пусть λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

исследуемой системы, тогда:

- если λ_1, λ_2 — действительные отрицательные числа, то точка покоя устойчива и называется *устойчивым узлом* (рис. 4.11 *а*);
- если λ_1, λ_2 — действительные положительные числа, то точка покоя неустойчива и называется *неустойчивым узлом* (рис. 4.11 *г*);
- если λ_1, λ_2 — действительные числа, имеющие разные знаки, то точка покоя неустойчива и называется *седлом* (рис. 4.11 *е*);

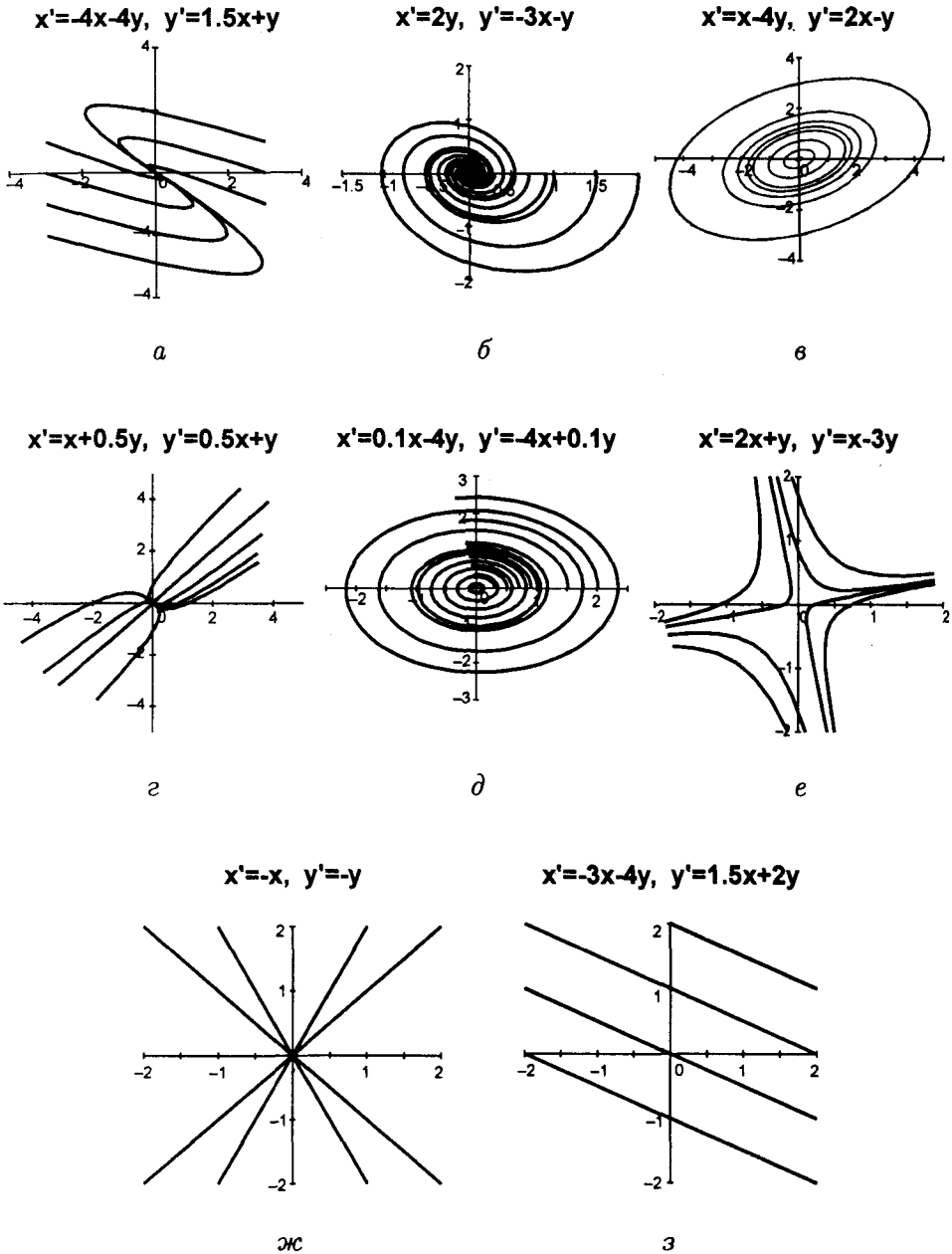


Рис. 4.11. Фазовые портреты линейных систем в окрестности точек покоя: *а*, *б*, *в* — устойчивые точки покоя (*а*, *б* — асимптотически устойчивые); *г*, *д*, *е* — неустойчивые точки покоя, точнее: *а* — устойчивый узел; *б* — устойчивый фокус; *в* — центр; *г* — неустойчивый узел; *д* — неустойчивый фокус; *е* — седло; *ж* — диакритический узел; *з* — точки покоя лежат на прямой $y = -(3/4)x$

- если λ_1, λ_2 — комплексные числа, $\lambda_{1,2} = \operatorname{Re}\lambda \pm i\operatorname{Im}\lambda$ и $\operatorname{Re}\lambda \le 0$, то точка покоя устойчива, точнее, при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ точка устойчива, но не асимптотически устойчива и называется *центром* (рис. 4.11 *в*), а при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ она асимптотически устойчива и называется *устойчивым фокусом* (рис. 4.11 *б*); если же $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то точка покоя неустойчива и называется *неустойчивым фокусом* (рис. 4.11 *д*);
- если $\lambda_1 = \lambda_2 \ne 0$ — действительные числа, то точка покоя — узел специального вида, называемый *диакритическим* (устойчивым при $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ и неустойчивым, когда $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ (рис. 4.10 *ж*));
- если $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$, то существует прямая, проходящая через начало координат, все точки которой являются точками покоя (рис. 4.11 *з*);
- если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то все точки плоскости являются точками покоя*.

На рис. 4.11 приведены фазовые кривые линейных автономных систем в окрестности точки покоя $(0, 0)$, построенные в Mathcad.

ЗАДАНИЕ 4.8

Определите характер точки покоя заданной линейной системы и изобразите несколько фазовых кривых.

Порядок выполнения задания

1. Установите автоматический режим вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
3. Определите матрицу системы и вычислите ее собственные значения.
4. Определите характер точки покоя.
5. Выберите различные начальные точки и решите соответствующие задачи Коши с шагом $h = 0.1$. Начальные точки выбирайте близкими к точке покоя для неустойчивых точек и удаленными от нее — для устойчивых.
6. Постройте на одном графике соответствующие фазовые траектории.

Пример выполнения задания

Определите характер точки покоя автономной системы

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 4x_2, \\ x_2' = -2x_2 \end{cases}$$

*В последних двух случаях матрица системы вырождена.

и изобразите несколько фазовых кривых. Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение задачи, приведен ниже.

Исследование системы x'=2x+4y, y'=-2x

ORIGIN := 1

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Собственные значения 2 и - 2 действительные, имеют разные знаки, точка покоя неустойчива - седло

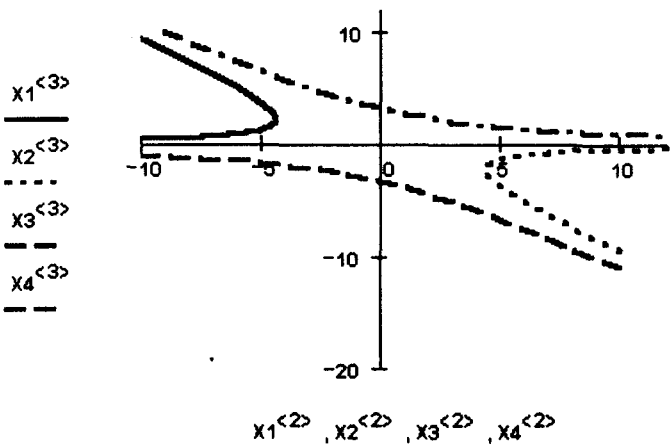
$$f(t, x) := \begin{bmatrix} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \\ -2 \cdot x_2 \end{bmatrix} \qquad a := 0 \qquad b := 20 \qquad h := 0.1$$

$$x := \begin{bmatrix} -10 \\ 9.5 \end{bmatrix} \qquad X1 := \text{rkfixed}\left(x, a, b, \frac{b}{h}, f\right)$$

$$x := \begin{bmatrix} 10 \\ -9.5 \end{bmatrix} \qquad X2 := \text{rkfixed}\left(x, a, b, \frac{b}{h}, f\right)$$

$$x := \begin{bmatrix} -9 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad X3 := \text{rkfixed}\left(x, a, b, \frac{b}{h}, f\right)$$

$$x := \begin{bmatrix} 10 \\ -11 \end{bmatrix} \qquad X4 := \text{rkfixed}\left(x, a, b, \frac{b}{h}, f\right)$$



Указание. Для вычисления собственных значений матрицы линейной системы используйте функцию eigenvals(M). Определите матрицу системы A, щелкните в меню **Insert** по строке **Function**, выберите в открывшемся списке стрелками прокрутки имя нужной функции и щелкните по нему дважды, введите в помеченной позиции имя матрицы A, выделите все выражение рамкой и введите с клавиатуры знак равенства. Все остальные построения и вычисления выполняйте так же, как в предыдущем задании. Чтобы различить фазовые кривые, выходящие из разных точек, выберите для них разные типы линий. Начальные точки для фазовых траекторий и отрезок интегрирования выбирайте экспериментально так, чтобы получить понятный рисунок. Из приведенного в документе графика видно, что все четыре траектории начинаются в точках, удаленных от начала координат, затем приближаются к началу координат и снова уходят от него.

Векторное поле автономной системы

Если в каждой точке области $G \subset \mathbb{R}^n$ задан n-мерный вектор $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{X} \in G \subset \mathbb{R}^n$, то говорят, что в области G задано *векторное поле.*

Запишем автономную систему второго порядка

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y), \\ y' = f_2(x,y) \end{cases}$$

в векторной форме:

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}),$$

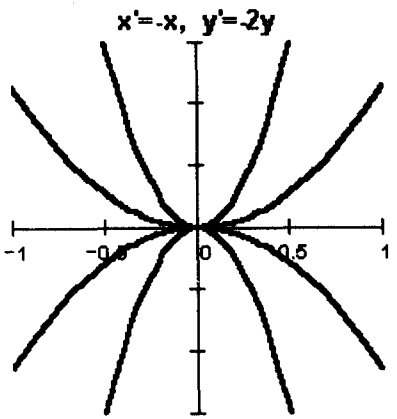
где

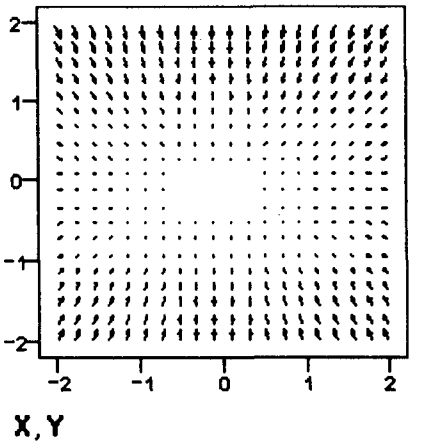
$$\boldsymbol{X} = (x, y), \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big).$$

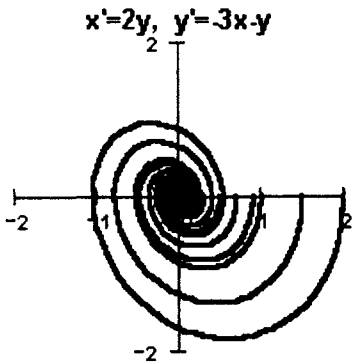
Автономная система $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ полностью определяется заданием векторного поля $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$. Действительно, в каждой точке $\boldsymbol{X}_0 = (x_0, y_0)$ гладкой фазовой кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ существует касательный вектор $\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$, равный (в силу системы) вектору $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$. Иными словами, векторное поле $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ автономной системы задает в каждой точке направление касательной к фазовой кривой системы, проходящей через эту точку.

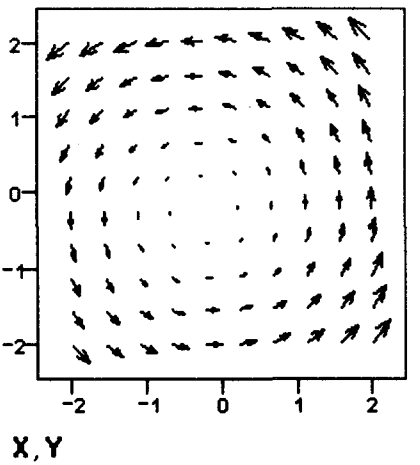
Точки векторного поля, в которых вектор $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ нулевой, называют *особыми точками* векторного поля. Таким образом, точки покоя автономной системы — это особые точки векторного поля.

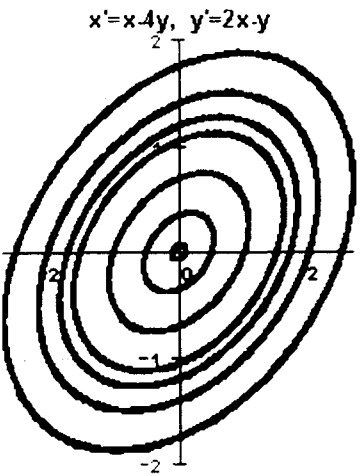
Ниже представлены фрагменты фазовых портретов и векторных полей нескольких линейных систем с точками покоя разных типов. Из приведенных рисунков видно, что по векторному полю автономной системы можно воссоздать ее фазовый портрет и обнаружить точки покоя системы.

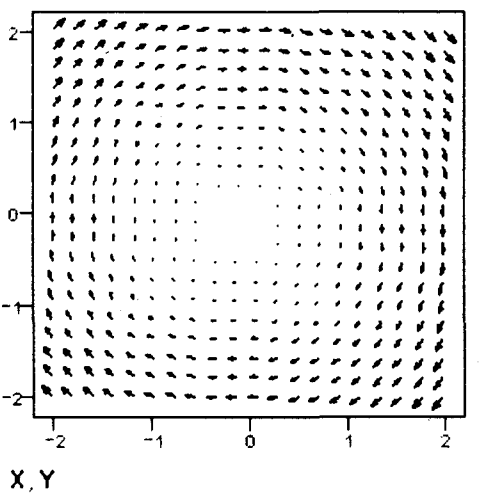

x'=-x, y'=-2y
-1
-0.5
0
0.5
1

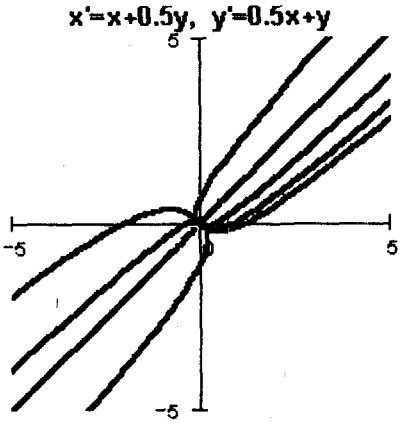

2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
X, Y

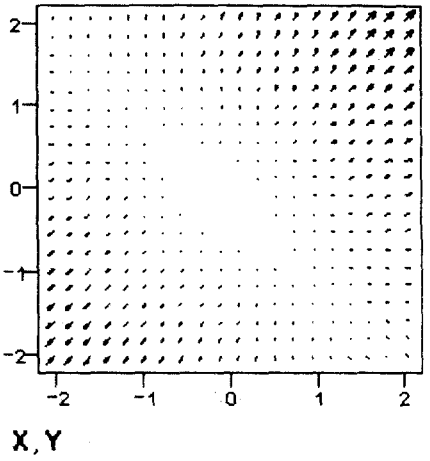

x'=2y, y'=-3x-y
2
-2
-1
1
2
-2

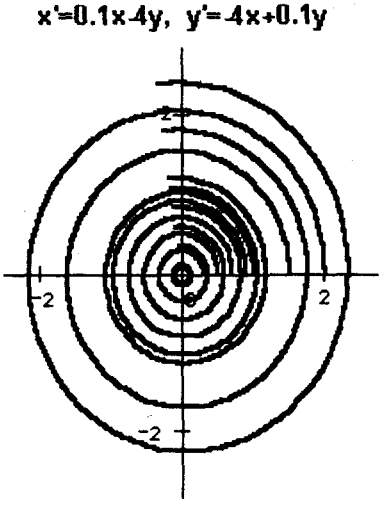

2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
X, Y

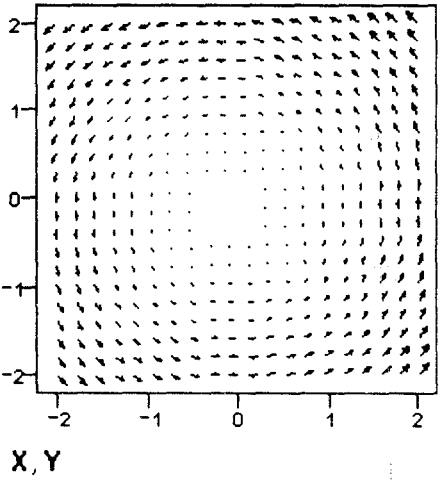

x'=x-4y, y'=2x-y
2
-2
0
2
-1
-2

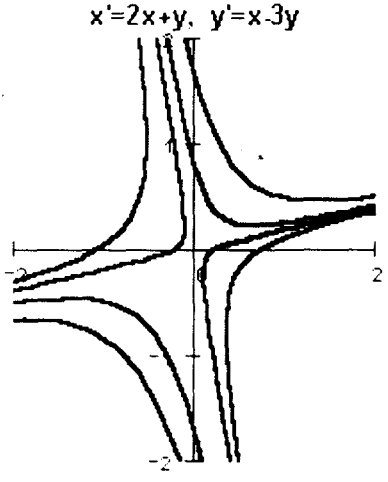

2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
X, Y

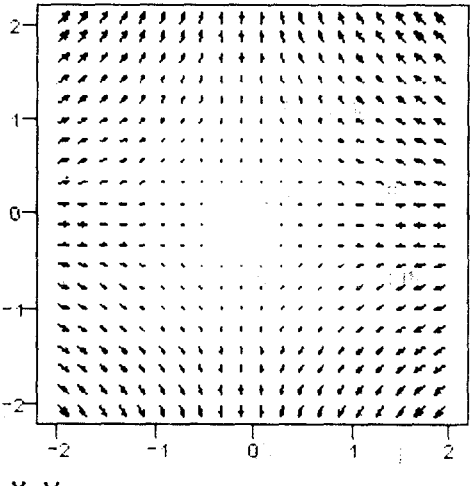

x'=x+0.5y, y'=0.5x+y
5
-5
0
5
-5


2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
X, Y


x'=0.1x-4y, y'=-4x+0.1y
2
-2
2
-2


2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
X, Y


x'=2x+y, y'=x-3y
1
-2
0
2
-1
-2


2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
X, Y

ЗАДАНИЕ 4.9

Для системы из задания 4.8 изобразите векторное поле в окрестности точки покоя.

Порядок выполнения задания

1. Прочитайте файл с рабочим документом задания 4.8.
2. Определите диапазоны изменения индексов узлов сетки по переменным (x_i, y_j).
3. Вычислите значения (x_i, y_j) узлов сетки.
4. Определите функции переменных x, y вычисления координат векторного поля.
5. Сформируйте матрицы, содержащие координаты векторов, изображаемых на векторном поле. Элементы этих матриц — значения в узлах сетки (x_i, y_j) функций, определенных в предыдущем пункте.
6. Изобразите вычисленное векторное поле.

Пример выполнения задания

Изобразите векторное поле в окрестности точки покоя системы

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 4x_2, \\ x_2' = -2x_2. \end{cases}$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение задачи, приведен ниже.

$i := 1..20 \qquad j := 1..20$

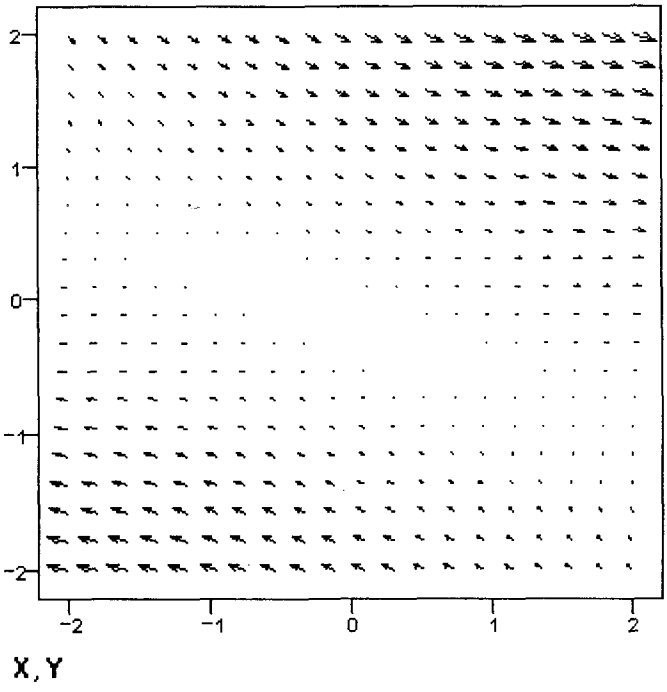
$x_i := -2 + 0.2 \cdot i$

$y_j := -2 + 0.2 \cdot j$

$xv(x, y) := 2 \cdot x + 4 \cdot y \qquad yv(x, y) := -2 \cdot y$

$X_{i,j} := xv(x_i, y_j)$

$Y_{i,j} := yv(x_i, y_j)$



Указание. Прочитайте сохраненный ранее файл с решением задачи предыдущего задания. Определите диапазоны изменения индексов узлов сетки. Определите, как показано в приведенном фрагменте, матрицы координат изображаемых векторов векторного поля. Чтобы построить векторное поле, щелкните по свободному месту в рабочем документе, затем — по кнопке векторного поля в панели графиков и введите через запятую в помеченной позиции имя матрицы, содержащей первые координаты векторов, имя матрицы со вторыми координатами и щелкните по рабочему документу вне поля графиков. Щелкнув дважды по полю графиков, установите параметры изображения (рис. 4.12).

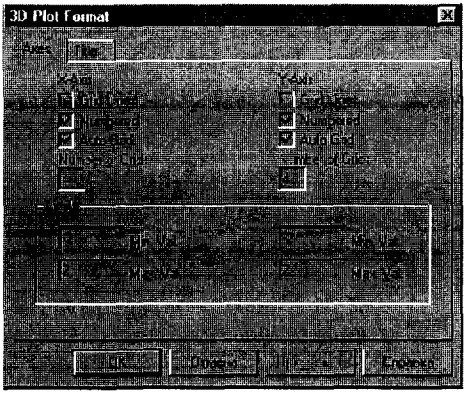


Рис. 4.12. Окно настройки параметров изображения векторного поля

Устойчивые решения. Предельные циклы. Фазовые портреты нелинейных систем

Рассмотрим автономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

с гладкими правыми частями. Пусть $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, или в векторной форме $\boldsymbol{\varphi}(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big)$, — некоторое решение этой системы.

Решение $\varphi(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если:

1) существует такое $\Delta > 0$, что для $|\boldsymbol{x}_0 - \varphi(0)| < \Delta$ при $0 \le t < \infty$ существует решение $\boldsymbol{x}(t)$ задачи Коши с начальным условием $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$;

2) для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что если $|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{\varphi}(0)| \le \delta$, то $|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| \le \varepsilon$ при всех $0 \le t < \infty$.

Устойчивое решение $\boldsymbol{\varphi}(t)$ называется *асимптотически устойчивым*, если $\lim\limits_{t\to\infty} |\boldsymbol{x}(t) - \varphi(t)| = 0$ при достаточно малых $|\boldsymbol{x}(0) - \varphi(0)|$.

Если фазовая траектория $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$ — замкнутая гладкая кривая γ, в некоторой окрестности которой нет других замкнутых траекторий, то она является *предельным циклом*: все траектории, которые начинаются достаточно близко от γ, спиралевидно приближаются к ней либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$.

Предельные циклы бывают трех типов:

устойчивые — близкие траектории при $t \to +\infty$ "навиваются" на цикл;

неустойчивые — близкие траектории при $t \to +\infty$ "уходят" от цикла;

полуустойчивые — траектории, лежащие по одну сторону от цикла, „навиваются“ на него при $t \to +\infty$, а лежащие по другую сторону — "отходят" от цикла.

ЗАДАНИЕ 4.10

Покажите графически, что заданная автономная система имеет предельный цикл, и определите его характер (устойчивый, неустойчивый, полуустойчивый). Начинайте строить фазовые кривые в окрестности указанной в задании точки.

Порядок выполнения задания

1. Постройте, действуя как в задании 4.8, несколько фазовых траекторий, начинающихся в окрестности указанной точки.

2. Обнаружив предельный цикл, постройте еще одну фазовую траекторию с началом внутри цикла.
3. Постройте фазовую траекторию с началом вне цикла.
4. Определите по результатам построений тип цикла.
5. Изобразите векторное поле системы в окрестности предельного цикла.

Пример выполнения задания

Покажите графически, что автономная система

$$\begin{cases} x_1' = -3 + 2x_2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2, \\ x_2' = -2x_1 - x_1^2 \end{cases}$$

имеет предельный цикл, внутри которого лежит точка $(1.7, 0)$, и определите его характер.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение задачи, приведен ниже.

Исследование системы x'=-3+2y+x^2+y^2+xy, y'=-2x-x^2

ORIGIN := 1

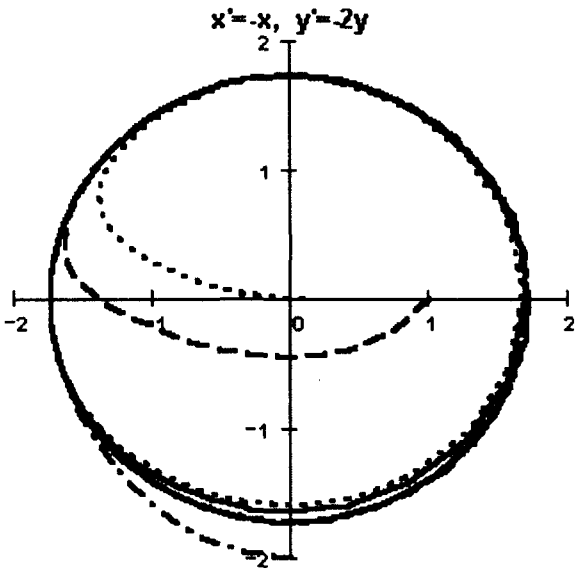
$$f(t, x) := \begin{bmatrix} -3 + 2\cdot x_2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 + x_1\cdot x_2 \\ -2\cdot x_1 - (x_1)^2 \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} 1.7 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X1 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 100, f)$$

$$x := \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X2 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 100, f)$$

$$x := \begin{bmatrix} 1. \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X3 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 100, f)$$

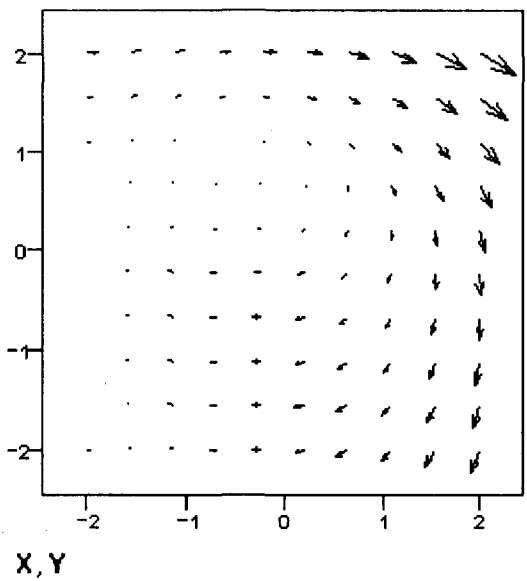
$$x := \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad X4 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 100, f)$$



$N := 10 \qquad i := 1..N \qquad j := 1..N$

$xv(x,y) := -3 + 2\cdot y + x^2 + y^2 + x\cdot y \qquad yv(x,y) := -2\cdot x - x^2$

$x_i := -2 + i\cdot 0.4 \quad y_j := -2 + j\cdot 0.4 \quad X_{i,j} := xv(x_i, y_j) \quad Y_{i,j} := yv(x_i, y_j)$



Указание. Все вычисления выполняйте так же, как в предыдущих заданиях. Поскольку траектории, начинающиеся как вне, так и внутри цикла, стремятся к нему с ростом t, можно утверждать, что цикл устойчив.

4.7 ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Методы исследования поведения решений дифференциальных уравнений, изложенные в предыдущих разделах, можно успешно применять при исследовании моделей реальных систем, зависящих от времени. В этом разделе будут описаны известные биологические и экономические модели*.

Динамика популяций. Уравнения Вольтерра — Лотка

В динамике популяций есть много примеров, когда изменение численности популяций во времени носит колебательный характер. Одним из самых известных примеров описания динамики взаимодействующих популяций являются уравнения Вольтерра — Лотка.

Рассмотрим модель взаимодействия хищников и их добычи, когда между особями одного вида нет соперничества. Пусть x_1 и x_2 — число жертв и хищников соответственно. Предположим, что относительный прирост жертв $\frac{x_1'}{x_1}$ равен $a - bx_2$, $a, b > 0$, где a — скорость размножения жертв в отсутствие хищников, $-bx_2$ — потери от хищников. Развитие популяции хищников зависит от количества пищи (жертв), при отсутствии пищи ($x_1 = 0$) относительная скорость изменения популяции хищников равна $\frac{x_2'}{x_2} = -c$, $c > 0$, наличие пищи компенсирует убывание, и при $x_1 > 0$ имеем $\frac{x_2'}{x_2} = -c + dx_1$, $d > 0$.

Таким образом, система Вольтерра — Лотка имеет вид:

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1, \\ x_2' = (-c + dx_1)x_2, \end{cases}$$

где $a, b, c, d > 0$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий определение системы Вольтерра — Лотка, фазовый портрет системы при $a = 4$, $b = 2.5$, $c = 2$, $d = 1$ и графики решения с начальным условием $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = 1$.

*Описанные в этом разделе модели взяты из [40].

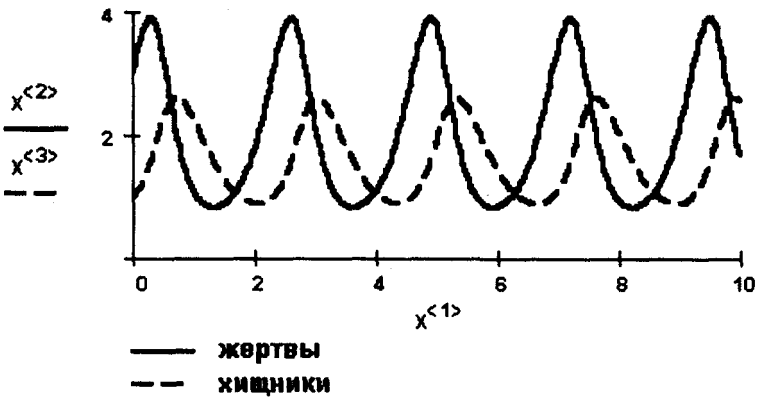
Модель "хищник — жертва" Вольтерра — Лотка

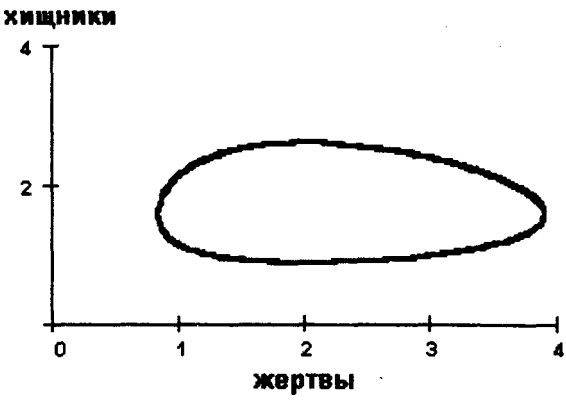
$$\frac{d}{dt}x_1 = (a - b\cdot x_2)\cdot x_1 \qquad \frac{d}{dt}x_2 = (-c + d\cdot x_1)\cdot x_2$$

$ORIGIN := 1$

$a := 4 \quad b := 2.5 \quad c := 2 \quad d := 1$

$$x := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad F(t,x) := \begin{bmatrix} (a - b\cdot x_2)\cdot x_1 \\ (-c + d\cdot x_1)\cdot x_2 \end{bmatrix} \quad X := rkfixed(x, 0, 10, 400, F)$$





Видно, что процесс имеет колебательный характер. При заданном начальном соотношении числа особей обоих видов 3 : 1 обе популяции сначала растут. Когда число хищников достигает величины $b = 2.5$, популяция жертв не успевает восстанавливаться и число жертв начинает убывать. Уменьшение количества пищи через некоторое время начинает сказываться на популяции хищников, и, когда число жертв

достигает величины* $x_1 = \frac{c}{d} = 2$, число хищников тоже начинает сокращаться вместе с сокращением числа жертв. Сокращение популяций происходит до тех пор, пока число хищников не достигнет величины** $\frac{a}{b} = 1.6$. С этого момента начинает расти популяция жертв; через некоторое время пищи становится достаточно, чтобы обеспечить прирост хищников, обе популяции растут, и процесс повторяется снова и снова. На графике четко виден периодический характер процесса. Количество жертв и хищников колеблется возле величин $x_1 = 2$, $x_2 = 1.6$ соответственно***. Периодичность процесса явственно видна на фазовой плоскости: фазовая кривая $\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ — замкнутая линия. Самая левая точка этой кривой, $x_2 = \frac{a}{b} = 1.6$, — это точка, в которой число жертв достигает наименьшего значения. Самая правая точка, $x_1 = 4$, $x_2 = 1.6$, — точка пика популяции жертв. Между этими точками количество хищников сначала убывает до нижней точки фазовой кривой, $x_1 = \frac{c}{d} = 2$, где достигает наименьшего значения, а затем растет до верхней точки фазовой кривой ($x_1 = 2$, $x_2 = 2.5$). Фазовая кривая охватывает точку $x_1 = 2$, $x_2 = 1.6$.

На языке дифференциальных уравнений это означает, что система имеет стационарное состояние $x_1' = 0$, $x_2' = 0$, которое достигается в точке $x_1 = 2$, $x_2 = 1.6$. Если в начальный момент система находилась в стационарной точке, то решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ не будут изменяться во времени, останутся постоянными. Всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию решений. Неэллиптичность формы траектории, охватывающей центр, отражает негармонический характер колебаний.

Отметим, что рассмотренная модель может описывать поведение конкурирующих фирм, рост народонаселения, численность воюющих армий, изменение экологической обстановки, развитие науки и др.

ЗАДАНИЕ 4.11

Постройте графики решения и фазовые портреты динамической системы, моделирующей взаимодействие популяций

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1, \\ x_2' = (-c + dx_1)x_2, \end{cases}$$

при заданных значениях параметров a, b, c, d. Исследуйте поведение решения, изменяя параметры в указанном диапазоне.

*В этой точке $x_2' = 0$.

**В этой точке $x_1' = 0$.

***Дробные числа здесь не означают "половину волка": величины могут измеряться в сотнях, тысячах и т.п.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное 1.
3. Определите вектор-столбец начальных условий для первой задачи Коши.
4. Определите вектор-столбец правых частей системы.
5. Выберите значение шага интегрирования h и вычислите количество шагов N интегрирования системы на отрезке $[x_0, x_{end}]$ по формуле $N = \left[\frac{|x_{end} - x_0|}{h}\right]$.
6. Решите задачу Коши для первого начального условия.
7. Изобразите соответствующую фазовую кривую и график решения.
8. Определите векторы-столбцы начальных условий для каждого начального условия
9. Решите соответствующие задачи, сохранив каждое решение в отдельной матрице.
10. Изобразите соответствующие фазовые кривые и графики решений.

Пример выполнения задания

Примерный вариант решения задачи для $a = 4,\ b = 2.5,\ c = 2,\ d = 1$ приведен ниже.

Модель "хищник — жертва" Вольтерра — Лотка

ORIGIN := 1

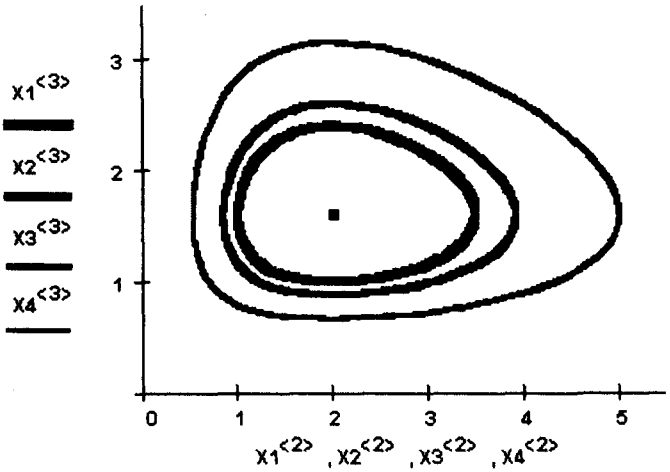
$a := 4 \quad b := 2.5 \quad c := 2 \quad d := 1 \qquad F(t, x) := \begin{vmatrix} (a - b \cdot x_2) \cdot x_1 \\ (-c + d \cdot x_1) \cdot x_2 \end{vmatrix}$

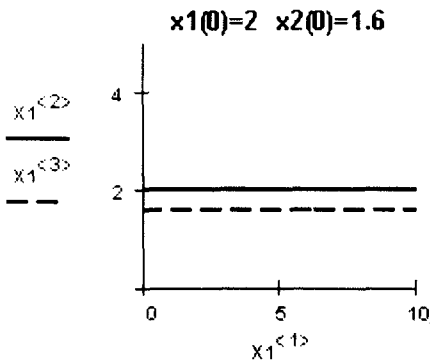
$x := \begin{bmatrix} 2 \\ 1.6 \end{bmatrix} \qquad X1 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 400, F)$

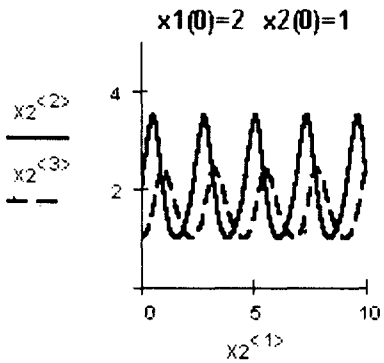
$x := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X2 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 400, F)$

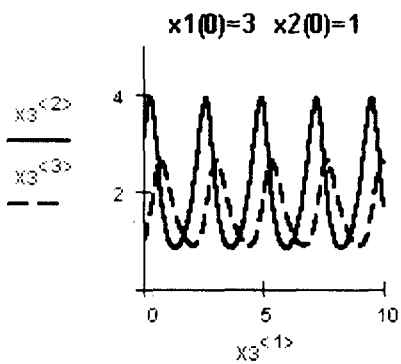
$x := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X3 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 400, F)$

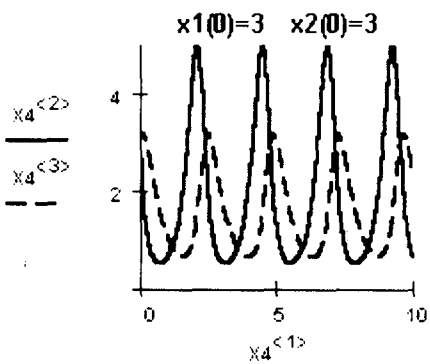
$$x := \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad X4 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 10, 400, F)$$











Указание. Для того чтобы построить графики решений и фазовые кривые для различных начальных значений, определите значения параметров системы, определите и введите вектор-столбец начальных условий x для первого решения, определите и введите вектор-функцию правых частей F(t,x) и сохраните в матрице

X1 решение, вычисленное методом Рунге — Кутты с постоянным шагом на отрезке $[0, 10]$ в 400 точках (воспользуйтесь функцией rkfixed(x, 0, 10, 400, F)). Первый столбец этой матрицы содержит значения аргумента t — координаты 400 узлов сетки, второй столбец — значения x1 (число жертв) в узлах сетки, а третий — значения x2 (число хищников). Чтобы вычислить решение при других начальных значениях, присвойте новые значения вектору x и сохраните вычисленное решение в другой матрице. В приведенном документе найдены решения при четырех различных начальных значениях, которые сохранены в матрицах X1, X2, X3 и X4. Чтобы построить фазовые кривые, линии, заданные в параметрической форме уравнениями $\left(x = x_1(t), y = x_2(t)\right)$, щелкните по кнопке [📈], введите через запятую в позиции возле оси абсцисс $X1^{<2>}$, $X2^{<2>}$, $X3^{<2>}$, $X4^{<2>}$, а в позиции возле оси ординат — $X1^{<3>}$, $X2^{<3>}$, $X3^{<3>}$, $X4^{<3>}$. Фазовые кривые изображены линиями разной толщины. Фазовая кривая, отвечающая стационарному состоянию, представляет собой одну точку. Графики решений строятся аналогично. При этом аргумент — значения t в узлах сетки — сохранен в $X1^{<1>}$ для первого начального условия и в $X2^{<1>}$, $X3^{<1>}$, $X4^{<1>}$ — для остальных. Чтобы исследовать систему при других значениях параметров, измените в рабочем документе значение параметра и щелкните в меню **Math** по строке **Calculate Worksheet**.

Уравнения Вольтерра — Лотка с логистической поправкой

Рассмотрим модель конкурирующих видов с "логистической поправкой":

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1 - \alpha x_1^2, \\ x_2' = (-c_d x_1)x_2 - \alpha x_2^2. \end{cases}$$

В этом случае поведение решений в окрестности стационарной точки меняется в зависимости от величины и знака параметра α.

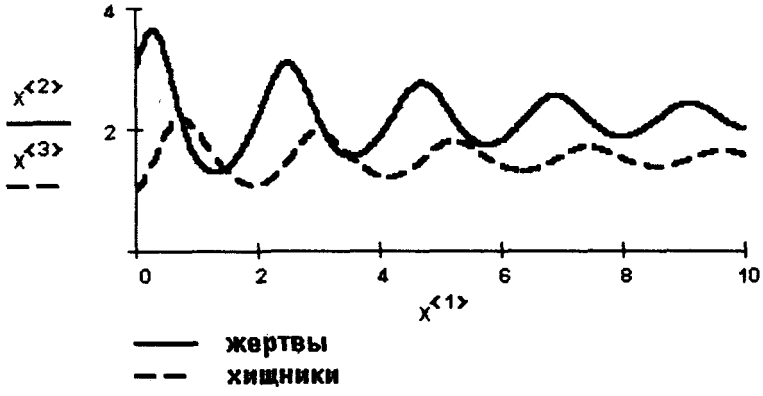
Ниже приведено исследование системы для $\alpha = 0.1$, $a = 4$, $b = 2.5$, $c = 2$, $d = 1$. Видно, что в этом случае стационарная точка превращается в устойчивый фокус, а решения — в затухающие колебания. При любом начальном состоянии через некоторое время состояние системы становится близким к стационарному и стремится к нему при $t \to \infty$.

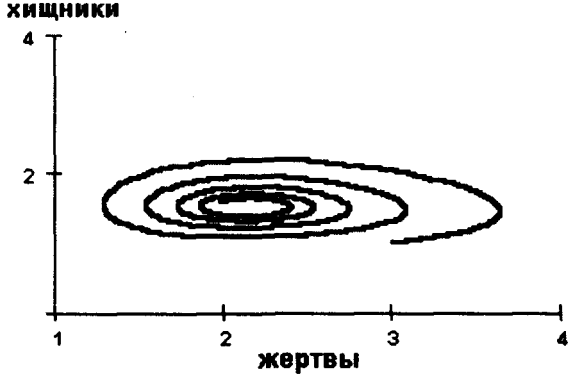
Модель "хищник — жертва" Вольтерра — Лотка с логистической поправкой

$$\mathbf{ORIGIN := 1} \qquad \mathbf{a := 4} \qquad \mathbf{b := 2.5} \qquad \mathbf{c := 2} \qquad \mathbf{d := 1} \qquad \boldsymbol{\alpha} \mathbf{:= 0.1}$$

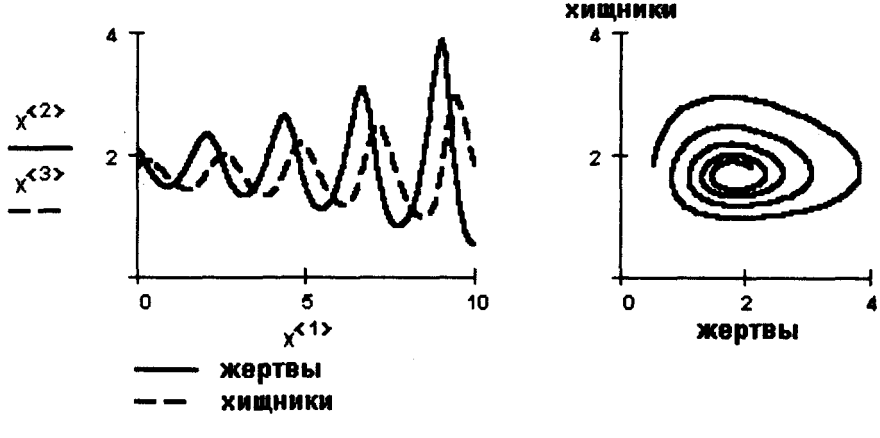
$$\mathbf{F(t,x) := \begin{bmatrix} (a - b\cdot x_2)\cdot x_1 - \alpha\cdot(x_1)^2 \\ (-c + d\cdot x_1)\cdot x_2 - \alpha\cdot(x_2)^2 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{x := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}} \qquad \mathbf{X := rkfixed(x, 0, 10, 400, F)}$$





Ниже приведены графики решений и фазовая кривая для тех же значений параметров, но при $\alpha = -0.1$. Как видно, в этом случае стационарная точка является неустойчивым фокусом и амплитуда колебаний численности видов растет. Как бы близко ни было начальное состояние к стационарному, с течением времени состояние системы будет сильно отличаться от стационарного.



ЗАДАНИЕ 4.12

Исследуйте поведение системы, моделирующей взаимодействие популяций

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1 - \alpha x_1^2, \\ x_2' = (-c_d x_1)x_2 - \alpha x_2^2 \end{cases}$$

при заданных значениях параметров a, b, c, d и при различных значениях параметра логистической поправки α. Постройте графики решения и фазовые портреты для нескольких различных начальных состояний системы. Найдите значения параметра α, при которых стационарное состояние является устойчивым, а при каких — неустойчивым.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное 1.
3. Задайте $\alpha = 0$ и определите значения параметров системы.
4. Определите вектор-столбец начальных условий для первой задачи Коши.
5. Определите вектор-столбец правых частей системы.
6. Выберите значение шага интегрирования h и вычислите количество шагов N интегрирования системы на отрезке $[x_0, x_{end}]$ по формуле $N = \left[\frac{|x_{end} - x_0|}{h}\right]$.
7. Решите задачу Коши для первого начального условия.
8. Изобразите соответствующую фазовую кривую и график решения.
9. Определите векторы-столбцы начальных условий для каждого начального условия.
10. Решите соответствующие задачи, сохранив каждое решение в отдельной матрице.
11. Изобразите соответствующие фазовые кривые и графики решений.
12. Измените в рабочем документе значение параметра α, присвоив ему положительное значение, не превосходящее 1.
13. Выполните вычисления для нескольких значений параметра α из $[0, 1]$.
14. Измените в рабочем документе значение параметра α, присвоив ему отрицательное значение, не превосходящее единицы по абсолютной величине. Сформулируйте вывод о характере стационарной точки и свойствах решений.

15. Выполните вычисления для нескольких значений параметра α из $[-1, 0]$. Сформулируйте вывод о характере стационарной точки и свойствах решений.

Пример выполнения задания

Примерный вариант решения задачи для $a = 4$, $b = 2.5$, $c = 2$, $d = 1$ приведен выше.

Модель Холлинга — Тэннера

На примере модели Вольтерра — Лотка и модели Вольтерра — Лотка с логистической поправкой было продемонстрировано одно из важнейших свойств центров — они легко разрушаются даже при самых малых изменениях правой части.

Большинство моделей является идеализацией действительности: в них внимание сосредоточено на некоторых основных переменных и соотношениях между ними. Поэтому устойчивость моделей относительно малых возмущений чрезвычайно важна в приложениях. Модели, не чувствительные к малым возмущениям, называются *грубыми*.

Модель Вольтерра — Лотка неустойчива относительно возмущений, поскольку ее стационарное состояние — центр.

Существует другой вид моделей, в которых возникают незатухающие колебания, — это модели, имеющие на фазовых портретах предельные циклы. Такая модель существует для системы конкурирующих видов — это модель Холлинга — Тэннера.

Скорость роста популяции жертв x_1' в этой модели равна сумме трех величин:

- скорости размножения в отсутствие хищников — rx_1;
- влияния внутривидовой конкуренции за пищу при ограниченных ресурсах* — $-rx_1\frac{x_1}{K}$;
- влияния хищников — $wx_2\frac{x_1}{D+x_1}$ в предположении, что хищник перестает убивать, когда насыщается.

Скорость роста популяции хищников x_2' строится так же, как в модели Вольтерра — Лотка, в предположении, что жертвы встречаются редко. Если для поддержания жизни одного хищника нужно J жертв, то популяция из x_1 жертв сможет обеспечить пищей $\frac{x_1}{J}$ хищников. Модель роста популяции хищников, в которой их число не может превысить эту критическую величину, имеет вид $x_2' = x_2\left(s - \frac{sJ}{x_1}x_2\right)$.

*Для случая конкурирующих производителей это влияние ограниченных сырьевых ресурсов.

Таким образом, имеем модель Холлинга—Тэннера:

$$\begin{cases} x_1' = r\left(1 - \dfrac{x_1}{K}\right)x_1 - wx_2\dfrac{x_1}{D + x_1}, \\ x_2' = s\left(1 - \dfrac{J}{x_1}\right)x_2, \end{cases}$$

где $r, s, K, D, J > 0$.

Можно показать, что при

$$s < \frac{r}{K} \cdot \frac{K - D - 2}{1 + D}$$

на фазовом портрете системы будет устойчивый предельный цикл.

Ниже приведено решение системы при $r = 1$, $K = 7$, $w = 1$, $D = 1$, $s = 0.2$, $J = 0.5$ и двух различных начальных состояниях. На фазовом портрете хорошо виден предельный цикл. Фазовые кривые системы с начальными состояниями вне и внутри области, ограниченной предельным циклом, "наматываются" извне или изнутри на одну и ту же замкнутую кривую.

Модель Холлинга — Тэннера

$$\frac{d}{dt}x_1 = r\cdot\left(1 - \frac{x_1}{K}\right)\cdot x_1 - \frac{w\cdot x_1\cdot x_2}{D + x_1} \qquad \frac{d}{dt}x_2 = s\cdot\left(1 - \frac{J\cdot x_2}{x_1}\right)\cdot x_2$$

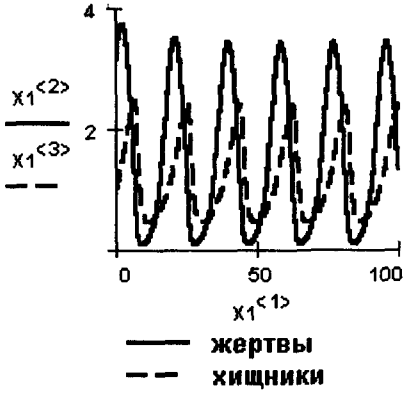
ORIGIN := 1

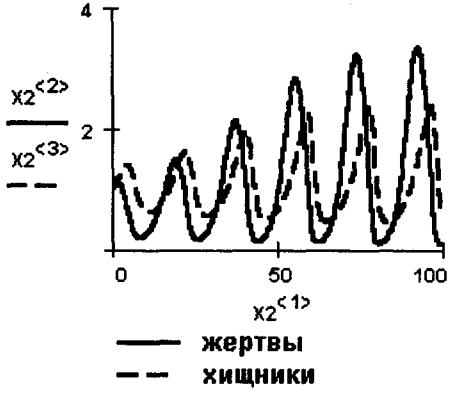
r := 1 s := 0.2 K := 7 D := 1 J := 0.5 w := 1.5

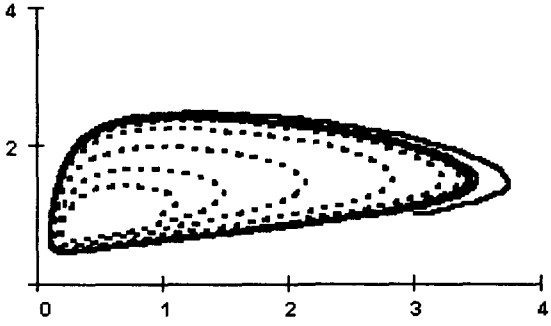
$$F(t, x) := \begin{bmatrix} r\cdot\left(1 - \dfrac{x_1}{K}\right)\cdot x_1 - \dfrac{w\cdot x_1\cdot x_2}{D + x_1} \\ s\cdot\left(1 - \dfrac{J\cdot x_2}{x_1}\right)\cdot x_2 \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X1 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 100, 400, F)$$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X2 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 100, 400, F)$$







ЗАДАНИЕ 4.13

Постройте графики решения и фазовые портреты, найдите предельные циклы динамической системы Холлинга — Тэннера

$$\begin{cases} x_1' = r\left(1 - \dfrac{x_1}{K}\right)x_1 - wx_2\dfrac{x_1}{D + x_1}, \\ x_2' = s\left(1 - \dfrac{J}{x_1}\right)x_2, \end{cases}$$

моделирующей взаимодействие конкурирующих видов в условиях ограниченных ресурсов. Исследуйте поведение решения, изменяя параметры r, K, w, s, J в указанном диапазоне.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное 1.
3. Определите вектор-столбец начальных условий для первой задачи Коши.

4. Определите вектор-столбец правых частей системы.
5. Выберите значение шага интегрирования h и вычислите количество шагов N интегрирования системы на отрезке $[x_0, x_{end}]$ по формуле $N = \left[\frac{|x_{end} - x_0|}{h}\right]$.
6. Решите задачу Коши для первого начального условия.
7. Изобразите соответствующую фазовую кривую и график решения.
8. Определите векторы-столбцы начальных условий для каждого начального условия.
9. Решите соответствующие задачи, сохранив каждое решение в отдельной матрице.
10. Изобразите соответствующие фазовые кривые и графики решений.

Пример выполнения задания

Примерный вариант решения задачи для $r = 1$, $K = 7$, $w = 1.5$, $D = 1$, $J = 0.5$ приведен выше.

Выравнивание цен

Модель выравнивания цен по уровню актива интересна тем, что в ней можно наблюдать гармонические колебания решений возле стационарного состояния.

Предположим, что изменение уровня актива q пропорционально разности между предложением s и спросом d, т.е. $q' = k(s - d)$, $k > 0$. Предположим далее, что изменение цены p пропорционально отклонению актива q от некоторого фиксированного уровня q_0, так что $p' = -m(q - q_0)$, $m > 0$. Таким образом, модель выравнивания цен по уровню актива имеет вид

$$\begin{cases} q' = k\big(s(p) - d(p)\big), \\ p' = -m(q - q_0). \end{cases}$$

В документе, представленном ниже, приведено решение системы для $s(p) = ap + s_0$, $d(p) = d_0 + cp$, $k = 0.3$, $m = 0.1$, $q_0 = 20$, $a = 20$, $s_0 = 10$, $d_0 = 50$, $c = -10$ при начальном состоянии $q(0) = 19$, $p(0) = 2$.

Видно, что цена и актив колеблются возле стационарного состояния $q = q_0$, $p = \frac{d_0 - s_0}{a - c}$. Фазовая траектория представляет собой эллипс, охватывающий стационарную точку. Это означает, что колебания актива и цены гармонические.

Модель выравнивания цен

$ORIGIN := 1$

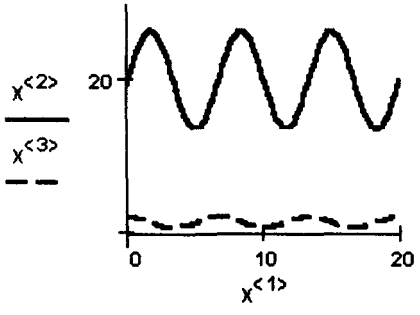
$k := 0.3 \qquad m := 0.1 \qquad q0 := 20$

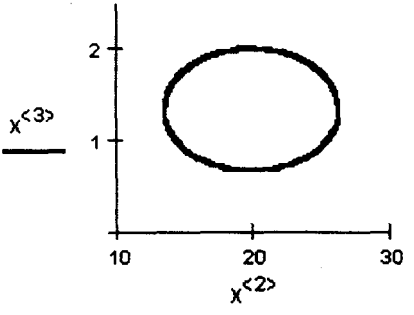
$a := 20 \qquad s0 := 10 \qquad c := -10 \qquad d0 := 50$

$s(p) := a \cdot p + s0 \qquad d(p) := c \cdot p + d0$

$$x := \begin{bmatrix} 19 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad F(t, x) := \begin{bmatrix} k \cdot \left(s(x_2) - d(x_2)\right) \\ -m \cdot \left(x_1 - q0\right) \end{bmatrix}$$

$X := rkfixed(x, 0, 20, 100, F)$





ЗАДАНИЕ 4.14

Постройте графики решения и фазовые портреты динамической системы, моделирующей выравнивание цен по уровню актива

$$\begin{cases} q' = k\big(s(p) - d(p)\big), \\ p' = -m(q - q_0) \end{cases}$$

при заданных функциях спроса и предложения $s(p)$, $d(p)$ и при заданных значениях параметров модели. Найдите стационарное состояние и определите его характер. Исследуйте модель, изменяя ее параметры.

Порядок выполнения задания

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное 1.
3. Определите параметры модели.
4. Введите выражения для вычисления значений функций спроса и предложения.
5. Определите вектор-столбец начальных условий.

6. Определите вектор-столбец правых частей системы.
7. Выберите значение шага интегрирования h и вычислите количество шагов N интегрирования системы на отрезке $[x_0, x_{end}]$ по формуле $N = \left\lceil \frac{|x_{end} - x_0|}{h} \right\rceil$.
8. Решите задачу Коши.
9. Изобразите соответствующую фазовую кривую и графики решения.
10. Исследуйте свойства решений при различных значениях параметров.
11. Определите векторы-столбцы начальных условий для каждого начального условия.
12. Решите соответствующие задачи, сохранив каждое решение в отдельной матрице.
13. Измените в рабочем документе параметры модели и опишите соответствующие изменения в свойствах решений.

Пример выполнения задания

Примерный вариант решения задачи для $k = 0.3$, $m = 0.1$, $q_0 = 20$, $s(p) = ap + s_0$, $d(p) = cp + d_0$, $a = 20$, $s_0 = 10$, $d_0 = 50$, $c = -10$ приведен выше.

ГЛАВА 5
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5.1
ФУНКЦИИ И ИНСТРУМЕНТЫ MATHCAD

Прежде чем приступать к решению задач теории вероятностей в Mathcad, познакомимся с инструментами, которые предоставляет пакет для их решения.

Напомним, что дискретная случайная величина ξ, принимающая значения $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, может быть задана *распределением* — таблицей вида

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$	p_n

Такие таблицы в среде Mathcad удобно хранить в виде матрицы размерности $2 \times n$.

Функция распределения случайной величины, имеющей приведенное выше распределение, имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ p_1, & x_1 \le x < x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x < x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}, & x_{n-1} \le x < x_n, \\ 1, & x_n \le x. \end{cases}$$

Ниже приведен фрагмент рабочего документа с определением распределения случайной величины, ее функции распределения и графиком функции распределения для случайной величины, имеющей следующее распределение:

ξ	1	0	7	4	-2
p	0.1	0.5	0.1	0.1	0.2

Распределение случайной величины

$$ORIGIN := 1 \qquad A := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

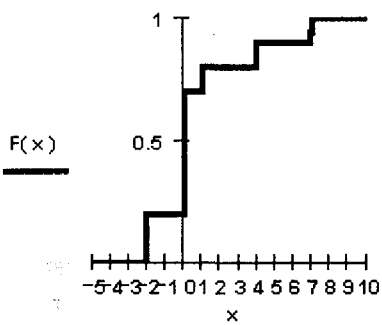
Функция распределения случайной величины

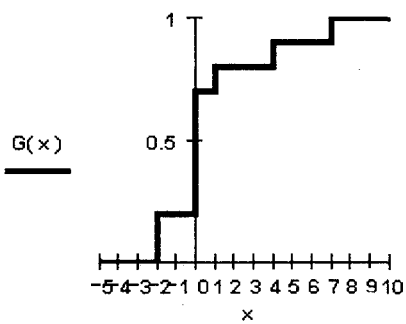
$$F(x) := \begin{cases} 0 \ \text{ if } -\infty < x < A_{1,1} \\ A_{2,1} \ \text{ if } A_{1,1} \le x < A_{1,2} \\ (A_{2,1} + A_{2,2}) \ \text{ if } A_{1,2} \le x < A_{1,3} \\ (A_{2,1} + A_{2,2} + A_{2,3}) \ \text{ if } A_{1,3} \le x < A_{1,4} \\ (A_{2,1} + A_{2,2} + A_{2,3} + A_{2,4}) \ \text{ if } A_{1,4} \le x < A_{1,5} \\ 1 \ \text{ if } A_{1,5} \le x < \infty \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины, определенная другим способом

$$G(x) := \begin{cases} 0 \ \text{ if } -\infty < x < -2 \\ 0.2 \ \text{ if } -2 \le x < 0 \\ 0.2 + 0.5 \ \text{ if } 0 \le x < 1 \\ 0.2 + 0.5 + 0.1 \ \text{ if } 1 \le x < 4 \\ 0.2 + 0.5 + 0.1 + 0.1 \ \text{ if } 4 \le x < 7 \\ 1 \ \text{ if } 7 \le x < \infty \end{cases}$$

График функции распределения случайной величины





Указание. Распределение случайной величины сохранено в матрице A: $A_{1,i}$ — значения случайной величины; $A_{2,i}$ — соответствующие вероятности; $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Функцию распределения, заданную разными выражениями на разных интервалах изменения аргументов, можно определить следующим образом: разверните панель программных элементов щелчком по кнопке [ ] и панель знаков

отношений — щелчком по кнопке [≠≥] и не закрывайте их, пока не закончите определение функции. Введите имя функции переменной x и знак присваивания, щелкните в панели программных элементов по кнопке [Add Line], введите в помеченной позиции нуль, щелкните по кнопке [if] и введите неравенства, определяющие первый интервал изменения аргумента (символ ∞ можно ввести щелчком по соответствующей кнопке в панели [$\int\frac{d}{dx}$]); затем перейдите во вторую строку определения функции, введите $A_{2,1}$ — имя переменной, содержащей значение p_1, или число 0.2 —значение p_1, выделите, нажимая клавишу <Space>, выражение для функции, щелкните по кнопке [if], введите неравенства, определяющие второй интервал изменения аргумента (знак можно ввести щелчком по соответствующей кнопке в панели отношений); выделите, нажимая клавишу <Space>, вторую строку определения функции, щелкните по кнопке [Add Line] и введите, действуя, как описано выше, определение функции на следующем интервале. В рабочем документе приведены два способа определения функции — с использованием имен переменных и с использованием конкретных значений этих переменных. Графики функций распределений построены стандартным для декартовых графиков способом. Следует помнить, что Mathcad не совсем корректно строит графики ступенчатых функций, соединяя отрезками прямых значения функции в точке скачка. Более точный график функции распределения представляет собой отрезки, параллельные оси абсцисс, с "выколотым" правым концом.

Распределение дискретного случайного вектора

	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mn}

также удобно хранить в матрице размерности $(m+1)\times(n+1)$. Первому элементу первой строки этой матрицы присваивается нулевое значение, остальные элементы первой строки содержат значения случайной компоненты η, элементы первого столбца — значения случайной компоненты ξ, а остальные элементы — соответствующие вероятности: элемент, расположенный в $(j+1)$-м столбце $(i+1)$-й строки содержит значение вероятности p_{ij} того, что случайный вектор (ξ,η) принимает значение $(x_i,\ y_j)$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с определением распределения дискретного случайного вектора, заданного следующей таблицей:

	1	3	5	7
2	0.01	0.01	0.17	0.01
4	0.1	0.2	0.1	0.2
6	0.02	0.05	0.09	0.04

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0.01 & 0.01 & 0.17 & 0.01 \\ 4 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 6 & 0.02 & 0.05 & 0.09 & 0.04 \end{bmatrix}$$

Для вычислений со случайными величинами (непрерывными и дискретными) в Mathcad есть богатая библиотека встроенных функций наиболее распространенных стандартных распределений. Каждое распределение представлено в библиотеке тремя функциями — плотностью вероятностей, функцией распределения и функцией, обратной к функции распределения.

Например, для работы с нормальным распределением предназначены функции dnorm(x,μ,σ), pnorm(x,μ,σ) и qnorm(x,μ,σ). Значением функции dnorm(x,μ,σ) является значение в точке x плотности вероятностей случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием $M\xi = \mu$ и дисперсией $D\xi = \sigma^2$; значение функции pnorm(x,μ,σ) — значение функции распределения этой же случайной величины ξ; значением функции qnorm(p,μ,σ) служит решение уравнения $F(x) = p$, где $F(x)$ — функция распределения, определенная функцией pnorm(x,μ,σ), т.е. значением qnorm(p,μ,σ) является квантиль уровня p нормально распределенной случайной величины. Имена всех встроенных функций, определяющих плотности вероятностей, начинаются с буквы d, определяющих функции распределения — с буквы p, определяющих квантили — с буквы q.

Ниже приведены список всех распределений, представленных в библиотеке Mathcad, и имена соответствующих функций*:

бета-распределение — dbeta(x,s_1,s_2), pbeta(x,s_1,s_2), qbeta(p,s_1,s_2);
биномиальное распределение — dbinom(k,n,p), pbinom(k,n,p), qbinom(p,n,r);
распределение Коши — dcauchy(x,l,s), pcauchy(x,l,s), dcauchy(p,l,s);
χ^2-распределение — dchisq(x,d), pchisq(x,d), qchisq(p,d);
экспоненциальное распределение — dexp(x,r), pexp(x,r), qexp(p,r);
распределение Фишера (F-распределение) — dF(x,d_1,d_2), pF(x,d_1,d_2), qF(p,d_1,d_2);
гамма-распределение — dgamma(x,s), pgamma(x,s), qgamma(p,s);
геометрическое распределение — dgeom(x,p), pgeom(x,p), qgeom(p,r);
логнормальное распределение — dlnorm(x,μ,σ), plnorm(x,μ,σ), qlnorm(p,μ,σ);
логистическое распределение — dlogis(x,l,s), plogis(x,l,s), qlogis(p,l,s);
отрицательное биномиальное распределение — dnbinom(k,n,p), pnbinom(k,n,p), qnbinom(p,n,r);
нормальное распределение — dnorm(x,μ,σ), pnorm(x,μ,σ), qnorm(p,μ,σ);

*Описание и свойства соответствующих распределений приведены в разд. 5.2 и 5.4.

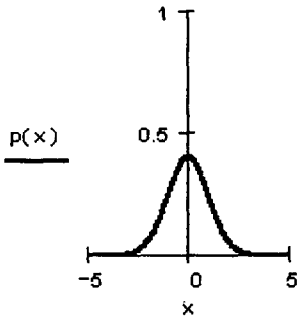
распределение Пуассона — dpois(x, λ), ppois(x, λ), qpois(p, λ);
распределение Стьюдента — dt(x,d), pt(x,d), qt(p,d);
равномерное распределение — dunif(x,a,b), punif(x,a,b), qunif(p,a,b);
распределение Вейбулла — dweibull(x,s), pweibull(x,s), qweibull(p,s).

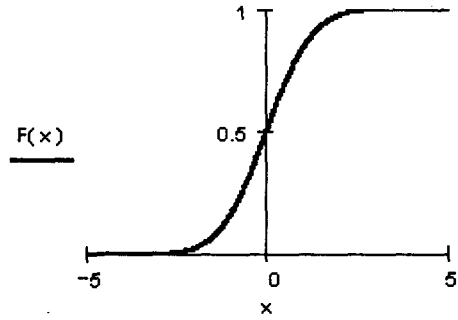
Ниже приведены графики и вычисления, демонстрирующие некоторые свойства функций, связанных со стандартным нормальным распределением $N(0,1)$.

p(x) := dnorm(x,0,1) плотность вероятностей

F(x) := pnorm(x,0,1) функция распределения

q(x) := qnorm(x,0,1) обратная к функции распределения





a := qnorm(0.1,0,1) a = -1.282 pnorm(a,0,1) = 0.1

Кроме того, в библиотеке встроенных функций Mathcad, естественно, есть функция Лапласа $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$. Для вычисления числовых характеристик дискретных и непрерывных случайных величин применяются операторы интегрирования и дифференцирования, вычисления конечных сумм и суммирования рядов, которые вызываются щелчком мыши по кнопке в панели $\boxed{\int \frac{d}{dx}}$ и заполнением соответствующих помеченных полей. Примеры использования этих операций при решении задач теории вероятностей приведены в последующих разделах этой главы.

5.2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Теория вероятностей изучает математические модели случайных явлений окружающего нас мира. Одно из центральных понятий теории вероятностей — понятие случайной величины. *Случайной величиной*

называется числовая функция, заданная на множестве случайных событий.

Например, случайной величиной является число очков, выпавших при бросании игральной кости, или рост случайно выбранного из учебной группы студента. В первом случае мы имеем дело с *дискретной* случайной величиной (она принимает значения из дискретного числового множества*) $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; во втором случае — с *непрерывной* случайной величиной (она принимает значения из непрерывного числового множества — из промежутка числовой прямой $I = [100, 230]$). В дальнейшем случайные величины будем обозначать греческими буквами.

Функция распределения случайной величины

Каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения.

Если ξ — случайная величина, то функция $F(x) = F_\xi(x) = P(\xi < x)$ называется *функцией распределения* случайной величины ξ. Здесь $P(\xi < x)$ — вероятность того, что случайная величина ξ принимает значение, меньшее x.

Функция распределения любой случайной величины обладает следующими свойствами:

- $F(x)$ определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$;
- $F(x)$ не убывает, т.е. если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$;
- $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$, т.е. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
- $F(x)$ непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$.

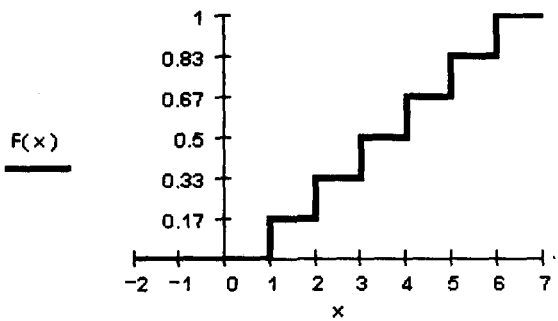
Важно понимать, что функция распределения является "паспортом" случайной величины: она содержит всю информацию об этой случайной величине, и поэтому изучение случайной величины заключается в исследовании ее *функции распределения*, которую часто называют просто *распределением*. Так что когда говорят о *нормальном распределении*, то подразумевают случайную величину, имеющую *нормальную функцию распределения*. В дальнейшем будем использовать термин *распределение*.

У дискретной случайной величины функция распределения ступенчатая. Например, в приведенном ниже фрагменте рабочего документа Mathcad определена функция распределения числа очков, выпавших при одном бросании игральной кости.

---

*Дискретным называется множество, состоящее из конечного или счетного числа элементов.

$$F(x) := \begin{cases} 0 \text{ if } -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{6} \text{ if } 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \text{ if } 2 \le x < 3 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \text{ if } 3 \le x < 4 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \text{ if } 4 \le x < 5 \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \text{ if } 5 \le x < 6 \\ 1 \text{ if } 6 \le x < \infty \end{cases}$$



Указание. Следует отметить, что Mathcad, изображая ступенчатые функции, соединяет отрезком прямой значения функций в точках разрыва. Разрывные функции принято изображать иначе — помечая стрелкой направление разрыва (стрелка вправо — функция непрерывна в точке справа, стрелка влево — для точек, где функция непрерывна слева). На рис. 5.1 приведен график функции распределения в общепринятом виде.

Если функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна, то случайная величина ξ называется *непрерывной случайной величиной.* Если функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывно дифференцируема, то более наглядное представление о случайной величине дает *плотность вероятности случайной величины* $p_\xi(x)$, которая связана с функцией распределения $F_\xi(x)$ формулами

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt \qquad \text{и} \qquad p_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}.$$

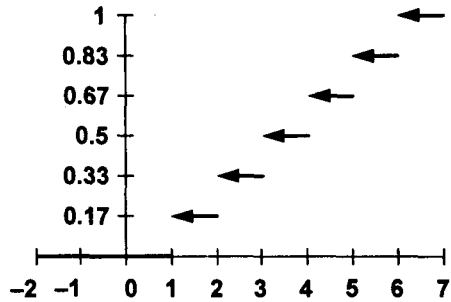


Рис. 5.1. График функции распределения, исправленный в графическом редакторе

Отсюда, в частности, следует, что для любой случайной величины

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\,dx = 1.$$

Если ξ — дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, то таблица вида

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$

называется *рядом распределения дискретной случайной величины* или просто *распределением дискретной случайной величины*. В практических задачах именно такая форма представления распределения наиболее удобна.

Вероятность того, что значение случайной величины ξ попадает в интервал (a, b), вычисляется для непрерывной случайной величины по формуле

$$P(a < \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b p_\xi(t)\,dt,$$

а для дискретной случайной величины — по формуле

$$P(a < \xi < b) = \sum_{x_i \in (a,b)} p_i.$$

Наиболее распространенные распределения дискретных случайных величин

Познакомимся с дискретными случайными величинами, которые чаще всего используются при решении практических задач со случайными

величинами, имеющими биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое и пуассоновское распределения.

Биномиальное распределение (схема Бернулли). Пусть проводится серия из n независимых испытаний*, каждое из которых заканчивается либо "успехом", либо "неуспехом". Пусть в каждом испытании (опыте) вероятность успеха p, а вероятность неудачи — $q = 1 - p$. С таким испытанием можно связать случайную величину ξ, равную числу успехов в серии из n испытаний. Эта величина принимает целые значения от 0 до n. Ее распределение называется *биномиальным* и определяется формулой Бернулли

$$p_k = P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где

$$0 < p < 1, \quad q = 1 - p, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Нетрудно убедиться, что $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = 1$.

В Mathcad для вычисления плотности вероятности и функции распределения случайной величины, имеющей биномиальное распределение, предназначены функции dbinom(k,n,p) и pbinom(k,n,p), значения которых — соответственно p_k и $F(k)$.

Геометрическое распределение. Со схемой испытаний Бернулли можно связать еще одну случайную величину: η — число испытаний до первого успеха. Эта величина принимает бесконечное множество значений от 0 до $+\infty$, и ее распределение определяется формулой

$$p_k = P(\eta = k) = q^k p, \; k = 0, 1, \ldots, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p.$$

Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, легко показать, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

В Mathcad для вычисления плотности вероятности и функции распределения случайной величины, имеющей геометрическое распределение, предназначены функции dgeom(k,p) и pgeom(k,p), значения которых — соответственно p_k и $F(k)$.

Гипергеометрическое распределение. Пусть в партии из N изделий имеется M $(M < N)$ доброкачественных и $(N - M)$ дефектных изделий. Если случайным образом из всей партии выбрать контрольную партию из n изделий, то число доброкачественных изделий в этой

**Независимыми* называют испытания, исход каждого из которых не зависит от исхода остальных испытаний.

партии будет случайной величиной, которую обозначим ξ. Ее распределение имеет вид:

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = 0, 1, \ldots, \min(n, M),$$

и называется *гипергеометрическим*. Для любых значений параметров, входящих в распределение параметров, $\sum\limits_{k=0}^{\min(n,M)} p_k = 1$.

В Mathcad нет встроенных функций для вычисления плотности вероятности и функции распределения случайной величины, имеющей гипергеометрическое распределение. При необходимости эти функции можно определить по приведенным выше формулам.

Пуассоновское распределение. Пуассоновское распределение имеет случайная величина μ, принимающая значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями

$$p_k = P(\mu = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\lambda > 0$ — параметр пуассоновского распределения. При любых $\lambda > 0$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.

В Mathcad для вычисления плотности вероятности и функции распределения случайной величины, имеющей пуассоновское распределение, предназначены функции dpois(k, λ) и ppois(k, λ), значения которых — соответственно p_k и $F(k)$.

ЗАДАНИЕ 5.1

Для указанных значений параметров вычислите и постройте графически биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое и пуассоновское распределения*. Проверьте для них равенство $\sum\limits_k p_k = 1$. Постройте графики функций распределения. Вычислите вероятность попадания значений случайной величины в указанный интервал. Для каждого распределения найдите значение k, для которого величина $P(\xi = k)$ максимальна. Исследуйте зависимость этой вероятности от параметров распределения.

Порядок выполнения задания

1. Введите параметры распределения.
2. Определите интервал изменения значений случайной величины.

*График распределения — ломаная линия, вершинами которой являются точки $(k,\ p_k)$, где k — значение случайной величины, а p_k — вероятность этого значения.

3. Определите вектор, номера компонент которого равны значениям случайной величины, и присвойте компонентам вектора значения вероятности соответствующих значений.
4. Определите функцию распределения случайной величины.
5. Постройте графики распределения и функции распределения случайной величины.
6. Найдите по графику наиболее вероятное значение случайной величины.
7. Введите в рабочий документ наибольшее значение вероятности (значение вероятности в точке, вычисленной в предыдущем пункте).
8. Вычислите сумму всех значений вероятностей.
9. Вычислите вероятность попадания значения случайной величины в указанный интервал как разность соответствующих значений функции распределения.
10. Измените значения параметров распределения и повторите вычисления. Сравните полученные результаты.
11. Выполните вычисления пп. 1–10 для всех приведенных в задании распределений.

Пример выполнения задания

Постройте биномиальное распределение для серии из 20 независимых испытаний с вероятностью успеха $p = 0.4, 0.6, 0.8$. Постройте графики распределения и функций распределения. Для $p = 0.4$ найдите значение k, для которого величина $P(\xi = k)$ максимальна. Проверьте равенство $\sum\limits_k p_k = 1$. Вычислите вероятность попадания значений случайной величины в интервал $(1, 5)$.

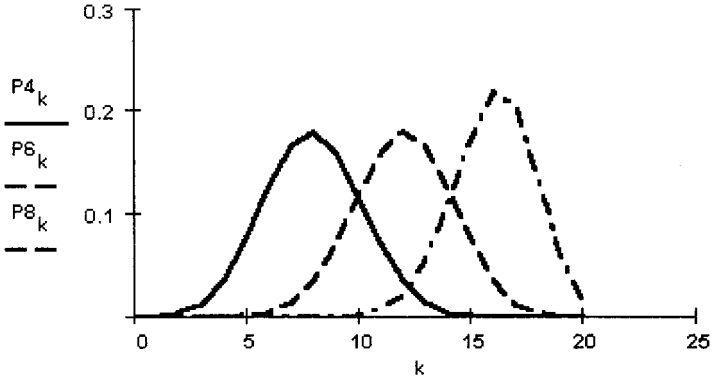
Постройте пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 0.2, 0.4$, гипергеометрическое распределение для $N = 30$, $M = 10$, $n = 10$, геометрическое распределение с такими же параметрами, что и биномиальное ($p = 0.4$). Проверьте равенство $\sum\limits_k p_k = 1$. Постройте графики распределения и функций распределения. Вычислите вероятность попадания значений случайной величины в интервал $(1, 5)$ для всех распределений, кроме гипергеометрического. Вычислите вероятность попадания значений случайной величины, имеющей гипергеометрическое распределение, в интервал $(1, 2)$. Для каждого распределения найдите значение k, для которого величина $P(\xi = k)$ максимальна.

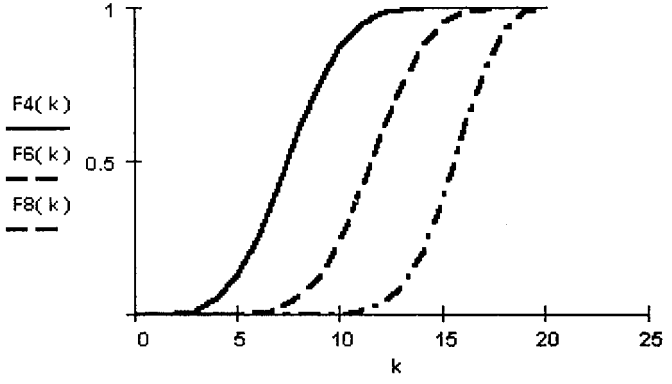
Фрагмент рабочего документа, содержащий вычисления для биномиального распределения, приведен ниже.

$$k := 0 .. 20 \qquad P4_k := dbinom(k, 20, 0.4) \quad F4(k) := pbinom(k, 20, 0.4)$$

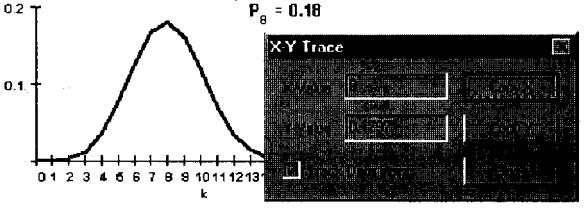
$$P6_k := dbinom(k, 20, 0.6) \quad F6(k) := pbinom(k, 20, 0.6)$$

$$P8_k := dbinom(k, 20, 0.8) \quad F8(k) := pbinom(k, 20, 0.8)$$





$$\sum_{k=0}^{20} P4_k = 1 \qquad F4(5) - F4(1) = 0.125$$

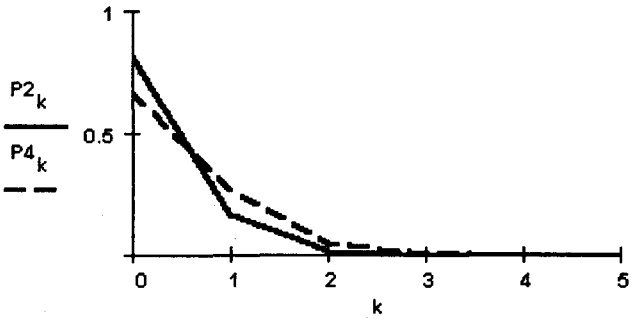


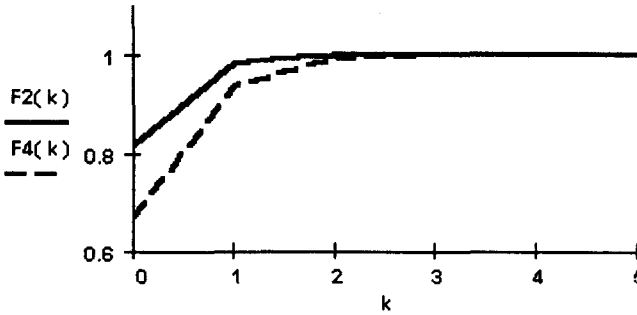
Указание. Для того чтобы определить по графику распределения наиболее вероятное значение случайной величины, щелкните в меню **Format** (**Формат**) в пункте **Graph** (**График**) по строке **Trace** (**Следование**), установите перекрестье маркера на точке максимума распределения и выведите в рабочий документ вероятность значения, указанного в окне **X-Value** (**Величина X**). Для исследуемой случайной величины наиболее вероятное значение равно 8, вероятность этого события равна 0.18.

Фрагмент рабочего документа, содержащий вычисления для пуассоновского распределения, приведен ниже.

$k := 0..20$ $\quad P2_k := dpois(k, 0.2)$ $\quad F2(k) := ppois(k, 0.2)$

$P4_k := dpois(k, 0.4)$ $\quad F4(k) := ppois(k, 0.4)$





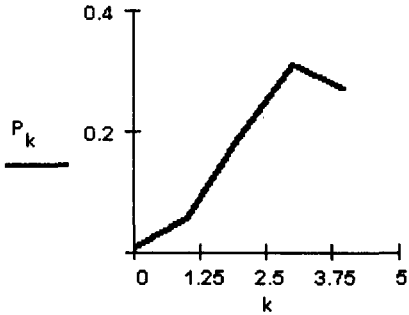
$$\sum_{k=0}^{20} P2_k = 1 \qquad F2(5) - F2(1) = 0.018$$

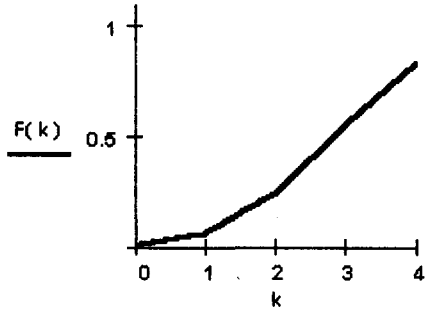
Как видно из рисунка, наиболее вероятное значение случайной величины нулевое; вероятность того, что случайная величина при $\lambda = 0.2$ примет нулевое значение, равна 0.0819.

Фрагмент рабочего документа, содержащий вычисления для гипергеометрического распределения, приведен ниже.

$p := 0.4 \quad N := 30 \quad M := 10 \quad n := 10 \quad k := 0..4$

$$P_k := \frac{\dfrac{M!}{k!\cdot(M-k)!}\cdot\dfrac{(N-M)!}{(n-k)!\cdot(N-M-n+k)!}}{\dfrac{N!}{n!\cdot(N-n)!}} \qquad F(k) := \sum_{i=0}^{k} P_i$$



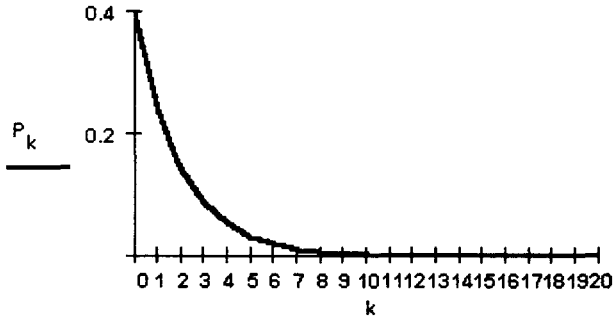


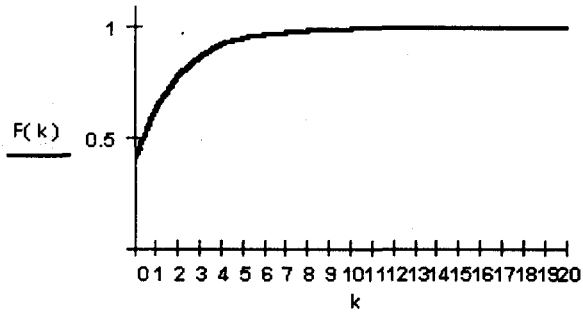
$$\sum_{k=0}^{4} P_k = 0.831 \qquad F(2) - F(1) = 0.189$$

Указание. В отличие от остальных распределений здесь распределение и функцию распределения пришлось вычислять по формулам, а не с помощью встроенных функций Mathcad.

Фрагмент рабочего документа, содержащий вычисления для геометрического распределения, приведен ниже.

$k := 0..20 \qquad P_k := \mathrm{dgeom}(k, 0.4) \qquad F(k) := \mathrm{pgeom}(k, 0.4)$





$$P_0 = 0.4 \qquad \sum_{k=0}^{20} P_k = 1 \qquad F(5) - F(1) = 0.313$$

Наиболее вероятное значение случайной величины нулевое, вероятность этого значения равна 0.4.

5.3 ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Теорема Пуассона

При большом количестве испытаний вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. Однако в ряде случаев их можно заменить более простыми *асимптотическими* формулами. Одна из них основана на теореме Пуассона, утверждающей следующее. Если число испытаний $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, $\lambda > 0$, то $P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \to p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ при любых $k = 0, 1, 2, \ldots$ Это означает, что при больших n и малых p вместо вычислений по точной формуле

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

можно воспользоваться приближенной формулой

$$P(\xi = k) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

ЗАДАНИЕ 5.2

Исследуйте для приведенного в задании эксперимента точность асимптотической формулы Пуассона.

Порядок выполнения задания

1. Вычислите требуемые вероятности по формуле Бернулли.
2. Вычислите требуемые вероятности по формуле Пуассона.
3. Сравните полученные результаты.

Пример выполнения задания

В здании 1000 лампочек. Вероятность p выхода из строя одной лампочки в течение года равна 0.003. Найдите вероятность того, что в течение одного года выйдет из строя не менее трех

ламп, используя формулу $P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi < 3) = 1 - F_\xi(3)$ для биномиального распределения и по приближенной формуле Пуассона $P(\mu \geq 3) = 1 - P(\mu < 3) = 1 - F_\mu(3)$ для случайной величины μ, имеющей распределение Пуассона с параметром $\lambda = np = 3$. Здесь ξ — случайная величина, значения которой равны числу ламп, вышедших из строя в течение года. Для сравнения вычислите по формуле Бернулли и по формуле Пуассона для $\lambda = np = 2$ вероятность того же события, когда в здании 10 лампочек и вероятность p отказа в течение года для одной лампочки равна 0.2. Сравните результаты.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с решением задачи приведен ниже.

```
PB := 1 - pbinom(3, 1000, 0.003)        PB = 0.353

PP := 1 - ppois(3, 3)                   PP = 0.353

PB10 := 1 - pbinom(3, 10, 0.2)          PB10 = 0.121

PP10 := 1 - ppois(3, 2)                 PP10 = 0.143
```

Из приведенных вычислений видно, что в первом случае ($n = 1000$, $p = 0.003$) результаты вычислений по точной и асимптотической формулам совпадают, а во втором ($n = 10$, $p = 0.2$) — отличаются.

Локальная теорема Муавра — Лапласа

На практике пуассоновским приближением пользуются при $npq < 9$. Если $npq > 9$, то для расчетов используют приближение в соответствии с теоремой Муавра — Лапласа.

Пусть $0 < p < 1$ и величина $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$ ограничена при $n \to \infty$, тогда

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{e^{-x_k^2/2}}{\sqrt{2\pi npq}}.$$

Требование ограниченности величины x_k означает, что при $n \to \infty$ величина k тоже должна расти вместе с величиной n. Точность формулы

$$P(\xi = k) \approx \frac{e^{-x_k^2/2}}{\sqrt{2\pi npq}}$$

растет как с ростом величин n и k, так и по мере приближения величин p и q к $\frac{1}{2}$.

ЗАДАНИЕ 5.3

Исследуйте для указанных значений параметров биномиального распределения точность асимптотической формулы Муавра — Лапласа.

Порядок выполнения задания

1. Вычислите требуемые вероятности по формуле Бернулли.
2. Вычислите требуемые вероятности по интегральной формуле Муавра — Лапласа.
3. Сравните полученные результаты.

Пример выполнения задания

Для $n = 10,\ 20,\ 50$ и для $p = 0.5,\ 0.3,\ 0.2$ вычислите вероятность того, что случайная величина, имеющая биномиальное распределение, принимает значение, равное $\frac{n}{2}$. Проведите вычисления по формуле Бернулли и по приближенной формуле Муавра — Лапласа. Сравните результаты.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с решением задачи приведен ниже.

$$n := 10 \qquad k := \frac{n}{2}$$

$$PB1 := dbinom(k, n, 0.5) \quad PB2 := dbinom(k, n, 0.3)$$

$$PB3 := dbinom(k, n, 0.2)$$

$$x1 := \frac{k - n \cdot 0.5}{\sqrt{n \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \qquad x2 := \frac{k - n \cdot 0.3}{\sqrt{n \cdot 0.3 \cdot 0.7}} \qquad x3 := \frac{k - n \cdot 0.2}{\sqrt{n \cdot 0.2 \cdot 0.8}}$$

$$PM1 := \frac{\exp\left(\frac{-x1^2}{2}\right)}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n \cdot 0.5 \cdot 0.5}} \qquad PM2 := \frac{\exp\left(\frac{-x2^2}{2}\right)}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n \cdot 0.3 \cdot 0.7}} \qquad PM3 := \frac{\exp\left(\frac{-x3^2}{2}\right)}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n \cdot 0.2 \cdot 0.8}}$$

$$PB1 = 0.246 \qquad PB2 = 0.103 \qquad PB3 = 0.026$$

$$PM1 = 0.252 \qquad PM2 = 0.106 \qquad PM3 = 0.019$$

$$n := 20 \qquad k := \frac{n}{2}$$

$$PB1 := dbinom(k, n, 0.5) \quad PB2 := dbinom(k, n, 0.3)$$

$$PB3 := dbinom(k, n, 0.2)$$

$$x1 := \frac{k - n\cdot 0.5}{\sqrt{n\cdot 0.5\cdot 0.5}} \qquad x2 := \frac{k - n\cdot 0.3}{\sqrt{n\cdot 0.3\cdot 0.7}} \qquad x3 := \frac{k - n\cdot 0.2}{\sqrt{n\cdot 0.2\cdot 0.8}}$$

$$PM1 := \frac{\exp\left(\frac{-x1^2}{2}\right)}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot n\cdot 0.5\cdot 0.5}} \qquad PM2 := \frac{\exp\left(\frac{-x2^2}{2}\right)}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot n\cdot 0.3\cdot 0.7}} \qquad PM3 := \frac{\exp\left(\frac{-x3^2}{2}\right)}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot n\cdot 0.2\cdot 0.8}}$$

$PB1 = 0.176$ $\qquad PB2 = 0.031$ $\qquad PB3 = 2.031\cdot 10^{-3}$

$PM1 = 0.178$ $\qquad PM2 = 0.029$ $\qquad PM3 = 8.043\cdot 10^{-4}$

$$n := 50 \qquad k := \frac{n}{2}$$

$PB1 := dbinom(k, n, 0.5)$ $\quad PB2 := dbinom(k, n, 0.3)$

$PB3 := dbinom(k, n, 0.2)$

$$x1 := \frac{k - n\cdot 0.5}{\sqrt{n\cdot 0.5\cdot 0.5}} \qquad x2 := \frac{k - n\cdot 0.3}{\sqrt{n\cdot 0.3\cdot 0.7}} \qquad x3 := \frac{k - n\cdot 0.2}{\sqrt{n\cdot 0.2\cdot 0.8}}$$

$$PM1 := \frac{\exp\left(\frac{-x1^2}{2}\right)}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot n\cdot 0.5\cdot 0.5}} \qquad PM2 := \frac{\exp\left(\frac{-x2^2}{2}\right)}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot n\cdot 0.3\cdot 0.7}} \qquad PM3 := \frac{\exp\left(\frac{-x3^2}{2}\right)}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot n\cdot 0.2\cdot 0.8}}$$

$PB1 = 0.112$ $\qquad PB2 = 1.436\cdot 10^{-3}$ $\qquad PB3 = 1.602\cdot 10^{-6}$

$PM1 = 0.113$ $\qquad PM2 = 1.053\cdot 10^{-3}$ $\qquad PM3 = 1.102\cdot 10^{-7}$

Приведенные вычисления полностью подтверждают теоретические утверждения: погрешность аппроксимации уменьшается с ростом n и по мере приближения p и q к 0.5.

Интегральная теорема Муавра — Лапласа

Пусть $0 < p < 1$, тогда для случайной величины, имеющей биномиальное распределение с параметром p, при $n \to \infty$ для любых a и b справедлива формула

$$P\left(a \le \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Это означает следующее. Для вычисления вероятности того, что число успехов в n испытаниях Бернулли заключено между k_1 и k_2, можно использовать формулу

$$P(k_1 \le \xi \le k_2) \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)dt$ — функция Лапласа; $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Точность этой приближенной формулы растет с ростом n. Если npq сравнительно невелико, то лучшее приближение дает формула

$$P\Big(a \le \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} \le b\Big) \approx \Phi\Big(b + \frac{1}{2\sqrt{npq}}\Big) - \Phi\Big(a - \frac{1}{2\sqrt{npq}}\Big),$$

т.е. для вычисления вероятности того, что число успехов в n испытаниях Бернулли заключено между k_1 и k_2, можно использовать формулу

$$P(k_1 \le \xi \le k_2) \approx \Phi\Big(x_2 + \frac{1}{2\sqrt{npq}}\Big) - \Phi\Big(x_1 - \frac{1}{2\sqrt{npq}}\Big),$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

В Mathcad для вычисления значений $\Phi(x)$ предназначена функция* $\mathsf{pnorm}(x, 0, 1)$.

ЗАДАНИЕ 5.4

Исследуйте для указанного биномиального распределения точность интегральной формулы Муавра — Лапласа.

Порядок выполнения задания

1. Вычислите требуемые вероятности по формуле Бернулли.
2. Вычислите требуемые вероятности по интегральной формуле Муавра — Лапласа.
3. Вычислите требуемые вероятности по модифицированной интегральной формуле Муавра — Лапласа.
4. Сравните полученные результаты.

*Функция $\mathsf{pnorm}(x, 0, 1)$ вычисляет значение нормальной функции распределения с нулевым математическим ожиданием и единичным среднеквадратичным отклонением; об этой функции будет подробно рассказано в следующих разделах.

Пример выполнения задания

Вероятность рождения мальчика $p = 0.51$, а девочки — $q = 1 - p = 0.49$. Найти вероятность того, что среди 10000 новорожденных мальчиков будет не менее 4000 и не более 5000. Проведите вычисления по формуле Бернулли и по приближенным интегральным формулам Муавра — Лапласа. Сравните результаты.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с решением задачи приведен ниже.

$$p := 0.51 \qquad q := 1 - p \qquad n := 10000 \qquad k1 := 4000 \qquad k2 := 5000$$

$$PB := pbinom(k2, n, p) - pbinom(k1, n, p) \qquad PB = 0.023$$

$$x1 := \frac{k1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \qquad x2 := \frac{k2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

$$PM := pnorm(x2, 0, 1) - pnorm(x1, 0, 1) \qquad PM = 0.023$$

$$a := \frac{k1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \qquad b := \frac{k2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

$$a1 := a - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}} \qquad b1 := b + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

$$PM1 := pnorm(b1, 0, 1) - pnorm(a1, 0, 1) \qquad PM1 = 0.023$$

Приведенные вычисления полностью подтверждают теоретические утверждения: приближенные значения вероятностей совпадают с вероятностями, вычисленными по формуле Бернулли.

Теорема Бернулли

Многие важные задачи, связанные со схемой Бернулли, решаются с помощью теоремы Бернулли. Так, если ξ — число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха в одном испытании p, $0 < p < 1$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Это означает, что с ростом числа испытаний n относительная частота успехов $\frac{\xi}{n}$ приближается к вероятности p успеха в одном испытании.

Определим, сколько нужно произвести испытаний, чтобы отклонение относительной частоты успехов $\frac{\xi}{n}$ от вероятности p было меньше ε с вероятностью, большей или равной β, т.е. найдем n, для которого выполняется неравенство

$$P\left(\left|\frac{\xi}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq\beta.$$

Доказано, что число n обеспечивает выполнение этого неравенства, если оно удовлетворяет соотношению

$$n\geq\frac{1}{4}\frac{x_\beta^2}{\varepsilon^2},$$

где x_β — решение уравнения $\Phi(x_\beta)=\frac{1+\beta}{2}$.

Следует обратить особое внимание на замечательный факт — *искомое значение n не зависит от p* и поэтому формулой $n\geq x_\beta^2/(4\varepsilon^2)$ следует пользоваться для оценки минимально необходимого числа испытаний при неизвестной вероятности p. Если вероятность p изначально известна, то необходимое число испытаний определяется формулой $n\geq pqx_\beta^2/\varepsilon^2$.

В Mathcad значение корня для уравнения $\Phi(x)=p$ дает функция qnorm(p,0,1).

ЗАДАНИЕ 5.5

Найдите наименьшее число испытаний Бернулли, необходимое для того, чтобы с вероятностью, не меньшей заданной, можно принять относительную частоту успехов за вероятность успеха в одном испытании с погрешностью, не превышающей заданную.

Порядок выполнения задания

1. Введите условия задачи — значения погрешности и вероятности.
2. Запишите уравнение для вычисления величины x_β.
3. Вычислите требуемое число испытаний.

Пример выполнения задания

Производитель утверждает, что вероятность отрицательного отношения покупателя к новому товару невелика. Сколько нужно опросить человек, чтобы с вероятностью не менее 0.9 можно было утверждать, что относительная частота отрицательного отношения к новому товару отличается от заявленной производителем не более чем на 0.01.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с решением задачи приведен ниже.

$$\beta := 0.9 \qquad \varepsilon := 0.01 \qquad p := \frac{1+\beta}{2}$$

$$x\beta := \mathrm{qnorm}(p, 0, 1) \qquad n := \frac{1}{4}\cdot\frac{x\beta^2}{\varepsilon^2} \qquad n = 6.764\cdot 10^3 \qquad n := 6764$$

Указание. Для того чтобы ввести в рабочий документ буквы греческого алфавита, щелкните по нужной кнопке в панели греческого алфавита, которая открывается щелчком по кнопке $\boxed{\alpha\beta}$ в панели математических инструментов. Искомое значение $n = 6764$.

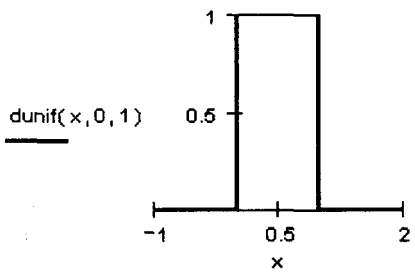
5.4
НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

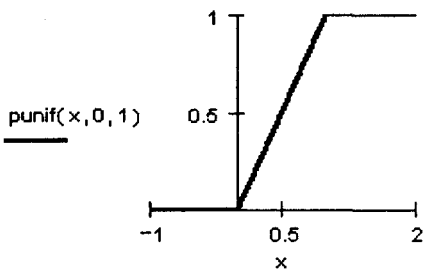
Наиболее распространенные распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение. Непрерывная случайная величина ξ, принимающая значения на отрезке $[a, b]$, распределена равномерно на $[a, b]$, если плотность распределения $p_\xi(x)$ и функция распределения случайной величины ξ имеют соответственно вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \end{cases} \qquad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Ниже приведены построенные в Mathcad графики плотности вероятностей и функции распределения случайной величины ξ, принимающей значения на отрезке $[0, 1]$ и имеющей равномерное распределение.





В Mathcad значения в точке x плотности распределения и функции распределения случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, вычисляются встроенными функциями соответственно dunif(x,a,b) и punif(x,a,b).

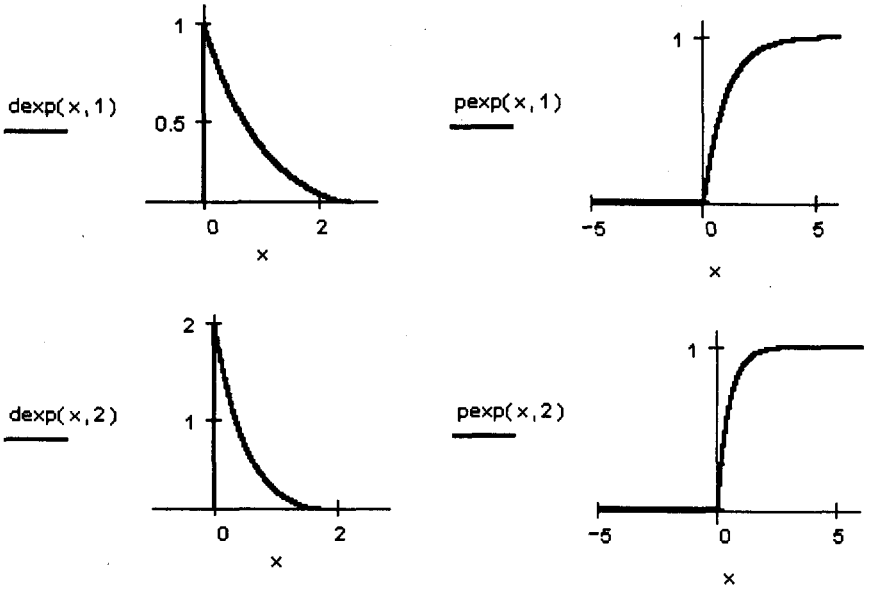
Экспоненциальное (показательное) распределение. Непрерывная случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, если плотность распределения $p_\xi(x)$ имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что показательно распределенная случайная величина принимает только неотрицательные значения. Функция распределения такой случайной величины имеет вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Ниже приведены графики плотности вероятностей и функций распределения случайных величин, имеющих показательное распределение с параметрами $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$, построенные в Mathcad.



В Mathcad значения в точке x плотности распределения и функции распределения случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение с параметром λ, вычисляются встроенными функциями соответственно dexp(x, λ) и pexp(x, λ).

Нормальное распределение. Это распределение играет исключительно важную роль в теории вероятностей и математической ста-

тистике. Случайная величина ξ нормально распределена с параметрами a и σ, $\sigma > 0$, если ее плотность распределения имеет вид

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\Big(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\Big).$$

Если случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, то будем записывать это в виде $\xi \sim N(a,\sigma)$.

Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, если $a = 0$ и $\sigma = 1$, $\xi \sim N(0,1)$. Плотность стандартного нормального распределения имеет вид

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big),$$

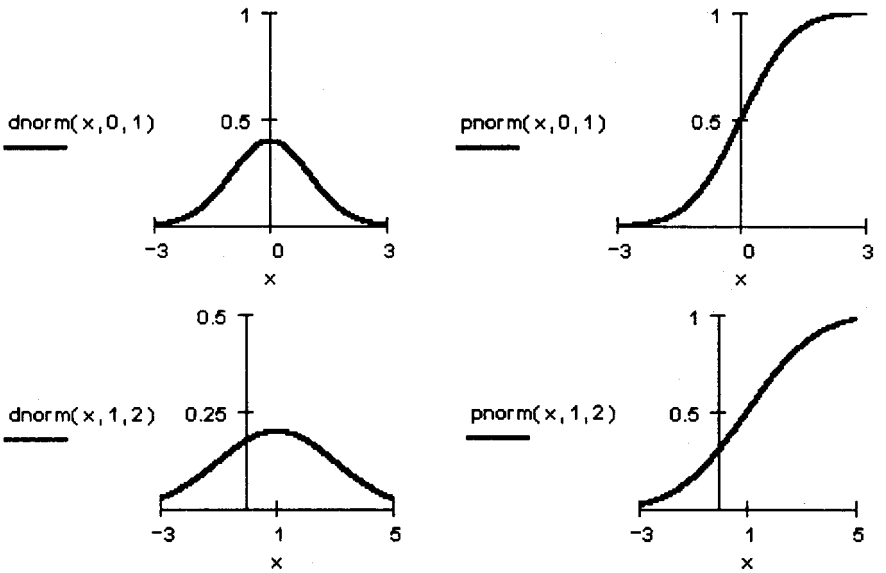
а его функция распределения — $F_\xi(x) = \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\Big(-\frac{z^2}{2}\Big)dz.$$

Функция распределения нормальной величины $\eta \sim N(a,\sigma)$ также выражается через функцию Лапласа:

$$F_\eta(x) = \Phi\Big(\frac{x-a}{\sigma}\Big).$$

Ниже приведены построенные в Mathcad графики плотности вероятностей и функций распределения для $\xi \sim N(0,1)$ и $\eta \sim N(1,2)$.



В Mathcad значения в точке x плотности распределения и функции распределения нормальной случайной величины с параметрами a, σ вычисляются встроенными функциями соответственно dnorm(x, a, σ) и pnorm(x, a, σ).

Распределение хи-квадрат (χ^2-распределение). Пусть ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n — независимые случайные величины, каждая из которых имеет стандартное нормальное распределение $N(0,1)$. Составим случайную величину

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2.$$

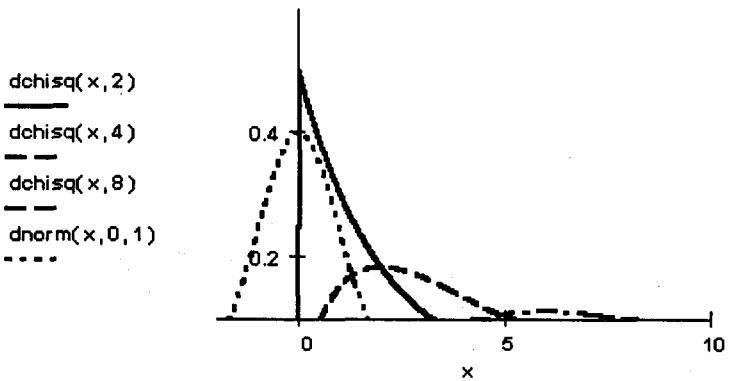
Ее распределение называется *χ^2-распределением* с n степенями свободы. Для справочных целей приведем здесь выражение плотности распределения этой случайной величины:

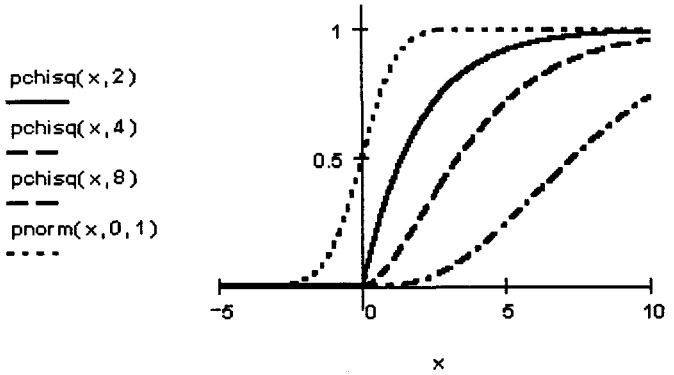
$$p_n(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} z^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{z}{2}}, & z \geq 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-z} dz.$$

Ниже приведены графики плотности вероятностей и функций распределения для χ^2-распределения с двумя, четырьмя и восемью степенями свободы, построенные в Mathcad. Для сравнения приведены графики для $\xi \sim N(0,1)$.





В Mathcad значения в точке x плотности распределения и функции χ^2-распределения с n степенями свободы вычисляется встроенными функциями соответственно dchisq(x, n) и pchisq(x, n).

ЗАДАНИЕ 5.6

Постройте графики плотности распределения и функции распределения χ^2 с указанным числом степеней свободы.

Порядок выполнения задания

1. Постройте графики плотности распределения χ^2 с указанным числом степеней свободы.
2. Постройте графики функции распределения χ^2 с указанным числом степеней свободы.

Пример выполнения задания

Постройте графики плотности распределения и функции распределения χ^2 с $n = 2, 4, 8$ степенями свободы. Примерный вариант выполнения задания приведен выше.

Распределение Стьюдента*. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, а случайная величина χ_n^2 — χ^2-распределение с n степенями свободы. Если ξ и χ_n^2 независимы, то про случайную величину $\tau_n = \dfrac{\xi}{\sqrt{\chi_n^2/n}}$ говорят, что она имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы n. Доказано, что плотность вероятности этой случайной величины вычисляется по

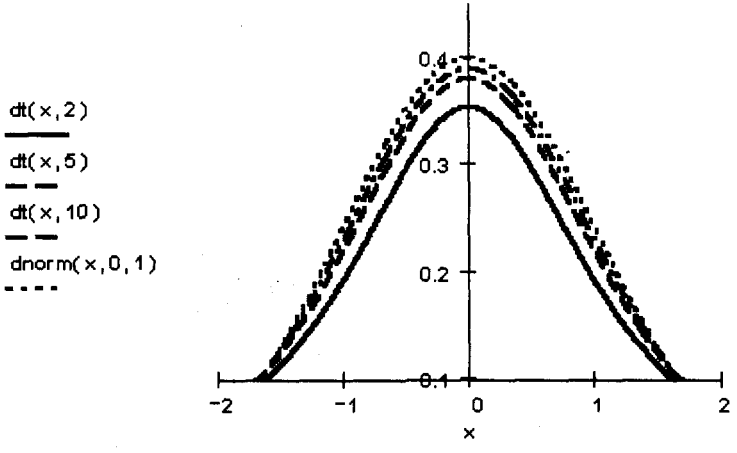
*Распределение Стьюдента было предложено английским математиком Госсетом и опубликовано под псевдонимом Student (Студент).

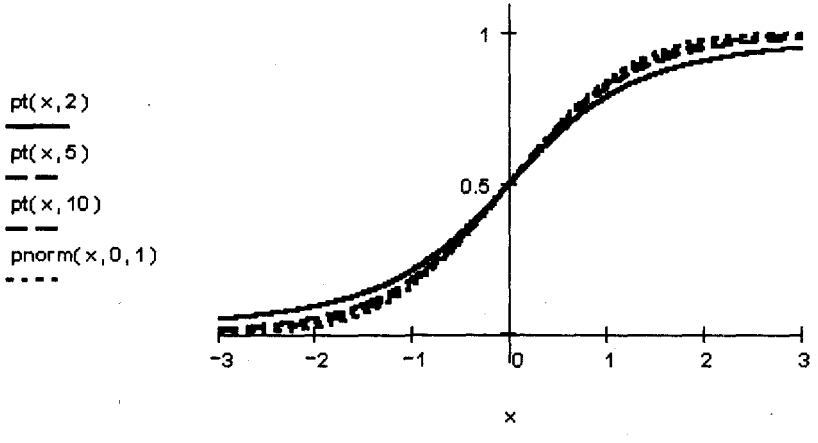
формуле

$$p_{\tau_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

При больших n распределение Стьюдента практически не отличается от $N(0,1)$.

Ниже приведены графики плотности вероятностей и функций распределения для $n = 2, 5, 10$, построенные в Mathcad. Для сравнения приведены графики для $\xi \sim N(0,1)$.





В Mathcad значения в точке x плотности распределения и функции Стьюдента с n степенями свободы вычисляются встроенными функциями соответственно dt(x,n) и pt(x,n).

ЗАДАНИЕ 5.7

Постройте графики плотности распределения и функции распределения Стьюдента с указанным числом степеней свободы.

Порядок выполнения задания

1. Постройте графики плотности распределения Стьюдента с указанным числом степеней свободы.
2. Постройте графики функции распределения Стьюдента с указанным числом степеней свободы.

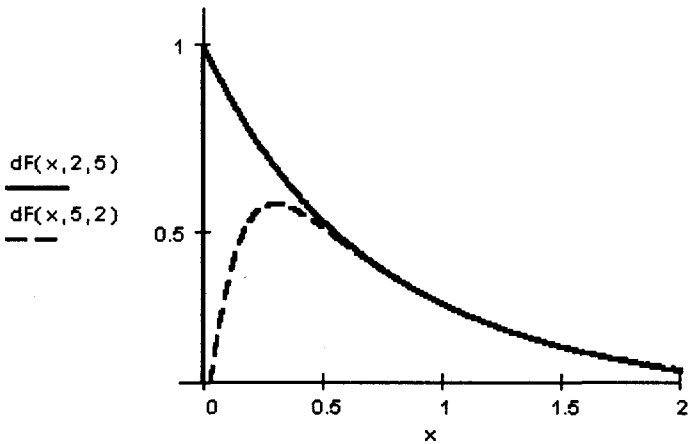
Пример выполнения задания

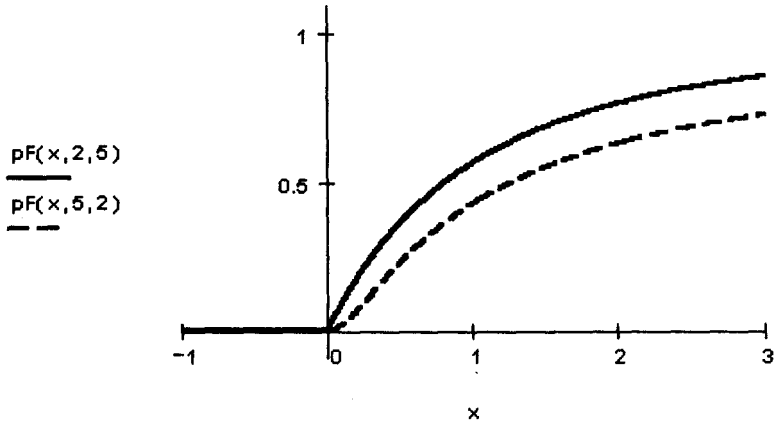
Постройте графики плотности распределения и функции распределения χ^2 с $n = 2, 5, 10$ степенями свободы. Примерный вариант выполнения задания приведен выше.

***F*-распределение Фишера.** Пусть случайные величины χ_n^2 и χ_m^2 независимы и имеют распределение χ^2 с n и m степенями свободы соответственно. Тогда случайная величина $\mathcal{F}_{n,m} = \frac{\chi_n^2/n}{\chi_m^2/m}$ имеет F-распределение с плотностью вероятности

$$p_F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{n}{m}\right)^{n/2}\frac{x^{\frac{n-2}{2}}}{\left(1+\frac{nx}{m}\right)^{\frac{n+m}{2}}}, \quad x > 0.$$

Ниже приведены построенные в Mathcad графики плотности вероятностей и функций распределения для $n = 2, 5$ и $m = 5, 2$.





Указание. В Mathcad значения в точке x плотности распределения и функции Фишера вычисляются встроенными функциями соответственно dF(x,n,m) и pF(x,n,m).

ЗАДАНИЕ 5.8

Постройте графики плотности распределения и функции распределения Фишера для указанных значений n и m.

Порядок выполнения задания

1. Постройте графики плотности распределения Фишера для указанных значений n и m.
2. Постройте графики функции распределения Фишера для указанных значений n и m.

Пример выполнения задания

Пример выполнения задания для распределения Фишера со значениями $n = 2, 5$ и $m = 5, 2$ приведен выше.

Распределение Парето. Распределение Парето часто применяется в экономических исследованиях. Плотность вероятностей для случайной величины, распределенной по Парето, имеет вид

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \rho a^\rho x^{-(\rho+1)}, & x \geq a, \end{cases}$$

где $a > 0$, $\rho > 0$.

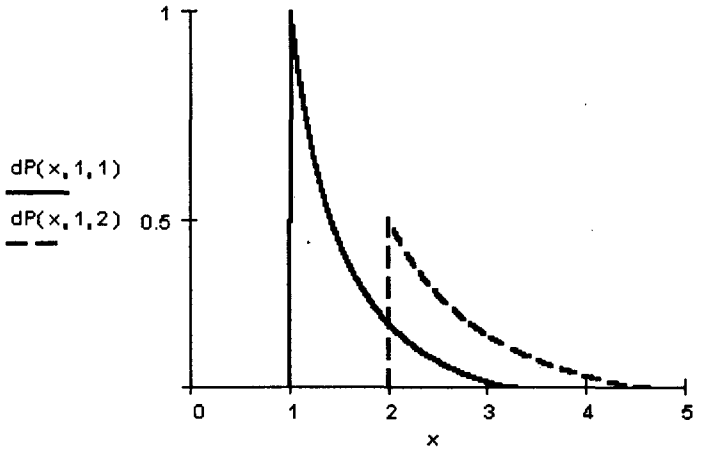
Как видно из этой формулы, случайная величина, распределенная по Парето, принимает значения только в области $x \geq a$.

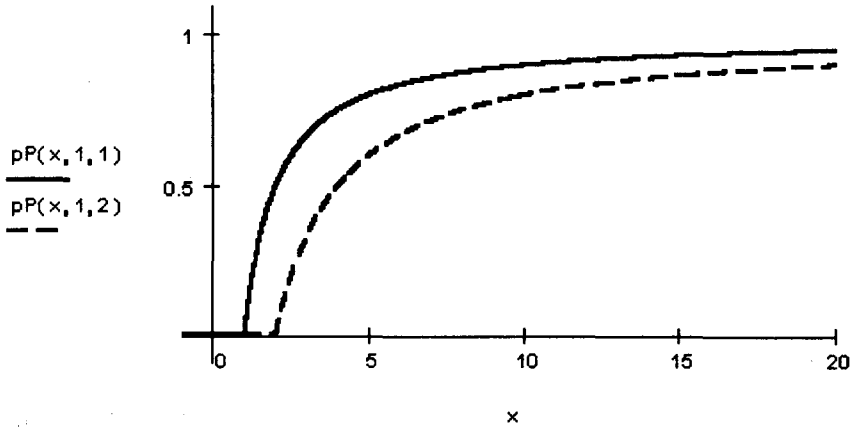
Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий определения и графики плотности вероятностей и функций распределения Парето. Поскольку в Mathcad нет встроенных функций

для этого распределения, они определены, с соблюдением соглашения об именах для имеющихся статистических функций, как функции переменной x и параметров a и ρ: dP(x, p, a) и pP(x, p, a) — соответственно для плотности вероятностей и функции распределения Парето (параметр ρ обозначен как p).

$$dP(x,p,a) := \begin{cases} (p \cdot a^{p} \cdot x^{-(p+1)}) & \text{if } x \geq a \\ 0 & \text{if } x < a \end{cases}$$

$$pP(x,p,a) := \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \int_{a}^{x} p \cdot a^{p} \cdot t^{-(p+1)}\,dt & \text{if } x \geq a \end{cases}$$





ЗАДАНИЕ 5.9

Постройте графики плотности распределения и функции распределения Парето для указанных значений a и ρ.

Порядок выполнения задания

1. Определите плотность распределения Парето как функцию x и параметров a и ρ.
2. Определите функцию распределения Парето как функцию x и параметров a и ρ.
3. Постройте графики плотности распределения Парето для заданных значений a и ρ.
4. Постройте графики функции распределения Парето для заданных значений a и ρ.

Пример выполнения задания

Постройте графики плотности распределения и функции распределения Парето для $\rho = 1$ и $a = 1,2$. Примерный вариант выполнения задания приведен выше.

Логистическое распределение. Это еще одно распределение, широко применяемое в экономических исследованиях. Оно имеет следующую функцию распределения:

$$F_\xi(x) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

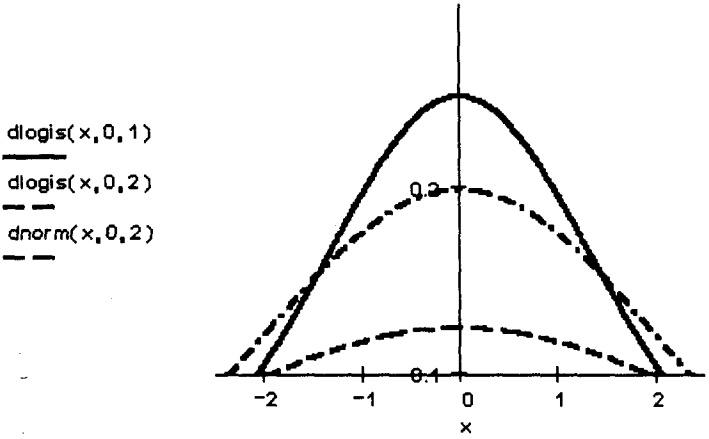
где α и β — параметры распределения.

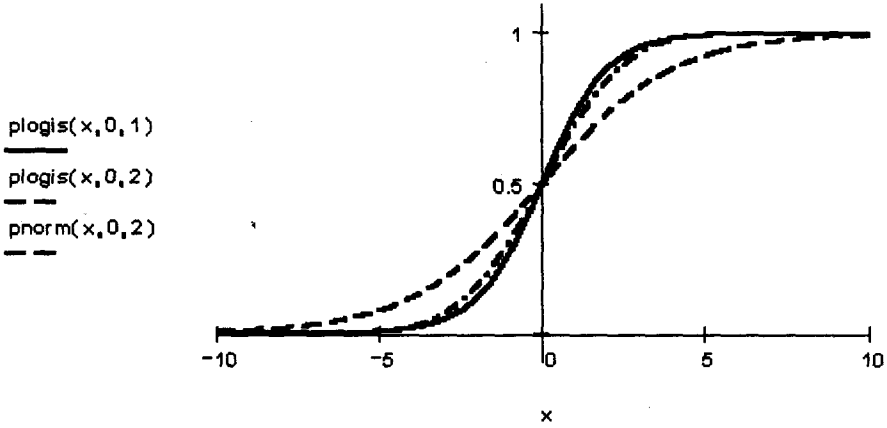
Плотность распределения вероятностей для логистического распределения вычисляется по формуле:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

По своим свойствам логистическое распределение очень похоже на нормальное.

Ниже приведены графики плотности вероятностей и функций распределения для $\alpha = 0$ и $\beta = 1,2$, построенные в Mathcad. Для сравнения приведены графики для нормального распределения $N(0,2)$.





В Mathcad значения в точке x плотности распределения и функции распределения для логистического распределения вычисляются встроенными функциями соответственно dlogis(x, α, β) и plogis(x, α, β).

ЗАДАНИЕ 5.10

Постройте графики плотности распределения и функции распределения для логистического распределения при указанных значениях параметров α и β.

Порядок выполнения задания

1. Постройте графики плотности распределения для логистического распределения с указанными значениями параметров.
2. Постройте графики функции распределения для логистического распределения с указанными значениями параметров.

Пример выполнения задания

Постройте графики плотности распределения и функции распределения для логистического распределения с параметрами $\alpha = 0$ и $\beta = 1,2$. Примерный вариант выполнения задания приведен выше.

Квантили

При решении практических задач часто требуется найти значение x, при котором функция распределения случайной величины принимает заданное значение, т.е. требуется решить уравнение $F_\xi(x) = p$. Решения такого уравнения в теории вероятностей называются квантилями.

Квантилью x_p (p-квантилью, квантилью уровня p) случайной величины ξ, имеющей функцию распределения $F_\xi(x)$, называют решение x_p уравнения $F_\xi(x) = p$, $p \in (0, 1)$.

Для некоторых p уравнение $F_\xi(x) = p$ может иметь несколько решений, для некоторых — ни одного. Это означает, что для соответствующей случайной величины некоторые квантили определены неоднозначно, а некоторые квантили не существуют.

Квантили, наиболее часто встречающиеся в практических задачах, имеют свои названия:

медиана — квантиль уровня 0.5;

нижняя квартиль — квантиль уровня 0.25;

верхняя квартиль — квантиль уровня 0.75;

децили — квантили уровней 0.1, 0.2, ..., 0.9;

процентили — квантили уровней 0.01, 0.02, ..., 0.99.

Для тех распределений, для которых в Mathcad представлены встроенные функции плотности распределения и функции распределения, определены и встроенные функции вычисления квантилей.

Например, если плотности распределения и функции распределения в точке x для логистического распределения с параметрами α и β вычисляются встроенными функциями соответственно dlogis(x, α, β) и plogis(x, α, β), то p-квантиль для логистического распределения является значением функции qlogis(p, α, β).

Ниже приведены вычисленные в Mathcad медиана, верхняя и нижняя квартили и 0.95-квантиль для стандартного нормального распределения $N(0,1)$.

qnorm(0.5, 0, 1) = 0 **медиана**

qnorm(0.25, 0, 1) = -0.674 **нижняя квартиль**

```
qnorm(0.75,0,1) = 0.674      верхняя квартиль

qnorm(0.95,0,1) = 1.645      0.95-квантиль
```

ЗАДАНИЕ 5.11

Найдите медиану, верхнюю и нижнюю квартили и p-квантиль заданного уровня p для заданного распределения.

Порядок выполнения задания

1. Постройте графики плотности распределения для логистического распределения с указанными значениями параметров.
2. Постройте графики функции распределения для логистического распределения с указанными значениями параметров.

Пример выполнения задания

Вычисление медианы, верхней и нижней квартили и 0.95-квантили для стандартного нормального распределения $N(0,1)$ приведено выше.

5.5 СОВМЕСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В одном и том же случайном эксперименте можно рассматривать не одну, а несколько — n — функций, аргументом которых являются случайные события. Совокупность таких функций называется *многомерной случайной величиной* или *случайным вектором* и обозначается $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Многомерные случайные величины. Функции распределения многомерных случайных величин

Функцией распределения случайного вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ или *совместным распределением случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называется вероятность

$$F_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) = F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n),$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Распределение каждой из компонент $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ можно найти по многомерной функции $F_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x})$. Например, если $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ — двумерная

случайная величина, имеющая совместное распределение $F_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)$, то $\lim\limits_{x_2\to+\infty} F_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = F_{\xi_1}(x_1)$, $\lim\limits_{x_1\to+\infty} F_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = F_{\xi_2}(x_2)$.

В дальнейшем будем рассматривать только двумерные случайные величины.

Случайный вектор $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$ называется *непрерывным случайным вектором*, если существует такая неотрицательная функция $p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)$, что для любого прямоугольника Ω на плоскости $(x_1,\ x_2)$ вероятность события $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ равна

$$P(\boldsymbol{\xi} \in \Omega) = \iint\limits_{\Omega} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Функция $p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)$ в этом случае называется *совместной плотностью распределения.*

Легко показать, что

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 1.$$

Если $p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)$ — совместная плотность распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$, то плотности распределения компонент двумерного случайного вектора равны соответственно:

$$p_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_2, \qquad p_{\xi_2}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_1.$$

Если $(\xi,\ \eta)$ — дискретный случайный вектор, то совместным распределением случайных величин ξ и η чаще всего называют таблицу вида

$\xi \diagdown \eta$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

где $p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, и $\sum\limits_{i,j} p_{ij} = 1$.

По этой таблице можно найти распределение каждой из случайных величин ξ и η по формулам:

$$p_{\xi,i} = P(\xi = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \qquad p_{\eta,j} = P(\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$

Пусть, например, две случайные величины ξ и η имеют совместное распределение

$\xi \backslash \eta$	0	8
1	0.1	0.1
2	0.1	0.2
3	0.2	0.3

Тогда распределение величины ξ имеет вид

ξ	1	2	3
p	0.2	0.3	0.5

а распределение величины η —

η	0	8
p	0.4	0.6

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение этого примера, выполненное средствами пакета.

$$X := (1\ \ 2\ \ 3) \qquad Y := (0\ \ 8)$$

$$PXY := \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \qquad SRow := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad SCol := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$PX := PXY \cdot SRow \qquad PY := SCol^T \cdot PXY$$

$$PX = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix} \qquad PY = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$pX := stack\left(X, PX^T\right) \qquad pX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$pY := stack(Y, PY) \qquad pY = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

ЗАДАНИЕ 5.12

По заданному совместному распределению двух дискретных случайных величин найдите распределение каждой из них.

Порядок выполнения задания

1. Определите векторы-строки значений каждой случайной величины.
2. Определите матрицу совместного распределения двумерной случайной величины.
3. Определите вспомогательные матрицы для суммирования по строкам и по столбцам.
4. Найдите умножением на соответствующую вспомогательную матрицу распределение каждой случайной величины.
5. Сформируйте для каждой случайной величины матрицу-таблицу, содержащую значения случайной величины и их вероятности.

Пример выполнения задания

Пример выполнения задания для разобранной задачи приведен выше.

Независимость случайных величин

Решить обратную задачу, т.е. восстановить совместное распределение (ξ, η) по распределениям величин ξ и η, вообще говоря, невозможно. Однако эту задачу можно решить, когда случайные величины ξ и η независимы.

Случайные величины называются *независимыми*, если для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$F_{\xi,\eta}(x_1, x_2) = F_\xi(x_1)F_\eta(x_2).$$

Для непрерывных случайных величин это определение эквивалентно такому: случайные величины называются *независимыми*, если

$$p_{\xi,\eta}(x_1, x_2) = p_\xi(x_1)p_\eta(x_2)$$

во всех точках непрерывности входящих в это равенство функций.

Для дискретных случайных величин ξ и η с матрицей совместного распределения $\{p_{ij}\}$ условие независимости ξ и η имеет вид

$$p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j) = p_{\xi,i}p_{\eta,j}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

В частности, в приведенном выше примере $p_{11} = 0.1 \neq p_{\xi,1}p_{\eta,1} = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08$. Значит, рассмотренные там случайные величины не являются независимыми, т.е. они *зависимы*.

В то же время в совместном распределении ξ и η вида

$\xi \diagdown \eta$	0	8
1	0.08	0.12
2	0.12	0.18
3	0.20	0.30

величины ξ и η независимы.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий построение распределений ξ и η и проверку их независимости.

ORIGIN := 1

$$X := (1\ \ 2\ \ 3) \qquad Y := (0\ \ 8) \qquad PXY := \begin{bmatrix} 0.08 & 0.12 \\ 0.12 & 0.18 \\ 0.20 & 0.30 \end{bmatrix}$$

$$i := 1..3 \qquad PX_i := \sum_{j=1}^{2} PXY_{i,j} \qquad PX = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$j := 1..2 \qquad PY_j := \sum_{i=1}^{3} PXY_{i,j} \qquad PY = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$pX := \mathrm{stack}\left(X, PX^T\right) \qquad pX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$pX := \mathrm{stack}\left(X, PX^T\right) \qquad pX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$pY := \mathrm{stack}\left(Y, PY^T\right) \qquad pY = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Проверка независимости

$$i := 1..3 \qquad j := 1..2 \qquad PN_{i,j} := pX_{2,i} \cdot pY_{2,j} \qquad PN - PXY = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ЗАДАНИЕ 5.13

По заданному совместному распределению двух дискретных случайных величин найдите распределение каждой из них и проверьте их независимость.

Порядок выполнения задания

1. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное 1.
2. Определите векторы-строки значений каждой случайной величины.
3. Определите матрицу совместного распределения двумерной случайной величины.
4. Вычислите вероятности для каждой случайной величины суммированием элементов матрицы совместного распределения соответственно по строкам и по столбцам.
5. Сформируйте для каждой случайной величины матрицу-таблицу, содержащую значения случайной величины и их вероятности.
6. Проверьте независимость случайных величин, входящих в совместное распределение.

Пример выполнения задания

Пример выполнения задания для разобранной задачи приведен выше.

5.6 УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Если две случайные величины ξ и η зависимы, то информация о том, какое значение приняла одна из них, меняет наше представление о распределении другой. В связи с этим можно ввести понятие *условного распределения.*

Условные распределения дискретных случайных величин

Пусть дана двумерная случайная величина (ξ, η) с распределением

$\xi \diagdown \eta$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

Тогда распределение случайной величины ξ имеет вид

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	$p_{1\cdot}$	$p_{2\cdot}$	$\dots$	$p_{n\cdot}$

где точка в индексе означает суммирование по строкам: $p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$, и распределение случайной величины η

η	y_1	y_2	$\dots$	y_m
p	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\dots$	$p_{\cdot m}$

Здесь точка в индексе означает суммирование по столбцам: $p_{\cdot i} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$.

Условным распределением случайной величины ξ при условии, что случайная величина η приняла значение $\eta = y_j$, называется следующее распределение:

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	$\frac{p_{1j}}{p_{\cdot j}}$	$\frac{p_{2j}}{p_{\cdot j}}$	$\dots$	$\frac{p_{nj}}{p_{\cdot j}}$

Нетрудно убедиться, что сумма вероятностей величины ξ в этом распределении равна 1.

Аналогично *условным распределением* случайной величины η при условии, что случайная величина ξ приняла значение $\xi = \eta_i$, называется распределение

η	y_1	y_2	$\dots$	y_m
p	$\frac{p_{i1}}{p_{i\cdot}}$	$\frac{p_{i2}}{p_{i\cdot}}$	$\dots$	$\frac{p_{im}}{p_{i\cdot}}$

Рассмотрим пример, поясняющий понятие условного распределения. Пусть двумерная случайная величина (ξ, η) имеет распределение

$\xi \backslash \eta$	3	5	10	11
1	0.01	0.01	0.17	0.011
7	0.1	0.2	0.1	0.2
8	0.02	0.05	0.09	0.04

Тогда распределение каждой из них имеет вид:

ξ	1	7	8
p	0.2	0.6	0.2

η	3	5	10	11
p	0.13	0.26	0.36	0.25

Найдем теперь условное распределение величины η при условии, что величина ξ приняла значение, равное $\xi = 8$. В этом случае $p_{i\cdot} = p_{3\cdot} = 0.2$,

$$P(\eta = 3/\xi = 8) = \frac{p_{31}}{p_{3\cdot}} = \frac{0.02}{0.2} = 0.1, \qquad P(\eta = 5/\xi = 8) = \frac{p_{32}}{p_{3\cdot}} = \frac{0.05}{0.2} = 0.25,$$

$$P(\eta = 10/\xi = 8) = \frac{p_{33}}{p_{3\cdot}} = \frac{0.09}{0.2} = 0.45, \quad P(\eta = 11/\xi = 8) = \frac{p_{34}}{p_{3\cdot}} = \frac{0.04}{0.2} = 0.2,$$

а условное распределение имеет вид

η	3	5	10	11
p	0.1	0.25	0.45	0.2

Таким образом, условное распределение случайной величины η отличатся от ее безусловного распределения. Это означает, что случайные величины ξ и η зависимы.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление всех условных распределений обеих случайных величин.

ORIGIN := 1

Распределение двумерной случайной величины

$$\xi\eta := \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 10 & 11 \\ 1 & 0.01 & 0.01 & 0.17 & 0.01 \\ 7 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 8 & 0.02 & 0.05 & 0.09 & 0.04 \end{bmatrix}$$

Распределение случайной величины ξ

$$\text{submatrix}(\xi\eta, 2, 4, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$j := 1..3 \qquad tmp_j := \sum_{i=2}^{5} \xi\eta_{j+1,i} \qquad tmp = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\xi := \text{stack}\left(\text{submatrix}(\xi\eta, 2, 4, 1, 1)^T, tmp^T\right) \qquad \xi = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Распределение случайной величины η

$$\text{submatrix}(\xi\eta, 1, 1, 2, 5) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$j := 1..4 \qquad tmp_j := \sum_{i=2}^{4} \xi\eta_{i,j+1} \qquad tmp = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.26 \\ 0.36 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\eta := \mathrm{stack}\left(\mathrm{submatrix}(\xi\eta, 1, 1, 2, 5), \mathrm{tmp}^T\right)$$

$$\eta = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 & 11 \\ 0.13 & 0.26 & 0.36 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Условные распределения η при ξ=1, 7, 8

$$i := 1..4 \qquad j := 1..3 \qquad P\eta_{i,j} := \frac{\xi\eta_{j+1,i+1}}{\xi_{2,j}}$$

$$P\eta = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.167 & 0.1 \\ 0.05 & 0.333 & 0.25 \\ 0.85 & 0.167 & 0.45 \\ 0.05 & 0.333 & 0.2 \end{bmatrix} \qquad \eta P := \mathrm{augment}\left[\left(\eta^T\right)^{\langle 1 \rangle}, P\eta\right]$$

$$\eta P = \begin{bmatrix} 3 & 0.05 & 0.167 & 0.1 \\ 5 & 0.05 & 0.333 & 0.25 \\ 10 & 0.85 & 0.167 & 0.45 \\ 11 & 0.05 & 0.333 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Условные распределения ξ при η=3, 5, 10, 11

$$i := 1..3 \qquad j := 1..4 \qquad P\xi_{i,j} := \frac{\xi\eta_{i+1,j+1}}{\eta_{2,j}}$$

$$P\xi = \begin{bmatrix} 0.077 & 0.038 & 0.472 & 0.04 \\ 0.769 & 0.769 & 0.278 & 0.8 \\ 0.154 & 0.192 & 0.25 & 0.16 \end{bmatrix} \qquad \xi P := \mathrm{augment}\left[\left(\xi^T\right)^{\langle 1 \rangle}, P\xi\right]$$

$$\xi P = \begin{bmatrix} 1 & 0.077 & 0.038 & 0.472 & 0.04 \\ 7 & 0.769 & 0.769 & 0.278 & 0.8 \\ 8 & 0.154 & 0.192 & 0.25 & 0.16 \end{bmatrix}$$

ЗАДАНИЕ 5.14

Вычислите распределение компонент заданной двумерной случайной величины и все их условные распределения. Постройте многоугольники соответствующих распределений.

Порядок выполнения задания

1. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное 1.
2. Определите матрицу $\xi\eta$ для хранения распределения двумерной случайной величины. Эта матрица в первом столбце и в первой строке содержит значения компонент двумерной случайной величины, ее элемент $\xi\eta_{11} = 0$, а элемент $\xi\eta_{ij}$ равен вероятности того, что двумерная случайная величина принимает значение (ξ_i, η_j).
3. Выделите столбец, содержащий значения первой компоненты двумерной случайной величины.
4. Вычислите распределение первой компоненты.
5. Сформируйте матрицу распределения первой компоненты, которая содержит в первой строке значения компоненты, а во второй — соответствующие вероятности.
6. Выделите строку, содержащую значения второй компоненты двумерной случайной величины.
7. Вычислите распределение второй компоненты.
8. Сформируйте матрицу распределения второй компоненты, которая содержит в первой строке значения компоненты, а во второй — соответствующие вероятности.
9. Вычислите условные вероятности второй компоненты для всех возможных значений первой.
10. Сформируйте матрицу условного распределения второй компоненты следующим образом: в первом столбце матрицы записаны значения второй компоненты, а элемент i-й строки j-го столбца — вероятность того, что вторая компонента принимает значение η_i при условии, что первая компонента принимает значение ξ_j.
11. Вычислите условные вероятности первой компоненты для всех возможных значений второй.
12. Сформируйте матрицу условного распределения первой компоненты следующим образом: в первом столбце матрицы записаны значения первой компоненты, а элемент i-й строки j-го столбца — вероятность того, что первая компонента принимает значение ξ_i при условии, что вторая компонента принимает значение η_j.
13. Сохраните рабочий документ в файле на диске. Он будет использован при выполнении заданий раздела "Числовые характеристики случайных векторов".

Пример выполнения задания

Выше приведен пример выполнения задания для двумерной случайной величины

$\xi \diagdown \eta$	3	5	10	11
1	0.01	0.01	0.17	0.011
7	0.1	0.2	0.1	0.2
8	0.02	0.05	0.09	0.04

Условные распределения непрерывных случайных величин

Для непрерывных двумерных случайных величин условные распределения строятся по следующей схеме.

Если $p_{\xi,\eta}(x,y)$ — плотность вероятностей совместного распределения двумерной случайной величины $(\xi,\ \eta)$, то плотности вероятностей каждой ее компоненты вычисляются по формулам:

$$p_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi,\eta}(x,y)\,dx, \qquad p_\xi(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy.$$

Условной плотностью распределения случайной величины ξ при условии, что случайная величина η принимает значение $\eta = y_0$, называется функция переменной x, определяемая формулой

$$p_\xi(x/\eta = y_0) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y_0)}{p_\eta(y_0)}.$$

Аналогично *условной плотностью распределения* случайной величины η при условии, что случайная величина ξ принимает значение $\xi = x_0$, называется функция переменной y, определяемая формулой

$$p_\eta(y/\xi = x_0) = \frac{p_{\xi,\eta}(x_0,y)}{p_\xi(x_0)}.$$

Рассмотрим пример. Пусть двумерная случайная величина $(\xi,\ \eta)$ распределена равномерно в круге $x^2 + y^2 \le 1$. Тогда плотность совместного распределения этой случайной величины равна

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \le 1, \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Плотности вероятностей каждой ее компоненты вычисляются по формулам:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1], \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & y \in [-1, 1], \\ 0, & y \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Условная плотность распределения случайной величины ξ при условии, что случайная величина η принимает значение $\eta = y_0 = 0$, равна

$$p_\xi(x/\eta = 0) = \frac{p_{\xi,\eta}(x, 0)}{p_\eta(0)} = \begin{cases} \dfrac{1/\pi}{2\sqrt{1-0^2}} = \dfrac{1}{2}, & x \in [-1, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Таким образом, при $\eta = 0$ случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$.

Для сравнения найдем условное распределение случайной величины ξ при условии, что случайная величина η принимает значение $\eta = y_0 = 0.5$. Рассматриваемая случайная величина ξ может принимать значения только из отрезка $\left[-\sqrt{1-0.5^2}, \sqrt{1-0.5^2}\right] = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, а условная плотность вероятностей равна

$$p_\xi(x/\eta = 0.5) = \frac{p_{\xi,\eta}(x, 0.5)}{p_\eta(0.5)} = \begin{cases} \dfrac{1/\pi}{2\sqrt{1-0.5^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, & x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]. \end{cases}$$

Видно, что условное распределение вероятностей случайной величины ξ зависит от значения, которое принимает случайная величина η. Это приводит к мысли, что случайные величины ξ и η зависимы. Впрочем, в зависимости случайных величин ξ и η можно убедиться, проверив условие независимости $p_{\xi,\eta}(x, y) = p_\xi(x)p_\eta(y)$:

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{1}{\pi}, \quad p_\xi(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, \quad p_\eta(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},$$

$$p_\xi(x)p_\eta(y) = \frac{4}{\pi^2}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \neq \frac{1}{\pi}$$

в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

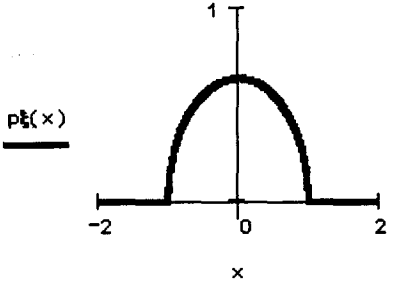
Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление и графики всех описанных в примере распределений для обеих непрерывных случайных величин.

$$p\xi\eta(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{if } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{if } x^2+y^2 > 1 \end{cases} \qquad i(x) := \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy$$

$$i(x) \rightarrow 2\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

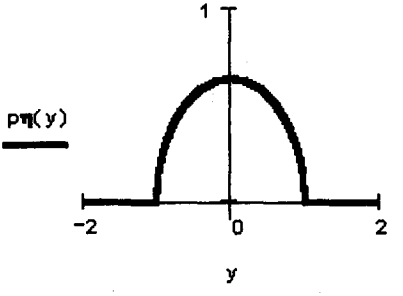
Распределение плотности вероятностей величины ξ

$$p\xi(x) := \begin{cases} i(x) & \text{if } |x| \le 1 \\ 0 & \text{if } |x| > 1 \end{cases}$$



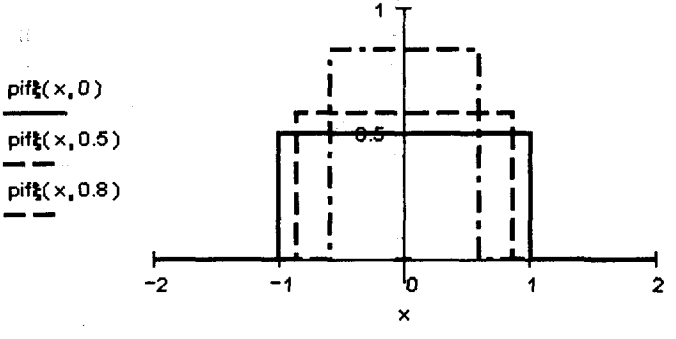
Распределение плотности вероятностей величины η

$$p\eta(y) := \begin{cases} i(y) & \text{if } |y| \le 1 \\ 0 & \text{if } |y| > 1 \end{cases}$$



Условные распределения плотности вероятностей величины ξ

$$a(y) := \sqrt{1-y^2} \qquad pif\xi(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\cdot p\eta(y)} & \text{if } |x| \le a(y) \\ 0 & \text{if } |x| > a(y) \end{cases}$$



ЗАДАНИЕ 5.15

Вычислите распределение компонент заданной двумерной случайной величины и все их условные распределения.

Порядок выполнения задания

1. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное 1.
2. Вычислите плотность вероятностей двумерной случайной величины $(\xi,\ \eta)$.
3. Вычислите плотности вероятностей каждой компоненты и постройте их графики.
4. Вычислите условную плотность вероятностей заданной компоненты.
5. Постройте графики условных вероятностей заданной компоненты при нескольких различных значениях второй компоненты.
6. Сохраните рабочий документ в файле на диске. Он будет использован при выполнении заданий раздела "Числовые характеристики случайных векторов".

Пример выполнения задания

Пример выполнения задания для двумерной случайной величины с распределением $p_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{\pi}$ при $x^2 + y^2 \le 1$ приведен выше.

Важный пример дает случайный вектор $(\xi,\ \eta)$, имеющий нормальное распределение. В наиболее общем случае плотность вероятностей такого вектора зависит от пяти параметров a_ξ, a_η, σ_ξ, σ_η, $k_{\xi\eta}$ и имеет вид

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-k_{\xi\eta}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-k_{\xi\eta}^2)}\left[\left(\frac{x-a_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 2k_{\xi\eta}\frac{x-a_\xi}{\sigma_\xi}\cdot\frac{x-a_\eta}{\sigma_\eta} + \left(\frac{x-a_\eta}{\sigma_\eta}\right)^2\right]\right\}.$$

При любых значениях параметров a_ξ, a_η, $\sigma_\xi > 0$, $\sigma_\eta > 0$, $|k_{\xi\eta}| \le 1$ эта функция удовлетворяет условиям нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

Кроме того, можно легко найти плотность распределения каждой из случайных величин ξ и η:

$$p_\xi(x) = \int\limits_{\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\xi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2\right],$$

$$p_\eta(x) = \int\limits_{\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\eta}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a_\eta}{\sigma_\eta}\right)^2\right],$$

т.е. случайные величины ξ и η имеют нормальные распределения с параметрами a_ξ, $\sigma_\xi > 0$, и a_η, $\sigma_\eta > 0$: $\xi \sim N(a_\xi, \sigma_\xi)$, $\eta \sim N(a_\eta, \sigma_\eta)$.

Рассмотрим теперь условное распределение ξ при условии $\eta = y$. Для этого, выполнив несложные вычисления, найдем

$$p_\xi(x/\eta = y) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\xi\sqrt{1-k_{\xi\eta}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\left[a_\xi + k_{\xi\eta}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(y-a_\eta)\right]}{\sigma_\xi\sqrt{1-k_{\xi\eta}^2}}\right)^2\right\}.$$

Это нормальное распределение с параметрами $a = a_\xi + k_{\xi\eta}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}(y-a_\eta)$ и $\sigma = \sigma_\xi\sqrt{1-k_{\xi\eta}^2}$.

Аналогично можно найти условное распределение

$$p_\xi(y/\xi = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\eta\sqrt{1-k_{\xi\eta}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\left[a_\eta + k_{\xi\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x-a_\xi)\right]}{\sigma_\eta\sqrt{1-k_{\xi\eta}^2}}\right)^2\right\},$$

которое также является нормальным распределением с параметрами $a = a_\eta + k_{\xi\eta}\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(x-a_\xi)$ и $\sigma = \sigma_\eta\sqrt{1-k_{\xi\eta}^2}$.

ЗАДАНИЕ 5.16

Вычислите плотности вероятностей и условные плотности вероятностей нормального случайного вектора (ξ, η) с заданными параметрами. Постройте график плотности вероятностей случайного вектора, графики плотностей вероятностей компонент случайного вектора и графики условных плотностей вероятностей каждой компоненты для указанных значений другой компоненты.

Порядок выполнения задания

1. Присвойте значения параметрам распределения случайного вектора.
2. Вычислите плотности вероятностей каждой компоненты.
3. Вычислите условные плотности вероятностей обеих компонент.
4. Определите таблицу значений плотности вероятностей случайного вектора и постройте ее график.
5. Постройте графики плотностей вероятностей компонент случайного вектора.
6. Постройте графики условных вероятностей заданной компоненты при заданных значениях второй компоненты.

Пример выполнения задания

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением и графиками плотностей вероятностей и условных плотностей вероятностей случайного вектора $(\xi,\ \eta)$, имеющего нормальное распределение с параметрами $a_\xi = 0$, $a_\eta = 1$, $\sigma_\xi = 1$, $\sigma_\eta = 2$, $k_{\xi\eta} = 0.5$. Графики условных вероятностей компоненты ξ построены для значений второй компоненты $\eta = a_\eta$ и $\eta = \frac{a_\eta + 5}{2}$. Графики условных вероятностей компоненты η построены для значений другой компоненты $\xi = a_\xi$ и $\xi = \frac{a_\xi + 1}{2}$.

$$a\xi := 0 \qquad \sigma\xi := 1 \qquad a\eta := 1 \qquad \sigma\eta := 2 \qquad k\xi\eta := 0.5$$

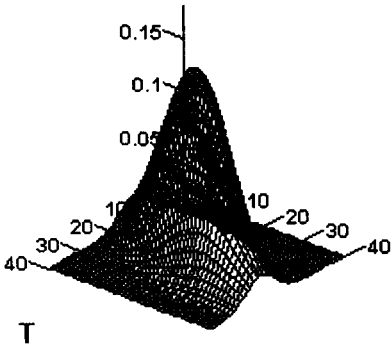
$$p\xi\eta(x,y) := \frac{\exp\left[-\dfrac{\left(\dfrac{x - a\xi}{\sigma\xi}\right)^2 - 2\cdot\left(k\xi\eta\cdot\dfrac{x - a\xi}{\sigma\xi}\cdot\dfrac{y - a\eta}{\sigma\eta}\right) + \left(\dfrac{y - a\eta}{\sigma\eta}\right)^2}{2\cdot(1 - k\xi\eta^2)}\right]}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{1 - k\xi\eta^2}}$$

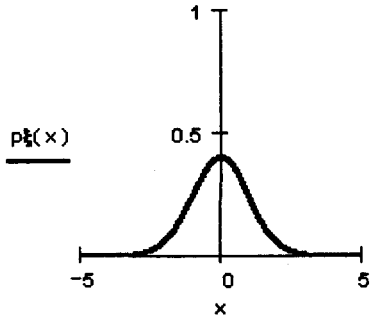
$$p\xi(x) := \mathrm{dnorm}(x, a\xi, \sigma\xi) \qquad p\eta(y) := \mathrm{dnorm}(y, a\eta, \sigma\eta)$$

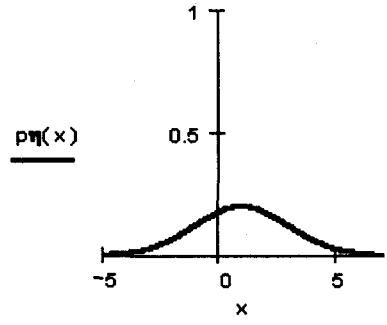
$$p\xi con(x,y) := \frac{p\xi\eta(x,y)}{p\eta(y)} \qquad p\eta con(x,y) := \frac{p\xi\eta(x,y)}{p\xi(x)}$$

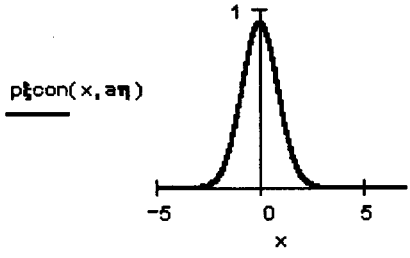
$$i := 0..40 \qquad j := 0..40$$

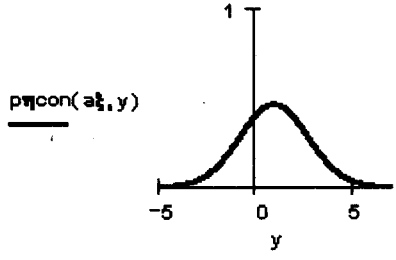
$$u_i := a\xi + (i - 20)\cdot 0.2 \qquad v_j := a\eta + (j - 20)\cdot 0.2 \qquad T_{i,j} := p\xi\eta(u_i, v_j)$$

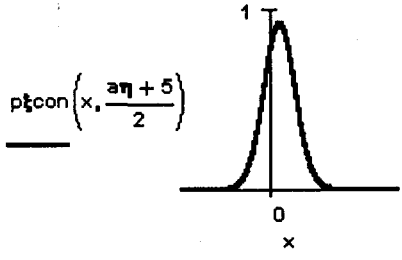


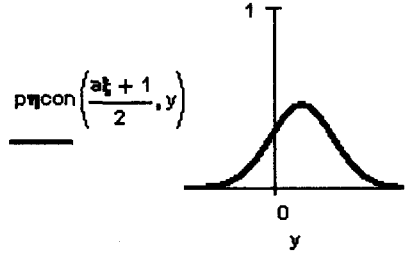












5.7
ФУНКЦИИ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Если ξ — случайная величина с областью значений X_ξ и функция $f(x)$ определена на множестве X_ξ, то $\eta = f(\xi)$ — тоже случайная величина. Задача об отыскании функции распределения случайной

величины η по известной функции распределения случайной величины ξ легко решается, если $f(x)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция. В этом случае

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\big(f(\xi) < x\big) = P\big(\xi < f^{-1}(x)\big) = F_\xi\big(f^{-1}(x)\big).$$

Итак,

$$F_\eta(x) = F_\xi\big(f^{-1}(x)\big).$$

Здесь $F_\xi(x)$ — известная функция распределения случайной величины ξ, а символом $f^{-1}(x)$ обозначена функция, обратная к функции* $f(x)$.

Плотность распределения случайной величины η для дифференцируемой функции $f(x)$ находится по формуле

$$p_\eta(x) = p_\xi\big(f^{-1}(x)\big)\frac{d\big(f^{-1}(x)\big)}{dx}.$$

ЗАДАНИЕ 5.17

Найдите по заданному распределению аргумента указанную в задании функцию случайной величины и ее распределение.

Порядок выполнения задания

1. Определите заданную функцию переменной x.
2. Определите функцию, обратную к заданной, как функцию переменной x.
3. Найдите производную обратной функции и определите ее как функцию переменной x.
4. Определите (явно или используя встроенную функцию Mathcad) плотность распределения аргумента.
5. Определите искомую плотность распределения функции случайной переменной.
6. Постройте график найденной плотности распределения.

Пример выполнения задания

Найдите плотность вероятностей случайной величины $\eta = e^\xi$, если $\xi \sim N(0,1)$.

Два различных варианта выполнения задания приведены ниже. Распределение, полученное в результате, называется *логнормальным*.

*Если $f(x)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, то у нее существует обратная функция.

Первый способ

$f(x) := \exp(x)$ $\quad$ $finv(x) := \ln(x)$

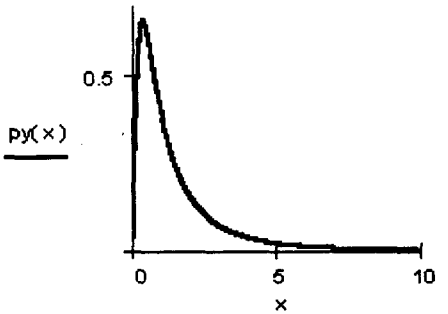
$\exp(x) - y$ $\quad$ $\ln(y)$ $\quad$ $finv(x) := \ln(x)$

$\frac{d}{dx}\ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$ $\quad$ $dfinv(x) := \frac{1}{x}$

$a := 0$ $\quad$ $\sigma := 1$

$px(x) := dnorm(x, a, \sigma)$ $\quad$ $py(x) := dnorm(\ln(x), a, \sigma) \cdot dfinv(x)$

$py(x) \rightarrow \frac{dnorm(\ln(x), 0, 1)}{x}$



Указание. В приведенном фрагменте обратная функция определена в результате символьного решения уравнения $e^x - y = 0$ относительно переменой x. Для того чтобы найти решение этого уравнения, введите его левую часть, выделите x и щелкните по строке **Solve** в пункте **Variable** меню **Symbolics**. Затем введите имя обратной функции как функции переменной x (в приведенном фрагменте — finv(x)) и присвойте ей вычисленное выражение, скопировав его через буфер обмена. Производную обратной функции вычислите символьно. В этом варианте решения задачи *плотность стандартного нормального распределения определена с помощью* встроенной функции Mathcad dnorm(x,0,1).

Второй способ

$f(x) := \exp(x)$ $\quad$ $finv(x) := \ln(x)$

$\exp(x) - y$ $\quad$ $\ln(y)$ $\quad$ $finv(x) := \ln(x)$

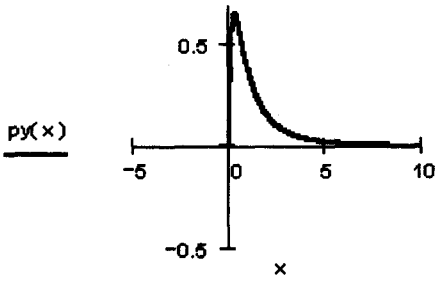
$\frac{d}{dx}\ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$ $\quad$ $dfinv(x) := \frac{1}{x}$

$a := 0$ $\quad$ $\sigma := 1$

$$px(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma}} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2} \cdot \left(\frac{x - a}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma}}\cdot\exp\left[\frac{-1}{2}\cdot\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right] \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\cdot\sigma}}\cdot\exp\left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{(\ln(x)-a)^2}{\sigma^2}\right],$$

$$py(x) := \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\cdot\sigma}}\cdot\exp\left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{(\ln(x)-a)^2}{\sigma^2}\right]\cdot\frac{1}{x}$$



Указание. В приведенном фрагменте рабочего документа Mathcad выражение для плотности распределения стандартного нормального закона записано в явном виде. При построении искомой плотности распределения все действия выполняйте так же, как в предыдущем варианте; для того чтобы выполнить подстановку $p_\xi\left(f^{-1}(x)\right)$, скопируйте в буфер обмена выражение для обратной функции, выделите x в выражении $p_\xi(x)$ и щелкните по строке **Substitute** в пункте **Variable** меню **Symbolics**.

Плотность вероятности суммы двух случайных величин

В теории вероятностей очень часто возникает необходимость в определении плотности вероятности суммы двух независимых случайных величин. Если ξ_1 и ξ_2 — непрерывные независимые случайные величины с плотностями вероятности соответственно $p_1(x)$ и $p_2(x)$, то плотность вероятностей суммы $\eta = \xi_1 + \xi_2$ вычисляется по формуле*

$$p_\eta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(t)\,p_2(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x-t)\,p_2(t)\,dt.$$

ЗАДАНИЕ 5.18

Найдите плотность распределения вероятности суммы двух независимых непрерывных случайных величин, заданных своими плотностями вероятностей.

*Интеграл такого вида называется *сверткой* функций $p_1(x)$ и $p_2(x)$.

Порядок выполнения задания

1. Определите плотности вероятности слагаемых как функции переменной x и введите их выражения.
2. Запишите выражение для свертки, скопировав в него соответствующие выражения плотности вероятности слагаемых.
3. Вычислите свертку символьно.
4. Определите плотность вероятности суммы как функцию переменной x и скопируйте в нее вычисленное выражение для свертки.
5. Постройте на одном графике плотности вероятностей слагаемых и суммы.

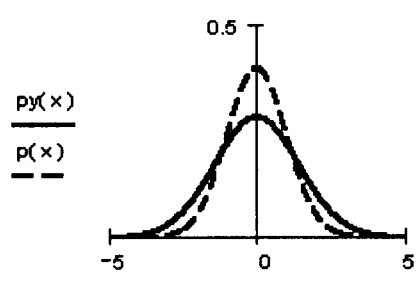
Пример выполнения задания

Пусть $\xi_1 \sim N(0,1)$, $\xi_2 \sim N(0,1)$ — независимые случайные величины. Найдем плотность вероятности случайных величин $\eta = \xi_1 + \xi_2$ и $\eta = \xi_1 + \xi_1 = 2\xi_1$. Построим их графики. Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вариант решения задачи, представлен ниже. Из приведенных в нем вычислений видно, что распределения случайных величин $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 + \xi_1 = 2\xi_1$ различны. В первом случае получено нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = \sqrt{2}$, а во втором — нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 2$.

$$p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$$

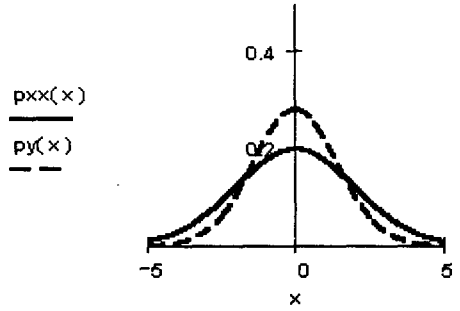
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left[\frac{-(t-x)^2}{2}\right]\right]dt \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\exp\left(\frac{-1}{4}\cdot x^2\right)}{\sqrt{\pi}}$$

$$py(x) := \frac{1}{2}\cdot\frac{\exp\left(\frac{-1}{4}\cdot x^2\right)}{\sqrt{\pi}}$$



$$finv(x) := \frac{x}{2} \qquad dfinv(x) := \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\exp\left(\frac{-1}{8}\cdot x^2\right)\quad pxx(x) := \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\exp\left(\frac{-1}{8}\cdot x^2\right)$$



Указание. Для того чтобы символьно вычислить интеграл, выделите его, щелкните по кнопке [•→] в панели [ ] и по рабочему документу вне выделяющей рамки.

Более сложные функции от случайных величин

Пусть $(\xi,\ \eta)$ — дискретный случайный вектор с распределением

$\xi \backslash \eta$	1	2	3	4
0	0.01	0.02	0.03	0.04
1	0.1	0.1	0.2	0.4
2	0.05	0.01	0.01	0.03

Найдем распределение случайной величины $\zeta = \xi\eta$, которая принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8. Вычислим соответствующие вероятности:

$$P(\zeta = \xi\eta = 0) = P(\xi = 0,\ \eta = 1) + P(\xi = 0,\ \eta = 2) +$$
$$+ P(\xi = 0,\ \eta = 3) + P(\xi = 0,\ \eta = 4) = 0{,}01 + 0.02 + 0.03 + 0.04 = 0.1,$$

$$P(\zeta = 1) = P(\xi = 1,\ \eta = 1) = 0.1,$$

$$P(\zeta = 2) = P(\xi = 1,\ \eta = 2) + P(\xi = 2,\ \eta = 1) = 0.1 + 0.05 = 0.15.$$

В результате получим распределение случайной величины $\zeta = \xi\eta$:

ξ	0	1	2	3	4	6	8
p	0.1	0.1	0.15	0.2	0.41	0.01	0.03

Для того чтобы найти распределение произведения непрерывных случайных величин, необходимо выполнить более громоздкие вычисления. Пусть $(\xi,\ \eta)$ — двумерный непрерывный случайный вектор с

плотностью распределения $p_{\xi,\eta}(x_1, x_2)$. Построим функцию распределения случайной величины $\zeta = \xi\eta$. Согласно определению

$$F_\xi(x) = P(\zeta < x) = P(\xi\eta < x) = \iint\limits_{x_1 x_2 < x} p_{\xi,\eta}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Для вычисления этой вероятности рассмотрим отдельно случаи $x > 0$ и $x < 0$. Области интегрирования для обоих случаев на рис. 5.2 закрашены.

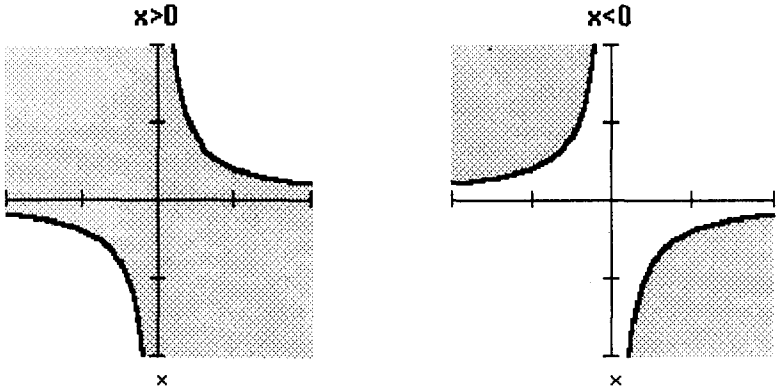


Рис. 5.2. Области интегрирования для вычисления распределения произведения

В обоих случаях имеем

$$F_\zeta(x) = P(\zeta < x) = \int\limits_{-\infty}^{0} dx_1 \int\limits_{x/x_1}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x_1, x_2)\, dx_2 + \int\limits_{0}^{\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{x/x_1} p_{\xi,\eta}(x_1, x_2)\, dx_2.$$

ЗАДАНИЕ 5.19

Найдите функцию распределения произведения двух независимых случайных величин, каждая из которых распределена равномерно на указанном промежутке.

Порядок выполнения задания

1. Запишите выражение для вычисления функции распределения.
2. Вычислите соответствующие интегралы символьно.
3. Опишите полученную функцию и постройте ее график.
4. Найдите плотность вероятностей произведения.

Пример выполнения задания

Пусть ξ и η — независимые случайные величины, распределенные равномерно на промежутке $[0, 1]$. Найдем функцию распределения их произведения $\zeta = \xi\eta$. Случайная величина ζ неотрицательна, поскольку значения сомножителей неотрицательны. Это означает, что $F_\zeta(x) = 0$ при $x \le 0$. Прежде чем воспользоваться формулой для вычисления функции распределения при $x > 0$, заметим, что при $x > 1$ гипербола $x_1x_2 = x$ не пересекает квадрат $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ (рис. 5.3), т.е. область интегрирования* совпадает с квадратом Ω и $F_\zeta(x) = 1$ при $x > 1$.

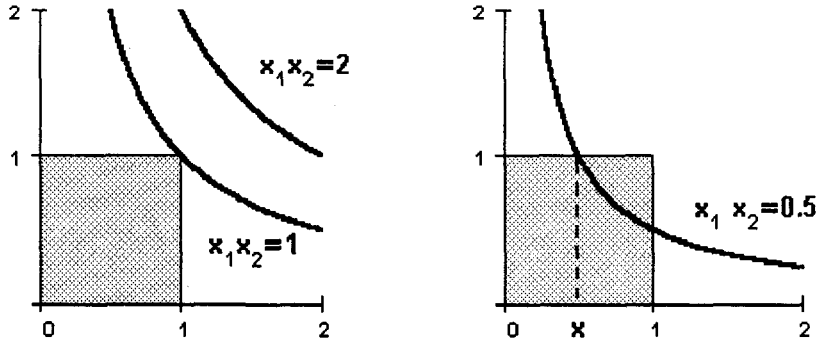


Рис. 5.3. Области интегрирования для вычисления функции распределения

При $0 < x < 1$ первый интеграл в формуле функции распределения равен нулю, а второй разбивается на два слагаемых:

$$\int_0^x dx_1 \int_0^1 p_{\xi,\eta}(x_1, x_2)\, dx_2 \qquad \text{и} \qquad \int_x^1 dx_1 \int_0^{x/x_1} p_{\xi,\eta}(x_1, x_2)\, dx_2.$$

Вычисление интегралов, определение функции распределения и построение ее графика приведены ниже.

Из приведенных вычислений видно, что плотность распределения бесконечно большая в окрестности точки $x = 0$. Но это не означает, что вероятность какого-либо события может оказаться большей 1, поскольку $\int_0^1 (-\ln x)\, dx = 1$.

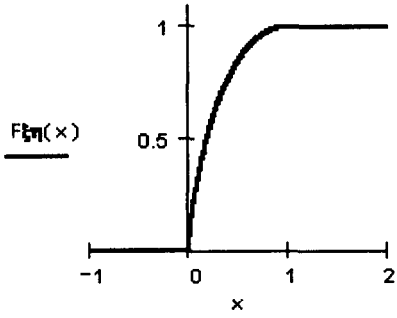
$$p\xi(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{if } -\infty < x < 0 \\ 0 & \text{if } x > 1 \end{cases} \qquad p\eta(y) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{if } -\infty < y < 0 \\ 0 & \text{if } y > 1 \end{cases}$$

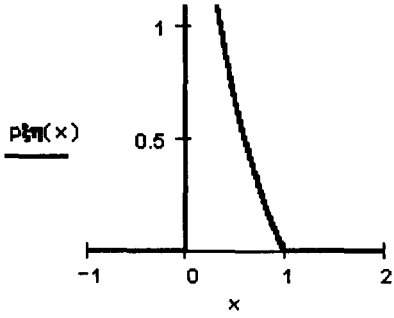
*$p_{\xi,\eta}(x_1, x_2) = 0$ вне квадрата Ω и $p_{\xi,\eta}(x_1, x_2) = 1$ внутри квадрата Ω.

$$F(x) := \int_0^x \int_0^1 1\,dy\,dt + \int_x^1 \int_0^{\frac{x}{t}} 1\,dy\,dt \qquad F(x) \rightarrow x - x\cdot\ln(x)$$

$$p(x) := \frac{d}{dx}F(x) \qquad p(x) \rightarrow -\ln(x)$$

$$F\xi\eta(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ F(x) & \text{if } 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{if } x > 1 \end{cases} \qquad p\xi\eta(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0 \\ p(x) & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{if } x \ge 1 \end{cases}$$





5.8 ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения. В то же время при решении практических задач достаточно знать несколько числовых параметров, которые позволяют представить основные особенности случайной величины в сжатой форме. К таким величинам относятся в первую очередь математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание случайной величины

Математическое ожидание — число, вокруг которого сосредоточены значения случайной величины.

Если ξ — дискретная случайная величина с распределением

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

то ее математическим ожиданием — оно обозначается $M\xi$ — называется величина

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i,$$

если число значений случайной величины конечно. Если число значений случайной величины счетно, то

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i.$$

При этом если ряд в правой части равенства расходится или сходится условно, то говорят, что случайная величина ξ не имеет математического ожидания.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины с плотностью вероятностей $p_\xi(x)$ вычисляется по формуле

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\, dx.$$

При этом если интеграл в правой части равенства расходится, то говорят, что случайная величина ξ не имеет математического ожидания.

Если случайная величина η является функцией случайной величины ξ, $\eta = f(\xi)$, то

$$M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_\xi(x)\, dx.$$

Аналогичные формулы справедливы для функций дискретной случайной величины:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i), \qquad M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} p_i f(x_i).$$

При вычислении математического ожидания случайной величины полезны следующие его свойства:

- математическое ожидание константы равно этой константе, т.е. $Mc = c$;
- математическое ожидание — линейный функционал случайной величины, т.е. при произвольных постоянных a и b верно равенство $M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$;

- математическое ожидание произведения двух *независимых* случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т.е. $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$.

Приведем формулы математических ожиданий для наиболее известных распределений:

- биномиальное распределение ($P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$): $M\xi = np$;
- геометрическое распределение ($P(\xi = k) = q^k p$): $M\xi = \frac{q}{p}$;
- гипергеометрическое распределение $\left(P(\xi = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\right)$: $M\xi = \frac{mM}{N}$;
- пуассоновское распределение $\left(P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)$: $M\xi = \lambda$.
- равномерное распределение ($p_\xi(x) = 1/(b-a)$, $x \in [a, b]$): $M\xi = \frac{a+b}{2}$;
- экспоненциальное (показательное) распределение ($p_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$): $M\xi = \frac{1}{\lambda}$;
- нормальное распределение $N(a, \sigma)$ $\left(p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right]\right)$: $M\xi = a$;
- распределение хи-квадрат (χ^2-распределение) с n степенями свободы $\left(p_{\chi^2}(z) = \left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}\right]^{-1} z^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{z}{2}},\ z > 0\right)$: $M\chi^2 = n$;
- распределение Стьюдента (t-распределение) с n степенями свободы $\left(p_{t_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^{-1}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right)$: $Mt_n = 0$;
- F-распределение Фишера с n и m степенями свободы $\left(p_F(x) = \frac{\Gamma((n+m)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}\left(1 + \frac{nx}{m}\right)^{-\frac{n+m}{2}},\ x > 0\right)$: $MF = \frac{m}{m-2}$, $m > 2$;
- распределение Парето ($p_\xi(x) = \rho a^\rho x^{-\rho-1}$, $x \geq a$, $a, \rho > 0$) имеет математическое ожидание только при $\rho > 1$: $M\xi = \frac{\rho}{\rho - 1}a$;
- логистическое распределение $\left(p_\xi(x) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{z}{(1+z)^2},\ \text{где } z = e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right)$: $M\xi = \alpha$.

Дисперсия случайной величины

Дисперсия случайной величины характеризует меру разброса значений случайной величины около ее математического ожидания.

Если случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M\xi$, то *дисперсией* случайной величины ξ называется величина $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$. Легко показать, что $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$. Эта универсальная формула одинаково хорошо применима как для дискретных

случайных величин, так и для непрерывных. Величина $M\xi^2$ вычисляется по формулам:

$$M\xi^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2, \qquad M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x)\,dx$$

для дискретных и непрерывных случайных величин соответственно.

Еще одним параметром для определения меры разброса значений случайной величины является *среднеквадратичное отклонение* σ_ξ, связанное с дисперсией соотношением $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$.

Перечислим основные свойства дисперсии:

- дисперсия любой случайной величины неотрицательна: $D\xi \geq 0$;
- дисперсия константы равна нулю: $Dc = 0$;
- для произвольной константы c: $D(c\xi) = c^2 D\xi$;
- дисперсия суммы (разности) двух *независимых* случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$.

Приведем формулы для дисперсий наиболее известных стандартных распределений:

- биномиальное распределение: $D\xi = npq$;
- геометрическое распределение: $D\xi = \frac{q}{p^2}$;
- гипергеометрическое распределение: $D\xi = \frac{M(N-M)(N-n)n}{N^2(N-1)}$;
- пуассоновское распределение: $D\xi = \lambda$;
- равномерное распределение: $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$;
- экспоненциальное (показательное) распределение: $D\xi = \lambda^{-2}$;
- нормальное распределение $N(a,\sigma)$: $D\xi = \sigma^2$;
- распределение хи-квадрат (χ^2-распределение) с n степенями свободы: $D\xi^2 = 2n$;
- распределение Стьюдента с n степенями свободы: $D\xi = \frac{n}{n-2}$, $n > 2$;
- F-распределение Фишера с n и m степенями свободы: $DF = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$, $m > 4$;
- распределение Парето: $D\xi = \frac{\rho a}{(\rho-1)^2(\rho-2)}$, $\rho > 2$;
- логистическое распределение: $D\xi = \frac{1}{3}\pi^2\beta^2$.

ЗАДАНИЕ 5.20

Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi = S(\eta)$, которая представляет собой площадь указанной в задании геометрической фигуры, для случайной величины η, имеющей заданное распределение.

Порядок выполнения задания

1. Запишите выражение для функции $\xi = S(\eta)$ от случайной величины η, определяющей площадь фигуры.
2. Вычислите математическое ожидание случайной величины ξ.
3. Вычислите математическое ожидание случайной величины ξ^2.
4. Вычислите дисперсию случайной величины $\xi = S(\eta)$ по формуле $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

Пример выполнения задания

Случайная величина η распределена равномерно на промежутке $[0, 1]$. Найдем математическое ожидание и дисперсию площади квадрата со стороной η, т.е. характеристики случайной величины $\xi = S(\eta) = \eta^2$.

Ниже приведено решение задачи в среде Mathcad.

Математическое ожидание площади квадрата ξ

$$M(\xi) := \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{2-1}\,dx \qquad M(\xi) \rightarrow \frac{7}{3}$$

Математическое ожидание квадрата случайной величины ξ

$$M2(\xi) := \int_1^2 x^4 \cdot \frac{1}{2-1}\,dx \qquad M2(\xi) \rightarrow \frac{31}{5}$$

Дисперсия площади квадрата ξ

$$D(\xi) := M2(\xi) - M(\xi)^2 \qquad D(\xi) \rightarrow \frac{34}{45}$$

Указание. Математическое ожидание и дисперсию площади квадрата со стороной η вычислите символьно по формулам $M\xi = M\eta^2$, $D\xi = M\eta^4 - (M\xi)^2$. Определите искомые математическое ожидание и дисперсию как функции переменной ξ.

Моменты

В теории вероятностей и математической статистике, помимо математического ожидания и дисперсии, используются и другие числовые характеристики случайных величин. В первую очередь это *начальные* и *центральные моменты*.

Начальным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание k-й степени случайной величины ξ, т.е. $\alpha_k = M\xi^k$.

Центральным моментом k-го порядка случайной величины ξ называется величина μ_k, определяемая формулой $\mu_k = M(\xi - M\xi)^k$.

Заметим, что математическое ожидание случайной величины — начальный момент первого порядка, $\alpha_1 = M\xi$, а дисперсия — центральный момент второго порядка: $\mu_2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$.

Существуют формулы, позволяющие выразить центральные моменты случайной величины через ее начальные моменты. Одна из таких формул приведена выше: $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \mu_2 - \alpha_1^2$.

В дальнейшем будет использована формула $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3$.

Нетрудно понять, что если плотность распределения вероятностей случайной величины симметрична относительно прямой $x = M\xi$, то все ее центральные моменты нечетного порядка равны нулю.

В теории вероятностей и в математической статистике в качестве меры асимметрии распределения служит коэффициент асимметрии, который определяется формулой

$$\beta_\xi = \frac{\mu_3}{\sigma_\xi^3},$$

где μ_3 — центральный момент третьего порядка; $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\mu_2}$ — среднеквадратичное отклонение.

Коэффициент асимметрии — безразмерная величина, а по его знаку можно судить о характере асимметрии.

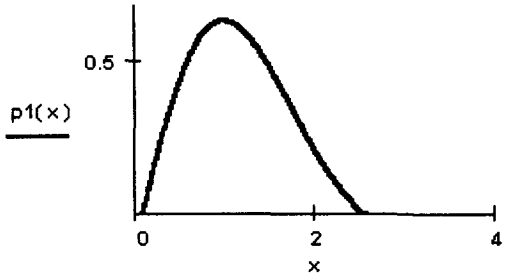
Ниже приведено вычисление коэффициентов асимметрии распределения Рэлея, плотность вероятностей которого $p(x) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, и коэффициентов асимметрии распределения с плотностью вероятностей $p(x) = 12x^2(1-x)$, $0 \le x \le 1$.

$$p1(x) := x\cdot\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \qquad M1(\xi) := \int_0^\infty x\cdot p1(x)\,dx$$

$$\mu21(\xi) := \int_0^\infty (x - M1(\xi))^2\cdot p1(x)\,dx$$

$$\mu31(\xi) := \int_0^\infty (x - M1(\xi))^3\cdot p1(x)\,dx$$

$$\sigma1(\xi) := \sqrt{\mu21(\xi)} \qquad \beta1(\xi) := \frac{\mu31(\xi)}{\sigma1(\xi)^3} \qquad \beta1(\xi) \rightarrow .631042$$

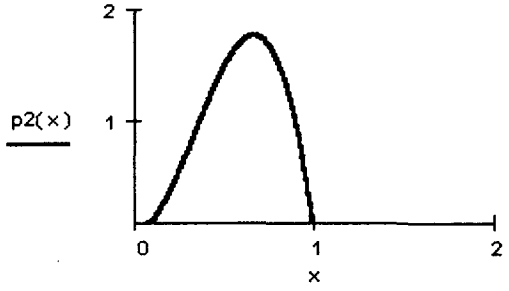


$$p2(x) := 12 \cdot x^2 \cdot (1 - x) \qquad M2(\xi) := \int_0^1 x \cdot p2(x)\, dx$$

$$\mu 22(\xi) := \int_0^1 (x - M2(\xi))^2 \cdot p2(x)\, dx$$

$$\mu 32(\xi) := \int_0^1 (x - M2(\xi))^3 \cdot p2(x)\, dx$$

$$\sigma 2(\xi) := \sqrt{\mu 22(\xi)} \qquad \beta 2(\xi) := \frac{\mu 32(\xi)}{\sigma 2(\xi)^3} \qquad \beta 2(\xi) \rightarrow \frac{-2}{7}$$



Указание. Для того чтобы вычислить значение коэффициента асимметрии, выделите выражение для него, щелкните в строке **Floating Point** в меню **Symbolics** и укажите в окне диалога число десятичных знаков в выводе.

Как видно, коэффициент асимметрии первого распределения положителен и у графика плотности вероятностей "круче левый склон". У второго распределения, наоборот, коэффициент асимметрии отрицателен и у графика плотности вероятностей "круче правый склон".

ЗАДАНИЕ 5.21

Вычислите коэффициент асимметрии случайной величины ξ с заданным распределением.

Порядок выполнения задания

1. Определите значения параметров распределения случайной величины.
2. Определите центральный момент третьего порядка как функцию параметров распределения случайной величины.
3. Определите центральный момент второго порядка как функцию параметров распределения случайной величины.
4. Вычислите коэффициент асимметрии.
5. Постройте график плотности вероятности.

Пример выполнения задания

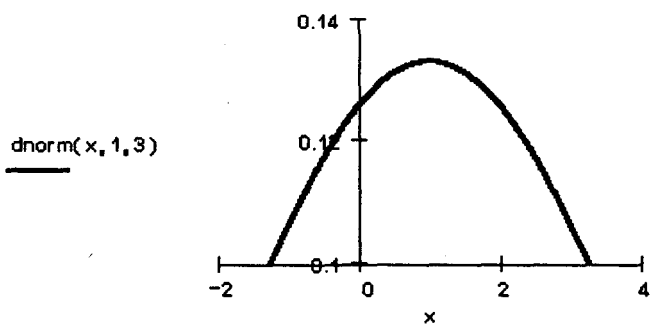
Случайная величина ξ имеет нормальное распределение $N(1,3)$. Найдем коэффициент асимметрии. Ниже приведено решение задачи в среде Mathcad.

$$a := 1 \qquad \sigma := \sqrt{3}$$

$$\mu 3(a,\sigma) := \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2}\cdot\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right] dx \qquad \mu 3(a,\sigma) \rightarrow 0$$

$$\mu 2(a,\sigma) := \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2}\cdot\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2\right]\right] dx \qquad \mu 2(a,\sigma) \rightarrow 3$$

$$\beta(\xi) := \frac{\mu 3(a,\sigma)}{\mu 2(a,\sigma)^{\frac{3}{2}}} \qquad \beta(\xi) \rightarrow 0$$



Из приведенных вычислений видно, что коэффициент асимметрии нормального распределения равен нулю.

Эксцесс

Нормальное распределение наиболее часто используется в теории вероятностей и в математической статистике, и поэтому график плотности вероятностей нормального распределения стал своего рода эталоном, с которым сравнивают другие распределения. Одним из параметров, определяющих отличие сравниваемого распределения от нормального, является эксцесс.

Эксцесс γ случайной величины ξ определяется равенством $\gamma = \frac{\mu_4}{(D\xi)^2} - 3$.

У нормального распределения, естественно, $\gamma = 0$. Если $\gamma > 0$, то это означает, что график плотности вероятностей $p_\xi(x)$ сильнее "заострен", чем у нормального распределения, если же $\gamma < 0$, то "заостренность" графика $p_\xi(x)$ меньше, чем у нормального распределения.

ЗАДАНИЕ 5.22

Вычислите эксцесс случайной величины ξ с заданным распределением.

Порядок выполнения задания

1. Определите значения параметров распределения случайной величины.
2. Определите центральный момент четвертого порядка как функцию параметров распределения случайной величины.
3. Определите центральный момент второго порядка как функцию параметров распределения случайной величины.
4. Вычислите коэффициент асимметрии.
5. Постройте график плотности вероятности.

Пример выполнения задания

Ниже приведены вычисления эксцесса и графики соответствующих плотностей вероятностей для двух случайных величин, первая имеет распределение Лапласа, плотность вероятностей которого $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, а вторая распределена равномерно на отрезке $[-1, 1]$. Для сравнения вместе с графиками плотности вероятностей исследуемых случайных величин приведен график плотности вероятностей нормального распределения $N(0, 1)$.

$$p(x) := \frac{1}{2}\cdot\exp(-x) \qquad p2(x) := \frac{1}{2}$$

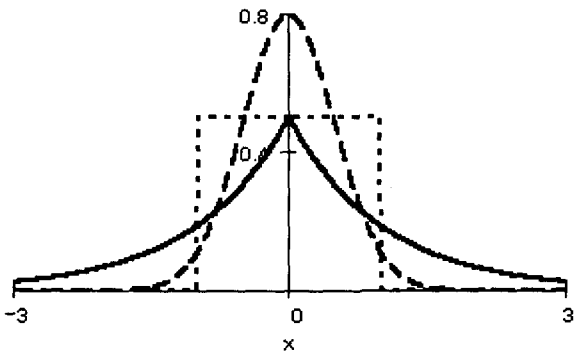
$$\mu 21(\xi) := 2\cdot\int_0^{\infty} x^2\cdot p(x)\,dx \qquad \mu 22(\eta) := \int_{-1}^{1} x^2\cdot p2(x)\,dx$$

$$\mu 41(\xi) := 2\cdot\int_0^{\infty} x^4\cdot p(x)\,dx \qquad \mu 42(\eta) := \int_{-1}^{1} x^4\cdot p2(x)\,dx$$

$$\gamma 1(\xi) := \frac{\mu 41(\xi)}{(\mu 21(\xi))^2} - 3 \qquad \gamma 2(\eta) := \frac{\mu 42(\eta)}{(\mu 22(\eta))^2} - 3$$

$$\gamma 1(\xi) \rightarrow 3 \qquad \gamma 2(\eta) \rightarrow \frac{-6}{5}$$

$$p1(x) := \frac{1}{2}\cdot(\exp(-|x|)) \qquad p2(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } |x| \le 1 \\ 0 & \text{if } |x| > 1 \end{cases}$$



У'казание. Mathcad не справляется с вычислением интегралов функций, заданных разными выражениями на разных промежутках. Поэтому при вычислении моментов используйте свойство интеграла по симметричному промежутку от четной функции. Для того чтобы определить плотность вероятностей равномерного распределения, щелкните по кнопке [Add Line] в панели [ ], введите в первой строке выражение для функции, щелкните по кнопке [if] и введите условие; аналогично определите во второй строке функцию на втором промежутке.

Из приведенных вычислений видно, что график плотности вероятностей распределения с отрицательным эксцессом имеет более "сглаженный" максимум, чем у плотности вероятностей нормального распределения, а плотность вероятностей с положительным эксцессом, наоборот, "острее", чем плотность вероятностей нормального распределения.

Среднее гармоническое и среднее геометрическое случайных величин, принимающих только положительные значения

Среднее гармоническое и среднее геометрическое случайной величины — числовые характеристики, используемые в экономических вычислениях.

Средним гармоническим случайной величины, принимающей положительные значения, называется величина $H_\xi = M(\xi^{-1})^{-1}$. Например, для непрерывной случайной величины, распределенной равномерно на отрезке $[a, b]$, $0 < a < b$, среднее гармоническое вычисляется следующим образом:

$$M\left(\frac{1}{\xi}\right) = \int\limits_a^b \frac{1}{b-a}\frac{dx}{x} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a}, \qquad H_\xi = \frac{1}{M\left(\frac{1}{\xi}\right)} = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}.$$

Средним геометрическим случайной величины, принимающей положительные значения, называется величина $G_\xi = e^{M(\ln\xi)}$.

Чтобы понять происхождение термина "среднее геометрическое", обратимся к дискретной случайной величине, имеющей равномерное распределение

ξ	a_1	a_2	$\dots$	a_n
p	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$

В этом случае среднее геометрическое вычисляется следующим образом:

$$G_\xi = \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{\ln a_i}{n}\right) = a_1^{\frac{1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} \dots a_n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

т.е. получилось традиционное определение среднего геометрического чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Вычислим среднее геометрическое случайной величины, имеющей, например, показательное распределение с параметром λ:

$$M(\ln\xi) = \int\limits_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \ln x\, dx = -(C + \ln\lambda), \qquad G_\xi = e^{-(C+\ln\lambda)} = \frac{e^{-C}}{\lambda},$$

где $C \approx 0.577$ — постоянная Эйлера.

ЗАДАНИЕ 5.23

Вычислите среднее геометрическое и среднее гармоническое неотрицательной случайной величины ξ с заданным распределением.

Порядок выполнения задания

1. Определите значения параметров распределения случайной величины ξ.
2. Определите математическое ожидание $\frac{1}{\xi}$ как функцию параметров распределения случайной величины.
3. Определите среднее гармоническое случайной величины как функцию параметров распределения случайной величины.
4. Определите математическое ожидание $\ln\xi$ как функцию параметров распределения случайной величины.
5. Определите среднее геометрическое случайной величины как функцию параметров распределения случайной величины.

Пример выполнения задания

Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[2, 3]$. Найдите для нее среднее гармоническое и среднее геометрическое. Ниже приведено решение задачи в среде Mathcad.

$$a := 2 \qquad b := 3$$

$$M(a,b) := \int_2^3 \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{b-a}\,dx \qquad M(a,b) \rightarrow \ln(3) - \ln(2)$$

$$H(a,b) := \frac{1}{M(a,b)} \qquad H(a,b) \rightarrow \frac{1}{(\ln(3) - \ln(2))}$$

$$Mln(a,b) := \int_2^3 \ln(x)\cdot\frac{1}{b-a}\,dx \qquad Mln(a,b) \rightarrow 3\cdot\ln(3) - 1 - 2\cdot\ln(2)$$

$$G(a,b) := \exp(Mln(a,b)) \qquad G(a,b) \rightarrow \frac{27}{4}\cdot\exp(-1)$$

5.9 ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В этом разделе рассмотрены числовые характеристики только двумерных случайных величин, поскольку обобщение на случай $n > 2$ не вызывает затруднений.

Математическое ожидание

Пусть (ξ, η) — двумерная случайная величина, тогда $M(\xi, \eta) = (M\xi, M\eta)$, т.е. математическое ожидание случайного вектора — это вектор из математических ожиданий компонент вектора.

Если (ξ, η) — дискретный случайный вектор с распределением

$\xi \diagdown \eta$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

то математические ожидания компонент вычисляются по формулам:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij}, \quad M\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij}.$$

Эти формулы можно записать в сокращенном виде. Обозначим

$$p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \qquad p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},$$

тогда

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i\cdot}, \qquad M\eta = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{\cdot j}.$$

Эти формулы естественно обобщаются на непрерывный случай.

Если $p_{\xi,\eta}(x,y)$ — совместная плотность распределения двумерной случайной величины (ξ, η), то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy, \quad M\eta = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy.$$

Поскольку

$$\int^{\infty}\int^{\infty} x p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \int^{\infty} x\,dx \int^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy,$$

а $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy = p_\xi(x)$ — не что иное, как плотность распределения случайной величины ξ, то $M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx$ и аналогично $M\eta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y p_\eta(y)\,dy$.

ЗАДАНИЕ 5.24

Вычислите математическое ожидание дискретного двумерного случайного вектора с заданным распределением.

Порядок выполнения задания

1. Определите матрицу заданного распределения.
2. Вычислите математические ожидания обеих компонент.
3. Сохраните рабочий документ в файле на диске.

Пример выполнения задания

Вычислите математическое ожидание дискретного двумерного случайного вектора с распределением

$\xi \backslash \eta$	0	1	2
2	0.1	0.1	0.2
7	0.2	0.2	0.2

Примерный вариант выполнения задания приведен ниже.

ORIGIN := 1

Распределение двумерной случайной величины

$$\xi\eta := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 7 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Первый способ

Математическое ожидание ξ

$$M\xi := \sum_{i=2}^{3} \sum_{j=2}^{4} \xi\eta_{i,1} \cdot \xi\eta_{i,j}$$

$M\xi = 5$

Математическое ожидание η

$$M\eta := \sum_{i=2}^{3} \sum_{j=2}^{4} \xi\eta_{1,j} \cdot \xi\eta_{i,j}$$

$M\eta = 1.1$

Второй способ

Математическое ожидание ξ

$$M\xi := \sum_{i=2}^{3} \xi\eta_{i,1} \cdot \sum_{j=2}^{4} \xi\eta_{i,j}$$

$$M\xi = 5$$

Математическое ожидание η

$$M\eta := \sum_{j=2}^{4} \xi\eta_{1,j} \cdot \sum_{i=2}^{3} \xi\eta_{i,j}$$

$$M\eta = 1.1$$

Рассмотрим случайную величину, имеющую двумерное нормальное распределение:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-k_{\xi\eta}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-k_{\xi\eta}^2)}\left[\left(\frac{x-a_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2k_{\xi\eta}\frac{x-a_\xi}{\sigma_\xi}\cdot\frac{x-a_\eta}{\sigma_\eta} + \left(\frac{x-a_\eta}{\sigma_\eta}\right)^2\right]\right\}.$$

Чтобы найти $M\xi$, необходимо вычислить двойной интеграл:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy.$$

Внутренний интеграл уже вычислялся в разделе "Условные распределения случайных величин". Там показано, что случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a_ξ и σ_ξ, т.е. $M\xi = a_\xi$ и аналогично $M\eta = a_\eta$.

Таким образом, параметры a_ξ и a_η имеют простой теоретико-вероятностный смысл — это математические ожидания случайных величин ξ и η.

Дисперсия

Понятие дисперсии нетривиальным образом обобщается на многомерные случайные величины. Это обобщение будет сделано в следующем разделе. Здесь лишь приведем формулы для вычисления дисперсии компонент двумерного случайного вектора. Если $(\xi,\ \eta)$ — двумерная случайная величина, то

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2, \quad D\eta = M(\eta - M\eta)^2 = M\eta^2 - (M\eta)^2.$$

Входящие в эту формулу математические ожидания вычисляются по приведенным выше формулам.

ЗАДАНИЕ 5.25

Вычислите дисперсию дискретного двумерного случайного вектора с заданным распределением.

Порядок выполнения задания

1. Прочитайте с диска файл предыдущего задания.
2. Вычислите математические ожидания квадратов обеих компонент.
3. Вычислите дисперсии обеих компонент.

Пример выполнения задания

Пример выполнения задания для дискретного двумерного случайного вектора из задания 5.24 приведен ниже.

$ORIGIN := 1$

Распределение двумерной случайной величины

$$\xi\eta := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 7 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Математическое ожидание ξ

$$M\xi := \sum_{i=2}^{3} \sum_{j=2}^{4} \xi\eta_{i,1} \cdot \xi\eta_{i,j}$$

$M\xi = 5$

Математическое ожидание η

$$M\eta := \sum_{i=2}^{3} \sum_{j=2}^{4} \xi\eta_{1,j} \cdot \xi\eta_{i,j}$$

$M\eta = 2.1$

Математическое ожидание ξ^2

$$M\xi 2 := \sum_{i=2}^{3} \left(\xi\eta_{i,1}\right)^2 \cdot \sum_{j=2}^{4} \xi\eta_{i,j}$$

$M\xi 2 = 31$

Математическое ожидание η^2

$$M\eta 2 := \sum_{j=2}^{4} \left(\xi\eta_{1,j}\right)^2 \cdot \sum_{i=2}^{3} \xi\eta_{i,j}$$

$M\eta 2 = 5.1$

Дисперсия ξ

$D\xi := M\xi 2 - M\xi^2 \qquad D\xi = 6$

Дисперсия η

$D\eta := M\eta 2 - M\eta^2 \qquad D\eta = 0.69$

Обратимся еще раз к двумерной случайной величине, имеющей двумерное нормальное распределение. Так как компонента ξ двумерного нормального распределения имеет нормальное распределение с параметрами a_ξ и σ_ξ, то можно сделать вывод о дисперсии ξ: $D\xi = \sigma_\xi^2$. Аналогично $D\eta = \sigma_\eta^2$.

Таким образом, ясен теоретико-вероятностный смысл четырех из пяти параметров двумерного нормального распределения: $a_\xi = M\xi$, $a_\eta = M\eta$, $\sigma_\xi^2 = D\xi$, $\sigma_\eta^2 = D\eta$. Смысл последнего, пятого, параметра k станет ясным в следующем разделе.

Условное математическое ожидание

Между случайными величинами может существовать функциональная зависимость. Например, если ξ — случайная величина и $\eta = \xi^2$, то η — тоже случайная величина, связанная с ξ функциональной зависимостью. В то же время между случайными величинами может существовать зависимость другого рода, называемая *стохастической*. В разделе, посвященном условным распределениям, уже обсуждалась такая зависимость. Из рассмотренных там примеров видно, что информация о значении одной случайной величины (одной компоненты случайного вектора) изменяет распределение другой случайной величины (другой компоненты случайного вектора), а это может, вообще говоря, изменить и числовые характеристики случайных величин.

Математическое ожидание, вычисленное по условному распределению, называется *условным математическим ожиданием*.

Для двумерного дискретного случайного вектора (ξ, η) с распределением

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}

условное математическое ожидание случайной величины ξ при условии, что случайная величина η принимает значение y_j, вычисляется по формуле

$$M(\xi/\eta = y_j) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}}.$$

Аналогично условное математическое ожидание случайной величины η при условии, что случайная величина ξ принимает значение x_i, равно

$$M(\eta/\xi = x_i) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} y_j p_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}}.$$

Рассмотрим пример. Пусть дискретный случайный вектор (ξ, η) имеет распределение

$\xi \backslash \eta$	1	2	3
1	0.1	0.1	0.2
2	0.2	0.2	0.2

Ниже приведены вычисления математических ожиданий случайных величин ξ и η и их условных математических ожиданий, выполненные в Mathcad.

ORIGIN := 1

Распределение двумерной случайной величины

$$\xi\eta := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Распределение случайной величины ξ

$$\text{submatrix}(\xi\eta, 2, 3, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$j := 1..2 \qquad tmp_j := \sum_{i=2}^{4} \xi\eta_{j+1,i} \qquad tmp = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\xi := \text{stack}\left(\text{submatrix}(\xi\eta, 2, 3, 1, 1)^T, tmp^T\right)$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Математическое ожидание ξ

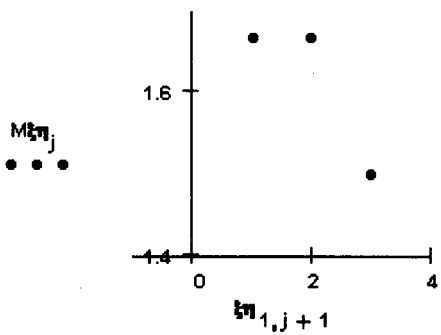
$$M\xi := \sum_{i=1}^{2} \xi_{1,i} \cdot \xi_{2,i} \qquad M\xi = 1.6$$

Условные математические ожидания ξ

$$j := 1..3 \qquad T_j := \frac{\sum_{i=1}^{2} \xi\eta_{i+1,1} \cdot \xi\eta_{i+1,j+1}}{\sum_{i=1}^{2} \xi\eta_{i+1,j+1}}$$

$$M\xi\eta := \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \qquad M\xi\eta = \begin{bmatrix} 1.667 \\ 1.667 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Точечный график регрессии Mξη=f(y)



Распределение случайной величины η

$$\text{submatrix}(\xi\eta, 1, 1, 2, 4) = [\,1 \;\; 2 \;\; 3\,]$$

$$j := 1..3 \qquad tmp_j := \sum_{i=2}^{3} \xi\eta_{i,j+1} \qquad tmp = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\eta := \text{stack}\left(\text{submatrix}(\xi\eta, 1, 1, 2, 4), tmp^T\right)$$

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Математическое ожидание η

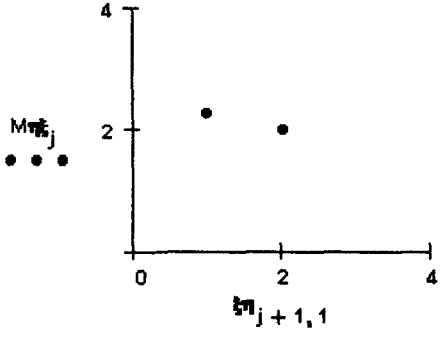
$$M\eta := \sum_{i=1}^{3} \eta_{1,i} \cdot \eta_{2,i} \qquad M\eta = 2.1$$

Условные математические ожидания η

$$j := 1..2 \qquad T_j := \frac{\sum_{i=1}^{3} \xi\eta_{1,i+1} \cdot \xi\eta_{j+1,i+1}}{\sum_{i=1}^{3} \xi\eta_{j+1,i+1}}$$

$$M\eta\xi := \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \qquad M\eta\xi = \begin{bmatrix} 2.25 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Точечный график регрессии Mξη=f(y)



Видно, что условное математическое ожидание случайной величины ξ является функцией значений случайной величины η, т.е. $M(\xi/\eta = y) = f_1(y)$ и совершенно аналогично $M(\eta/\xi = x) = f_2(x)$.

Функцию $f_1(y)$ называют *регрессией случайной величины* ξ *на случайную величину* η, а $f_2(x)$ — *регрессией случайной величины* η *на случайную величину* ξ.

Формулы условных математических ожиданий для дискретных случайных величин естественным образом обобщаются на непрерывные

случайные величины. Если $p_{\xi,\eta}(x,y)$ — совместная плотность вероятностей двумерной случайной величины $(\xi,\ \eta)$, то

$$M(\xi/\eta=y)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp_{\xi,\eta}(x,y)\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx},\quad M(\eta/\xi=x)=\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} yp_{\xi,\eta}(x,y)\,dy}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dy}.$$

Рассмотрим непрерывный случайный вектор $(\xi,\ \eta)$ с плотностью распределения

$$p_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & x^2+y^2>1.\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy=1.$$

Найдем распределения компонент случайного вектора и их математические ожидания и условные математические ожидания:

$$p_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y),dy=\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1+x}{\pi}\,dy=\frac{2}{\pi}(x+1)\sqrt{1-x^2};$$

$$p_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y),dx=\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1+x}{\pi}\,dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2};$$

$$M\xi=\int\limits_{-1}^{1} x\frac{2}{\pi}(x+1)\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{4};$$

$$M\eta=\int\limits_{-1}^{1} y\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\,dy=0;$$

$$M(\xi/\eta=y)=\frac{\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\,\dfrac{1+x}{\pi}\,dx}{\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\dfrac{1+x}{\pi}\,dx}=\frac{1}{3}(1-y^2),\quad |y|\le 1;$$

$$M(\eta/\xi=x)=0.$$

В этом случае регрессия η на ξ равна нулю, а регрессия ξ на η описывается уравнением $M(\xi/\eta = y) = \frac{1}{3}(1 - y^2)$.

ЗАДАНИЕ 5.26

Вычислите условные математические ожидания и постройте графики регрессий компонентов двумерных случайных величин из заданий 5.14 и 5.15.

Порядок выполнения задания

1. Прочитайте файл, содержащий вычисление условных распределений в задании 5.14.
2. Удалите вычисление условных распределений.
3. Вычислите математические ожидания обеих компонент.
4. Вычислите условные математические ожидания каждой компоненты для всех значений другой компоненты.
5. Изобразите точечные графики регрессий.
6. Прочитайте файл, содержащий вычисление условных распределений в задании 5.15.
7. Вычислите условные математические ожидания каждой компоненты для всех значений другой компоненты.
8. Постройте графики регрессий.

Пример выполнения задания

Ниже приведен примерный вариант выполнения задания в среде Mathcad для дискретного случайного вектора, имеющего следующее распределение:

$\xi \backslash \eta$	3	5	10	11
1	0.01	0.01	0.17	0.011
7	0.1	0.2	0.1	0.2
8	0.02	0.05	0.09	0.04

ORIGIN := 1

Распределение двумерной случайной величины

$$\xi\eta := \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 10 & 11 \\ 1 & 0.01 & 0.01 & 0.17 & 0.01 \\ 7 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 8 & 0.02 & 0.05 & 0.09 & 0.04 \end{bmatrix}$$

Распределение случайной величины ξ

$$\text{submatrix}(\xi\eta, 2, 4, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$j := 1..3 \qquad tmp_j := \sum_{i=2}^{5} \xi\eta_{j+1,i} \qquad tmp = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\xi := \text{stack}\left(\text{submatrix}(\xi\eta, 2, 4, 1, 1)^T, tmp^T\right)$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Математическое ожидание ξ

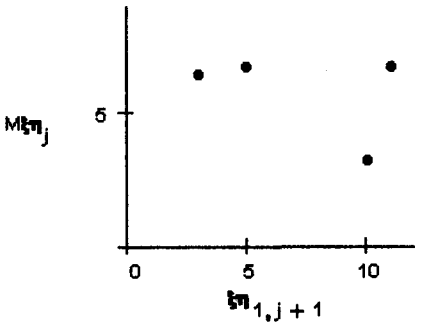
$$M\xi := \sum_{i=1}^{3} \xi_{1,i} \cdot \xi_{2,i} \qquad M\xi = 6$$

Условные математические ожидания ξ

$$j := 1..4 \qquad T_j := \frac{\sum_{i=1}^{2} \xi\eta_{i+1,1} \cdot \xi\eta_{i+1,j+1}}{\sum_{i=1}^{2} \xi\eta_{i+1,j+1}}$$

$$M\xi\eta := \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \qquad M\xi\eta = \begin{bmatrix} 6.455 \\ 6.714 \\ 3.222 \\ 6.714 \end{bmatrix}$$

Точечный график регрессии $M\xi\eta=f(y)$



Распределение случайной величины η

$$\text{submatrix}(\xi\eta, 1, 1, 2, 5) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$j := 1..4 \qquad tmp_j := \sum_{i=2}^{4} \xi\eta_{i,j+1} \qquad tmp = \begin{bmatrix} 0.13 \\ 0.26 \\ 0.36 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\eta := \text{stack}\left(\text{submatrix}(\xi\eta, 1, 1, 2, 5), tmp^T\right)$$

$$\eta = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 10 & 11 \\ 0.13 & 0.26 & 0.36 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Математическое ожидание η

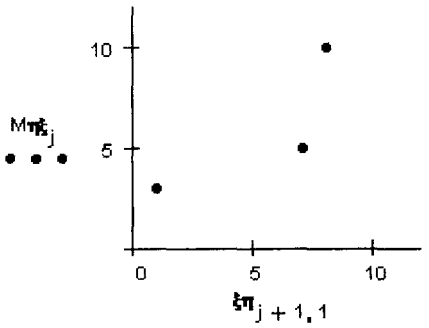
$$M\eta := \sum_{i=1}^{4} \eta_{1,i} \cdot \eta_{2,i} \qquad M\eta = 8.04$$

Условные математические ожидания η

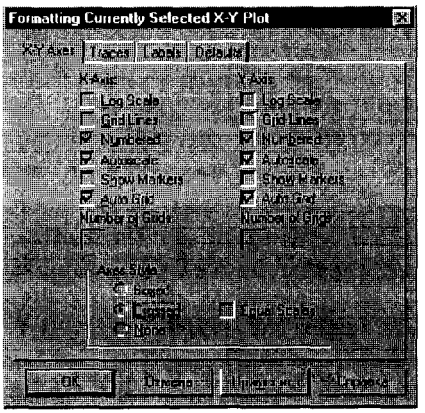
$$j := 1..3 \qquad T_j := \frac{\sum_{i=1}^{3} \xi\eta_{1,j+1} \cdot \xi\eta_{i+1,j+1}}{\sum_{i=1}^{3} \xi\eta_{i+1,j+1}}$$

$$\xi\eta := \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 10 & 11 \\ 1 & 0.01 & 0.01 & 0.17 & 0.01 \\ 7 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 8 & 0.02 & 0.05 & 0.09 & 0.04 \end{bmatrix} \qquad M\eta\xi := \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \qquad M\eta\xi = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Точечный график регрессии $M\xi\eta=f(y)$



Указание. После того как математическое ожидание компоненты вычислено, найдите ее условные математические ожидания и сохраните их в матрице. Для этого определите диапазон изменения номеров строк в матрице (в приведенном фрагменте — это диапазон от 1 до 4 для первой компонены и от 1 до 3 — для второй), затем вычислите условные математические ожидания каждой компоненты, определите размерность и введите элементы матрицы условных математических ожиданий и изобразите точечные графики функциональной зависимости условного математического ожидания одной компоненты от значений другой. На рис. 5.4 приведен вид окон настройки точечных графиков.



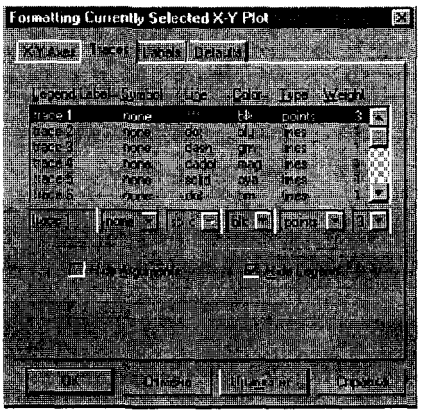


Рис. 5.4. Окна настройки параметров точечных графиков

Ниже приведен фрагмент рабочего документа, содержащий решение задачи для описанного выше непрерывного случайного вектора с

распределением

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{\pi}, & x^2+y^2 \le 1, \\ 0, & x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

$$p\xi\eta(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x+1}{\pi} & \text{if } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{if } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

$$i(x) := \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+1}{\pi}\,dy \qquad i(x) \to 2\cdot(x+1)\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

$$i1(y) := \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x+1}{\pi}\,dx$$

$$i1(y) \to \frac{-1}{2}\cdot\frac{\left(-1+y^2-2\cdot\sqrt{1-y^2}\right)}{\pi} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-1+y^2+2\cdot\sqrt{1-y^2}\right)}{\pi}$$

$$\frac{-1}{2}\cdot\frac{\left(-1+y^2-2\cdot\sqrt{1-y^2}\right)}{\pi} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-1+y^2+2\cdot\sqrt{1-y^2}\right)}{\pi} \qquad 2\cdot\frac{\sqrt{1-y^2}}{\pi}$$

$$i1(y) := 2\cdot\frac{\sqrt{1-y^2}}{\pi}$$

Распределение плотности вероятностей величины ξ

$$p\xi(x) := \begin{cases} i(x) & \text{if } |x| \le 1 \\ 0 & \text{if } |x| > 1 \end{cases}$$

Распределение плотности вероятностей величины η

$$p\eta(y) := \begin{cases} i1(y) & \text{if } |y| \le 1 \\ 0 & \text{if } |y| > 1 \end{cases}$$

Математическое ожидание ξ

$$M\xi := \int_{-1}^{1} x\cdot i(x)\,dx \qquad M\xi \to \frac{1}{4}$$

Математическое ожидание η

$$M\eta := \int_{-1}^{1} y\cdot i1(y)\,dy \qquad M\eta \to 0$$

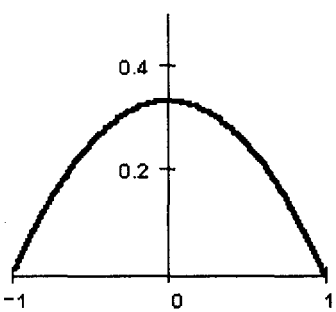
Условные математические ожидания ξ

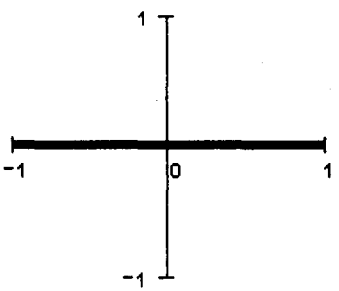
$$M\xi\eta(y) := \frac{\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\cdot\frac{x+1}{\pi}\,dx}{\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x+1}{\pi}\,dx}$$

Условные математические ожидания η

$$M\eta\xi(x) := \frac{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\cdot\frac{x+1}{\pi}\,dy}{\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+1}{\pi}\,dy}$$

$i := 1..100 \qquad t_i := -1 + i\cdot 0.02 \qquad X_i := M\xi\eta(t_i) \qquad Y_i := M\eta\xi(t_i)$





Ковариация

Если между случайными величинами ξ и η существует стохастическая связь, то одним из параметров, характеризующих меру этой связи, является *ковариация* $\mathbf{cov}(\xi,\eta)$. Ковариацию вычисляют по формулам:

$$\mathbf{cov}(\xi,\eta) = M\left[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\right] = M(\xi\eta) - M\xi\cdot M\eta.$$

Если случайные величины ξ и η *независимы*, то $\mathbf{cov}(\xi,\eta) = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно. Из равенства ковариации нулю не следует независимость случайных величин. Случайные величины могут быть зависимыми, в то время как их ковариация нулевая!

Но зато, *если ковариация случайных величин отлична от нуля, между ними существует стохастическая связь, мерой которой и является величина ковариации.*

Интересно отметить, что $\mathbf{cov}(\xi,\xi) = D\xi$ и $\mathbf{cov}(\eta,\eta) = D\eta$.

Кроме того, важны следующие свойства ковариации:

$\mathbf{cov}(\xi + C_1, \eta + C_2) = \mathbf{cov}(\xi, \eta)$;

$\mathbf{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{cov}(\eta, \xi)$;

$\mathbf{cov}(C_1\xi + C_2\eta, \zeta) = C_1\,\mathbf{cov}(\xi, \zeta) + C_2\,\mathbf{cov}(\eta, \zeta)$.

Ковариационной матрицей случайного вектора $(\xi,\ \eta)$ называется матрица вида

$$\mathbf{Cov}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \mathbf{cov}(\xi,\xi) & \mathbf{cov}(\xi,\eta) \\ \mathbf{cov}(\eta,\xi) & \mathbf{cov}(\eta,\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & \mathbf{cov}(\xi,\eta) \\ \mathbf{cov}(\eta,\xi) & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица симметрична и положительно определена. Ее определитель называется *обобщенной дисперсией* и может служить мерой рассеяния системы случайных величин $(\xi,\ \eta)$.

Как уже отмечалось ранее, дисперсия суммы *независимых* случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$. Если же случайные величины *зависимы*, то

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta \pm 2\,\mathbf{cov}(\xi, \eta).$$

Рассмотрим пример. Пусть дискретный случайный вектор $(\xi,\ \eta)$ имеет распределение

$\xi \diagdown \eta$	2	4
1	0.1	0.2
3	0.3	0.4

Ниже представлены вычисления в среде Mathcad ковариации его компонент и вычисление дисперсии их суммы по приведенной формуле и непосредственно. Видно, что, как и следовало ожидать, вычисленные разными способами значения дисперсии совпадают.

ORIGIN := 1

Распределение двумерной случайной величины

$$\xi\eta := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0.1 & 0.2 \\ 3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Распределение случайной величины ξ

$$\mathbf{submatrix}(\xi\eta, 2, 3, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$j := 1..2 \qquad tmp_j := \sum_{i=2}^{3} \xi\eta_{j+1,i} \qquad tmp = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\xi := stack\left(submatrix(\xi\eta, 2, 3, 1, 1)^T, tmp^T\right) \qquad \xi = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Математическое ожидание ξ $\quad M\xi := \sum_{i=1}^{2} \xi_{1,i} \cdot \xi_{2,i} \qquad M\xi = 2.4$

Распределение случайной величины η

$$submatrix(\xi\eta, 1, 1, 2, 3) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$j := 1..2 \qquad tmp_j := \sum_{i=2}^{3} \xi\eta_{i,j+1} \qquad tmp = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\eta := stack\left(submatrix(\xi\eta, 1, 1, 2, 3), tmp^T\right) \qquad \eta = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Математическое ожидание η

$$M\eta := \sum_{i=1}^{2} \eta_{1,i} \cdot \eta_{2,i} \qquad M\eta = 3.2$$

$$prod\xi\eta := \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 12 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \qquad Mprod\xi\eta := \sum_{i=1}^{4} prod\xi\eta_{1,i} \cdot prod\xi\eta_{2,i}$$

Ковариация ξη $\quad cov\xi\eta := Mprod\xi\eta - M\xi \cdot M\eta \qquad cov\xi\eta = -0.08$

Дисперсия ξ $\qquad$ **Дисперсия η**

$$D\xi := \sum_{i=1}^{2} \left(\xi_{1,i}\right)^2 \cdot \xi_{2,i} - M\xi^2 \qquad D\eta := \sum_{i=1}^{2} \left(\eta_{1,i}\right)^2 \cdot \eta_{2,i} - M\eta^2$$

$$D\xi = 0.84 \qquad D\eta = 0.96$$

Дисперсия ξ+η $\qquad D\xi + D\eta + 2\, cov\xi\eta = 1.64$

Распределение ξ+η $\quad sum\xi\eta := \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$

$$Msum\xi\eta := \sum_{i=1}^{3} sum\xi\eta_{1,i} \cdot sum\xi\eta_{2,i} \qquad Msum\xi\eta = 5.6$$

$$Dsum\xi\eta := \sum_{i=1}^{3} \left(sum\xi\eta_{1,i}\right)^2 \cdot sum\xi\eta_{2,i} - Msum\xi\eta^2 \qquad Dsum\xi\eta = 1.64$$

Указание. Для вычисления ковариации найдите распределение произведения компонент и его математическое ожидание. Дисперсию суммы вычислите двумя способами — через ковариацию и непосредственно. Для этого найдите дисперсии компонент, распределение суммы компонент и ее дисперсию.

ЗАДАНИЕ 5.27

Вычислите ковариацию и дисперсию компонент двумерных случайных величин из заданий 5.14 и 5.15.

Порядок выполнения задания

1. Прочитайте файл, содержащий вычисление условных распределений в задании 5.14.
2. Вычислите математические ожидания каждой компоненты.
3. Определите распределение произведения компонент.
4. Найдите математическое ожидание произведения компонент.
5. Вычислите ковариацию компонент.
6. Вычислите дисперсию суммы.
7. Определите распределение суммы компонент.
8. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы компонент.

Пример выполнения задания

Примерный вариант выполнения задания для двумерной случайной величины приведен выше.

Корреляция

Понятно, что значение ковариации зависит не только от "тесноты" связи случайных величин, но и от самих значений этих величин, например, от единиц измерения этих значений.

Для исключения этой зависимости вместо ковариации используется *коэффициент корреляции*

$$k_{\xi\eta} = \frac{\mathbf{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}.$$

Этот коэффициент обладает следующими свойствами:

- он безразмерен;
- его модуль не превосходит единицы, т.е. $|k_{\xi\eta}| \le 1$;
- если ξ и η независимы, то $k_{\xi\eta} = 0$ (обратное, вообще говоря, неверно!);
- если $|k_{\xi\eta}| = 1$, то случайные величины ξ и η связаны *функциональной зависимостью* вида $\eta = a\xi + b$, где a и b — некоторые числовые коэффициенты;
- $k_{\xi\xi} = k_{\eta\eta} = 1$.

Корреляционной матрицей случайного вектора называется матрица

$$K = \begin{pmatrix} 1 & k_{\xi\eta} \\ k_{\xi\eta} & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ и $\sigma_\eta = \sqrt{D\eta}$, то ковариационная и корреляционная матрицы случайного вектора $(\xi,\ \eta)$ связаны соотношением $\mathbf{Cov}(\xi,\eta) = \Sigma K \Sigma$, где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\xi & 0 \\ 0 & \sigma_\eta \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 5.28

Вычислите ковариационную и корреляционную матрицы двумерного случайного вектора из задания 5.14.

Порядок выполнения задания

1. Прочитайте файл, содержащий вычисление условных распределений в задании 5.27.
2. Определите и введите ковариационную матрицу.
3. Вычислите корреляционный коэффициент компонент случайного вектора.
4. Определите и введите корреляционную матрицу.
5. Определите и введите вспомогательную диагональную матрицу со среднеквадратичными отклонениями компонент на диагонали.
6. Вычислите корреляционную матрицу умножением ковариационной матрицы на вспомогательную.

Пример выполнения задания

Примерный вариант выполнения задания приведен ниже.

$$Cov\xi\eta := \begin{bmatrix} D\xi & cov\xi\eta \\ cov\xi\eta & D\eta \end{bmatrix} \qquad Cov\xi\eta = \begin{bmatrix} 0.84 & -0.08 \\ -0.08 & 0.96 \end{bmatrix}$$

$$k\xi\eta := \frac{cov\xi\eta}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} \qquad k\xi\eta = -0.089$$

$$K := \begin{bmatrix} 1 & k\xi\eta \\ k\xi\eta & 1 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 1 & -0.089 \\ -0.089 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma := \begin{bmatrix} \sqrt{D\xi} & 0 \\ 0 & \sqrt{D\eta} \end{bmatrix} \qquad \Sigma \cdot K \cdot \Sigma = \begin{bmatrix} 0.84 & -0.08 \\ -0.08 & 0.96 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим случайный вектор (ξ, η), имеющий нормальное распределение. В наиболее общем случае плотность вероятностей такого вектора зависит от пяти параметров — a_ξ, a_η, σ_ξ, σ_η, $k_{\xi\eta}$ — и имеет вид

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-k_{\xi\eta}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-k_{\xi\eta}^2)}\left[\left(\frac{x-a_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 2k_{\xi\eta}\frac{x-a_\xi}{\sigma_\xi}\cdot\frac{x-a_\eta}{\sigma_\eta} + \left(\frac{x-a_\eta}{\sigma_\eta}\right)^2\right]\right\}.$$

При любых значениях параметров a_ξ, a_η, σ_ξ, σ_η, $k_{\xi\eta}$ эта функция удовлетворяет условиям нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

Параметры a_ξ, a_η, σ_ξ, σ_η, $k_{\xi\eta}$ имеют простой теоретико-вероятностный смысл:

a_ξ — математическое ожидание случайной величины ξ, $M\xi = a_\xi$;

a_η — математическое ожидание случайной величины η, $M\eta = a_\eta$;

σ_ξ — среднеквадратичное отклонение случайной величины ξ, $D\xi = \sigma_\xi^2$;

σ_η — среднеквадратичное отклонение случайной величины η, $D\eta = \sigma_\eta^2$;

$k_{\xi\eta}$ — коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

Таким образом, зная плотность вероятностей двумерного нормального распределения, можно найти его числовые характеристики и построить ковариационную и корреляционную матрицы:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & k_{\xi\eta} \\ k_{\xi\eta} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Cov}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & \sigma_\xi\sigma_\eta k_{\xi\eta} \\ \sigma_\xi\sigma_\eta k_{\xi\eta} & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ 5.29

По заданной плотности вероятностей нормального двумерного распределения найдите нормировочный множитель, вычислите ковариационную и корреляционную матрицы.

Порядок выполнения задания

1. Определите плотность вероятностей двумерного нормального распределения как функцию переменных x, y.
2. Найдите нормировочный коэффициент и проверьте вычисления.
3. Определите новое выражение для плотности вероятностей двумерного нормального распределения.
4. Найдите плотность вероятностей, математическое ожидание и дисперсию каждой компоненты.
5. Найдите математическое ожидание произведения компонент.
6. Вычислите ковариацию компонент.
7. Вычислите коэффициент корреляции компонент.
8. Определите и введите ковариационную матрицу.
9. Определите и введите корреляционную матрицу.
10. Вычислите корреляционную матрицу другим способом.

Пример выполнения задания

Выполните задание для плотности вероятностей

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = A\exp\left[-(x^2 + 2x + 2xy + 6y + 4y^2)\right].$$

Ниже приведено решение задачи в среде Mathcad.

$$p\xi\eta(x,y) := A\cdot\exp(-(x^2 + 2\cdot x + 2\cdot x\cdot y + 6\cdot y + 4\cdot y^2))$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x^2+2\cdot x+2\cdot x\cdot y+6\cdot y+4\cdot y^2))\,dx\,dy \rightarrow \frac{1}{3}\cdot\exp\left(\frac{7}{3}\right)\cdot\pi\cdot\sqrt{3}$$

$$p\xi\eta(x,y) := \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\cdot\exp\left(\frac{7}{3}\right)\cdot\pi\cdot\sqrt{3}\right)}\cdot\exp\left(-\left(x^2+2\cdot x+2\cdot x\cdot y+6\cdot y+4\cdot y^2\right)\right)$$

$$A := \frac{1}{3}\cdot\exp\left(\frac{7}{3}\right)\cdot\pi\cdot\sqrt{3}$$

Плотность вероятностей, дисперсия и математическое ожидание ξ

$$p\xi(x) := \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\cdot\exp\left(\frac{7}{3}\right)\cdot\pi\cdot\sqrt{3}\right)}\cdot\exp\left(-\left(x^2+2\cdot x+2\cdot x\cdot y+6\cdot y+4\cdot y^2\right)\right)dy$$

Плотность вероятностей ξ $\quad p\xi(x) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\exp\left(\frac{-1}{12}-\frac{3}{4}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{3}$

Математическое ожидание ξ

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\exp\left(\frac{-1}{12}-\frac{3}{4}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{3}\right)dx \rightarrow \frac{-1}{3}$$

Дисперсия ξ

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\exp\left(\frac{-1}{12}-\frac{3}{4}\cdot x^2-\frac{1}{2}\cdot x\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{3}\right)dx-\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{2}{3}$$

$$M\xi := \frac{-1}{3} \qquad D\xi := \frac{2}{3}$$

Плотность вероятностей, дисперсия и математическое ожидание η

$$p\eta(y) := \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\cdot\exp\left(\frac{7}{3}\right)\cdot\pi\cdot\sqrt{3}\right)}\cdot\exp\left(-\left(x^2+2\cdot x+2\cdot x\cdot y+6\cdot y+4\cdot y^2\right)\right)dx$$

Плотность вероятностей η $\quad p\eta(y) \rightarrow \frac{\exp\left(\frac{-4}{3}-4\cdot y-3\cdot y^2\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{3}$

Математическое ожидание η

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot\left(\frac{\exp\left(\frac{-4}{3}-4\cdot y-3\cdot y^2\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{3}\right)dy \rightarrow \frac{-2}{3}$$

Дисперсия η

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2\cdot\left(\frac{\exp\left(\frac{-4}{3}-4\cdot y-3\cdot y^2\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{3}\right)dy-\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{6}$$

$$M\eta := \frac{-2}{3} \qquad D\eta := \frac{1}{6}$$

Математическое ожидание $\xi\eta$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot y\cdot\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\cdot\exp\left(\frac{7}{3}\right)\cdot\pi\cdot\sqrt{3}\right)}\cdot\exp\left(-\left(x^2+2\cdot x+2\cdot x\cdot y+6\cdot y+4\cdot y^2\right)\right)\right]dx\,dy \rightarrow \frac{1}{18}$$

$$M\xi\eta := \frac{1}{18} \qquad cov\xi\eta := M\xi\eta - M\xi\cdot M\eta \qquad cov\xi\eta = -0.167$$

$$k\xi\eta := \frac{cov\xi\eta}{\sqrt{D\xi\cdot D\eta}} \qquad k\xi\eta = -0.5$$

$$Cov\xi\eta := \begin{bmatrix} D\xi & k\xi\eta\cdot\sqrt{D\xi\cdot D\eta} \\ k\xi\eta\cdot\sqrt{D\xi\cdot D\eta} & D\eta \end{bmatrix} \qquad Cov\xi\eta = \begin{bmatrix} 0.667 & -0.167 \\ -0.167 & 0.167 \end{bmatrix}$$

$$K := \begin{bmatrix} 1 & k\xi\eta \\ k\xi\eta & 1 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma := \begin{bmatrix} \sqrt{D\xi} & 0 \\ 0 & \sqrt{D\eta} \end{bmatrix} \qquad \Sigma\cdot K\cdot\Sigma = \begin{bmatrix} 0.667 & -0.167 \\ -0.167 & 0.167 \end{bmatrix}$$

ГЛАВА 6

ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

6.1 ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ MATHCAD

Познакомимся с основными функциями Mathcad, предназначенными для решения задач математической статистики, а также с методами ввода данных для последующей статистической обработки. Попутно будут рассматриваться основные понятия математической статистики, постановка задач, алгоритмы и методы их решения.

Ввод и вывод файлов данных

При решении практических задач статистического анализа данных чаще всего приходится иметь дело с большими объемами исходной информации. Зачастую такие данные представляют собой заранее введенные в файл аппаратными средствами экспериментальные данные, подготовленные специальными приложениями и сохраненные в файле таблицы чисел. Ниже будет рассказано о том, как в Mathcad можно генерировать последовательности случайных чисел. Такие последовательности позволяют имитировать результаты реальных измерений той или иной случайной величины. При многократном использовании больших массивов данных их удобно хранить в файлах на диске.

Mathcad предоставляет пользователю специальные функции ввода данных из файла на диске и вывода данных в файл, т.е. функции доступа к файлам — READ, WRITE, APPEND, READPRN, WRITEPRN, APPENDPRN. Подробное описание этих функций и правила работы с ними можно найти в литературе по пакету, во встроенном в систему справочнике, в руководстве пользователя.

Познакомимся подробнее с функциями READ(file) и WRITE(file), предназначенными соответственно для чтения и записи числового значения. Файл данных для Mathcad — это файл чисел, записанных в формате ASCII, разделенных пробелом, запятой или символом конца строки. Числа могут быть целыми или с плавающей запятой, записанными с десятичной точкой или в экспоненциальной форме. При

обращении к файлу Mathcad по умолчанию обращается в ту папку (каталог, директорию), из которой загружался рабочий документ или в которую документ последний раз загружался. Однако можно работать с файлами из любых папок, указывая полное имя файла. В приведенных ниже примерах всегда будет указываться полное имя файла.

Функция READ(file) считывает значение из файла и присваивает его переменной. Поскольку чаще всего читаются массивы чисел, обращение к функции записывается следующим образом: x_i := READ(file).

Предположим, что на диске **c:** в папке **tmp** в файле с именем **data.txt** записаны 20 различных чисел, подготовленных текстовым процессором и сохраненных в указанном файле. Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, в котором этот файл прочитан*.

$i := 0..19$ $\qquad x_i := \mathrm{READ}(\text{"c:\tmp\data.txt"})$

$x^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	4.591	4.326	4.868	6.018	5.181	5.513	5.74	4.984	5.279

Указание. Поскольку в Mathcad массив — это вектор-столбец, запишите в рабочем документе x^T, чтобы вывести массив x в виде строки. Для того чтобы просмотреть все данные, щелкните по полю вывода элементов массива и просмотрите содержимое массива с помощью линеек прокрутки.

Функция WRITE(file) записывает в файл на диске числовое значение переменной. Поскольку, как правило, записываются массивы чисел, то чаще всего она указывается следующим образом: WRITE(file) := x_i. Если файла с указанным именем не существует, то он будет создан; если такой файл есть, то при записи предыдущая информация будет потеряна.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, в котором массив, сформированный в предыдущем фрагменте, записан в файл с именем **data1.txt** в папке **tmp** на диске **c:**, а затем (для проверки) прочитан и выведен в рабочий документ.

$i := 0..19$

$\mathrm{WRITE}(\text{"c:\tmp\data1.txt"}) := x_i \qquad y_i := \mathrm{READ}(\text{"c:\tmp\data1.txt"})$

$y^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	4.591	4.326	4.868	6.018	5.181	5.513	5.74	4.984	5.279

Указание. Здесь продемонстрирована работа двух функций доступа к файлам, позволяющих простейшим способом читать и записывать файлы. Для

*В приведенном фрагменте отображены первые восемь чисел.

того чтобы аккуратно работать с файлами, необходимо обязательно ознакомиться с полным описанием того, как с помощью этих функций происходит обращение к файлу.

Функции вычисления выборочных характеристик

Первичная обработка данных состоит обычно в отыскании максимального $x_{\max}$ и минимального $x_{\min}$ значений выборки, а также в построении вариационного ряда — массива выборочных значений, занумерованных (записанных) в порядке возрастания. Для выполнения этих вычислений в Mathcad предназначены соответственно функции $\mathsf{max}(A)$, $\mathsf{min}(A)$ и $\mathsf{sort}(A)$.

Кроме того, Mathcad имеет шесть функций, вычисляющих точечные оценки параметров распределения случайной величины. В последующих разделах главы даны все необходимые определения и описаны методы получения оценок. Здесь приведем только определения функций и правила обращения к ним.

Следующие четыре функции вычисляют числовые характеристики выборки, содержащейся в массиве A размерности $m \times n$.

Функция $\mathsf{mean}(A)$ вычисляет значение выборочного среднего:

$$\mathsf{mean}(A) = \frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} A_{ij}.$$

Функция $\mathsf{var}(A)$ вычисляет смещенную точечную оценку дисперсии, называемую *выборочной дисперсией**:

$$\mathsf{var}(A) = \frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(A_{ij} - \mathsf{mean}(A)\Big)^2.$$

Функция $\mathsf{stdev}(A)$ определяет среднеквадратичное отклонение, т.е. $\mathsf{stdev}(A) = \sqrt{\mathsf{var}(A)}$.

Функция $\mathsf{median}(A)$ вычисляет медиану — величину, меньше и больше которой в выборке содержится одинаковое количество элементов.

Еще две функции предназначены для вычисления числовых характеристик двумерного случайного вектора, выборочные значения двух

*Для комплексных выборочных значений выборочная дисперсия вычисляется по формуле

$$\mathsf{var}(A) = \frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\big|A_{ij} - \mathsf{mean}(A)\big|^2.$$

компонент которого расположены соответственно в массивах A и B размерности $m \times n$.

Функция $\mathrm{cvar}(A,B)$ вычисляет значение выборочной ковариации*:

$$\mathrm{cvar}(A,B) = \frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(A_{ij} - \mathrm{mean}(A)\Big)\Big(B_{ij} - \mathrm{mean}(B)\Big).$$

Функция $\mathrm{corr}(A,B)$ определяет коэффициент корреляции:

$$\mathrm{corr}(A,B) = \frac{\mathrm{cvar}(A,B)}{\sqrt{\mathrm{var}(A)}\,\sqrt{\mathrm{var}(B)}}.$$

Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, в котором выполнены следующие действия: прочитаны из файла на диске некоторые экспериментальные данные, а затем с помощью описанных выше функций вычислены числовые характеристики этих выборочных данных.

```
i := 0..19

x_i := READ("c:\tmp\datax.txt")        y_i := READ("c:\tmp\datay.txt")

Xmin := min(x)    Xmin = 3.72    Xmax := max(x)    Xmax = 8.048

Ymin := min(y)    Ymin = 3.72    Ymax := max(y)    Ymax = 8.048

x := sort(x)        y := sort(y)

Xmean := mean(x)    Xvar := var(x)    Xstdev := stdev(x)

Xmean = 5.026       Xvar = 0.888      Xstdev = 0.943

Ymean := mean(y)    Yvar := var(y)    Ystdev := stdev(y)

Ymean = 5.026       Yvar = 0.888      Ystdev = 0.943

covxy := cvar(x,y)    corrxy := corr(x,y)
```

*Для комплексных выборочных значений выборочная ковариация вычисляется по формуле

$$\mathrm{cvar}(A,B) = \frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(A_{ij} - \mathrm{mean}(A)\Big)\Big(\overline{B_{ij} - \mathrm{mean}(B)}\Big),$$

в которой горизонтальная черта — знак комплексно сопряженного числа.

covxy = 0.888 **corrxy = 1**

Указание. Выборочные данные прочитаны из файлов **datax.txt** и **datay.txt**, расположенных на диске **c:** в папке **tmp**, в массивы (переменные) соответственно x и y. Для экономии места прочитанные выборочные значения выведены в рабочий документ в виде строки.

Построение эмпирических распределений

Наиболее наглядной формой графического представления выборок является *гистограмма*. В Mathcad для построения гистограмм предназначена функция $\mathsf{hist}(\Delta, A)$. Для того чтобы построить гистограмму, нужно сначала сгруппировать выборочные данные, записанные в массиве A, и сохранить граничные точки интервалов группировки в векторе Δ, размерность которого равна числу интервалов. Результат вычислений функции $\mathsf{hist}(\Delta, A)$ — вектор, каждый элемент которого равен количеству выборочных значений, попадающих в соответствующий интервал группировки.

Размерность вектора $\mathsf{hist}(\Delta, A)$ совпадает с размерностью вектора Δ и равна числу интервалов группировки. Если $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ — длины интервалов группировки, а $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_m$ — их середины и $h_j = \frac{n_j}{n}$ — относительные частоты попадания наблюдений в j-й интервал группировки, то можно построить изображение ступенчатой функции $f(x) = \frac{h_j}{\delta_j}$, $x \in \Delta_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, в виде столбчатой диаграммы, которая называется *гистограммой*.

Используя функцию $\mathsf{hist}(\Delta, A)$, можно построить полигон частот — ломаную линию, соединяющую точки с абсциссами, равными серединам интервалов группировки, и ординатами, равными соответствующим частотам.

Другие способы графического представления выборок описаны в разд. 6.2.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий гистограммы и полигоны частот, построенные для выборок, описанных в приведенном выше фрагменте. Здесь же представлены точечные графики каждой выборки и точечный график выборки из двумерного случайного вектора, выборочные значения компонент которого находятся соответственно в массивах x и y.

i := 0 .. 19

x_i := READ("c:\tmp\datax.txt") **y_i := READ("c:\tmp\datay.txt")**

Xmin := min(x) **Xmin = 3.72** **Xmax := max(x)** **Xmax = 8.048**

$Ymin := min(y)$ $Ymin = 3.72$ $Ymax := max(y)$ $Ymax = 8.048$

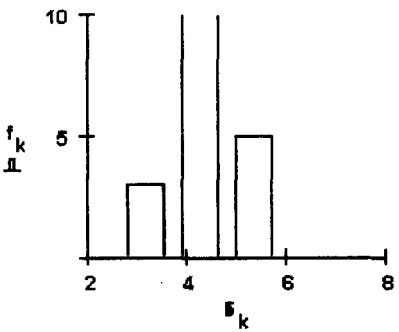
$x := sort(x)$ $y := sort(y)$

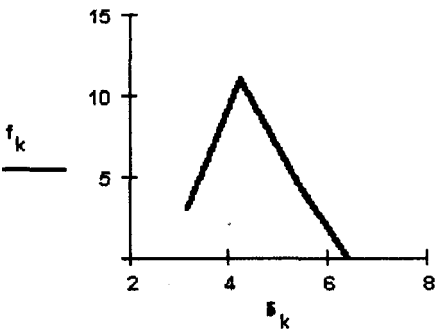
$Rx := Xmax - Xmin$ $Ry := Ymax - Ymin$ $n := 20$

$Rx = 4.328$ $Ry = 4.328$

$mx := 4$ $\Delta := \frac{Rx}{mx}$ $j := 0..mx$ $k := 0..mx - 1$

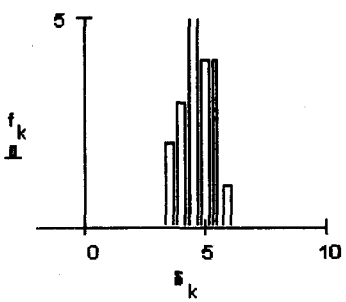
$\delta_j := Xmin + \frac{\Delta}{2}\cdot(2\cdot j - 1)$ $f := hist(\delta, x)$ $\Delta = 1.082$

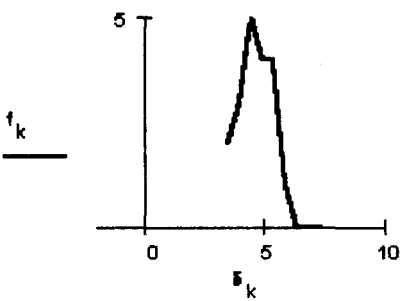


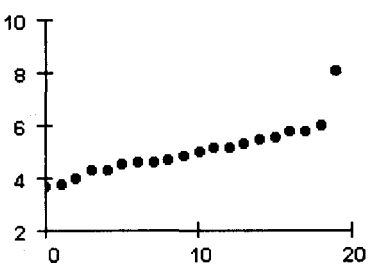


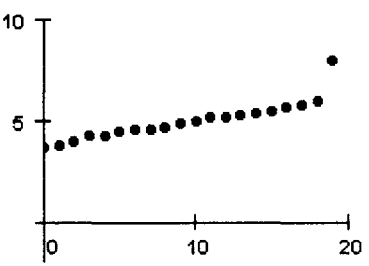
$my := 9$ $\Delta := \frac{Ry}{my}$ $j := 0..my$ $k := 0..my - 1$

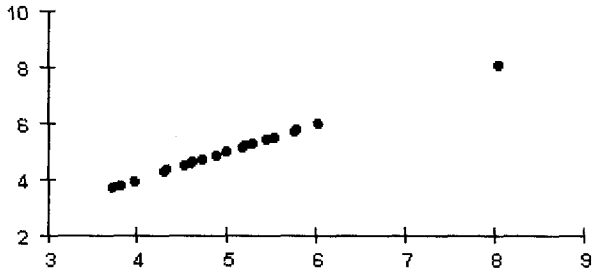
$\delta_j := Xmin + \frac{\Delta}{2}\cdot(2\cdot j - 1)$ $f := hist(\delta, y)$ $\Delta = 0.481$











Указание. Прежде чем приступать к группировке выборок, нужно их упорядочить с помощью функции sort. Перед обращением к функции hist следует вычислить середины интервалов группировки и присвоить их значения элементам массива x. На рис. 6.1 представлены окна настройки параметров изображения гистограмм и графиков.

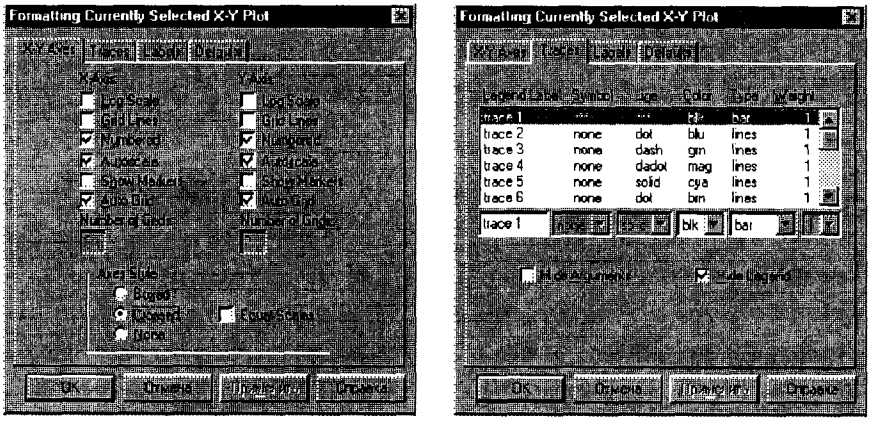


Рис. 6.1. Окна настройки графиков

Моделирование выборок из стандартных распределений

Mahtcad обладает богатой библиотекой встроенных функций, предназначенных для генерирования выборок из генеральных совокупностей с наиболее распространенными стандартными распределениями. Например, для генерации нормального распределения предназначена функция rnorm(k,μ,σ), значением которой является вектор, содержащий k выборочных значений нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $M\xi = \mu$ и дисперсией $D\xi = \sigma^2$.

Ниже приведен список функций Mathcad, генерирующих выборки:

- Бета-распределение: rbeta(k, s_1, s_2).
- Биномиальное распределение: rbinom(k,n,p).
- Распределение Коши: rcauchy(k,l,s).
- χ^2-распределение: rchisq(k,d).
- Экспоненциальное распределение: rexp(k,r).

- Распределение Фишера (F-распределение): rF(k,m,n).
- Гамма-распределение: rgamma(k,s).
- Геометрическое распределение: rgeom(k,p).
- Логнормальное распределение: rlnorm(k,μ,σ).
- Логистическое распределение: rlogis(k,l,s).
- Отрицательное биномиальное распределение: rnbinom(k,n,p).
- Нормальное распределение: rnorm(k,μ,σ).
- Распределение Пуассона: rpois(k,λ).
- Распределение Стьюдента: rt(k,d).
- Равномерное распределение: runif(k,a,b).
- Распределение Вейбулла: rweibull(k,s).

Выборка x, которая исследовалась в приведенных выше фрагментах, — выборка 20 значений из стандартного нормального распределения. Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий функции построения этой выборки и сохранения ее в файле **datx.txt** на диске **c:** в папке **tmp**.

```
x := rnorm(20,0,1)      i := 0..19      WRITE("c:\tmp\datx.txt") := x_i
```

6.2 ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ СТАТИСТИКИ. ВЫБОРКИ. ГИСТОГРАММЫ. ПОЛИГОНЫ ЧАСТОТ

Математическая статистика в основном занимается изучением случайных величин и случайных событий по результатам наблюдений. Ее главная задача — извлечь максимум информации из эмпирических данных.

Важнейшими понятиями математической статистики являются генеральная совокупность и выборка.

Генеральная совокупность — это вероятностное пространство с определенной на нем случайной величиной ξ. Функцию распределения этой случайной величины $F_\xi(x)$ часто называют *теоретической функцией распределения*, хотя более правильным представляется другой термин — *истинная функция распределения*, в отличие от эмпирической (экспериментальной, приближенной) функции распределения, которая будет определена ниже.

В результате проведения n экспериментов со случайной величиной ξ получаем n выборочных значений x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Вся совокупность этих значений называется *выборкой*.

Выборка — это, вообще говоря, случайный вектор: если в одной серии из n испытаний получена выборка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то в другой серии будет получена, скорее всего, другая выборка $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$.

Эмпирические распределения и числовые характеристики

Выборка из генеральной совокупности является основным источником информации о случайной величине. По выборке оценивается класс распределений, к которому принадлежит распределение исследуемой случайной величины, устанавливаются интервалы, в которых лежат истинные значения параметров распределения, проверяются гипотезы об этой случайной величине и формулируются выводы о других ее свойствах.

Чтобы использовать аппарат математической статистики, нужно прежде всего уметь находить некоторые числовые характеристики выборок и строить эмпирические распределения, с помощью которых в дальнейшем можно делать соответствующие выводы.

Рассмотрим некоторые правила предварительной обработки выборочных данных. Представленная ниже таблица выборки объема* $n = 250$ будет использоваться далее во всех вычислениях, а также станет источником построения выборок для индивидуальных вариантов заданий.

145.61	143.206	145.267	140.485	133.143	150.435	148.794	155.564	171.918
158.087	159.851	158.622	159.156	156.73	139.557	150.691	142.444	156.967
148.181	143.556	142.769	144.834	155.58	147.552	150.895	162.618	142.945
150.019	161.076	158.926	120.991	128.429	152.06	143.842	138.023	150.99
157.708	153.059	150.113	142.355	145.909	143.262	148.678	160.181	151.805
155.133	157.398	149.837	152.788	151.622	154.285	145.248	143.045	180.482
147.135	137.201	157.594	146.073	137.964	139.631	149.807	150.32	152.649
154.915	152.383	143.155	133.852	164.113	159.715	138.44	151.437	166.972
146.797	129.688	135.888	136.747	144.829	150.621	144.042	146.693	155.391
152.186	154.05	138.441	138.949	138.966	145.927	136.867	121.596	162.762
157.911	151.429	139.937	140.73	141.22	152.777	145.978	163.02	136.219
153.803	154.377	167.603	143.527	155.51	165.465	131.784	163.079	139.511
154.591	139.478	137.579	154.241	130.834	148.761	154.132	164.656	137.711
146.154	154.763	151.862	151.96	155.206	158.229	159.314	158.972	152.601
143.066	154.656	148.493	141.368	171.144	137.64	133.062	153.865	135.711

* *Объемом выборки* называют количество наблюдений или количество значений случайной величины.

145.891	158.742	144.311	140.903	141.323	160.971	139.771	137.484	156.247
142.623	155.409	156.641	155.196	151.459	149.488	153.16	152.488	148.294
145.475	152.937	151.507	140.659	157.925	157.163	160.438	158.11	156.17
147.549	149.142	156.848	157.911	153.578	147.887	148.445	151.36	158.639
169.584	150.688	155.646	155.572	168.911	164.788	127.059	156.623	145.593
145.263	150.889	143.012	153.472	141.25	169.001	122.741	158.702	171.791
160.849	161.757	140.286	134.241	154.64	164.744	161.654	142.365	155.094
154.96	141.977	143.729	144.466	146.54	145.355	152.509	146.266	147.269
162.895	151.941	170.865	134.377	150.79	154.205	166.274	156.198	132.828
136.274	173.96	157.332	149.975	141.54	139.826	133.692	139.462	161.159
159.455	157.597	139.385	145.867	166.069	150.237	146.685	145.436	153.969
154.961	149.211	150.83	154.224	142.28	148.655	135.371	152.018	166.807
140.923	157.864	148.745	138.823	157.239	152.912	141.182		

Первичная обработка данных состоит обычно в отыскании максимального $x_{\max}$ и минимального $x_{\min}$ значений выборки (в Mathcad они вычисляются соответственно функциями $\mathsf{max}(\xi)$ и $\mathsf{min}(\xi)$), а также размаха варьирования $R = x_{\max} - x_{\min}$. Для приведенной выше выборки эти величины равны: $x_{\max} = 180.482$, $x_{\min} = 120.991$, $R = 59.49$.

Следующий этап первичной обработки — группировка и ее графическое представление. Группировка выборки объема n состоит в следующем. Промежуток $[x_{\min}, x_{\max}]$ разбивают на m интервалов группировки (чаще всего одинаковой длины) и подсчитывают число n_j выборочных значений, которые попали в j-й интервал. Обычно выбирают $m = 7 - 20$. Теперь каждый интервал группировки $\Delta_j = (a_j, b_j)$ представлен своими левой a_j и правой b_j границами и числом n_j элементов выборки, принадлежащих ему. Каждый интервал удобно представлять не двумя границами, а одним числом — срединным значением.

Наиболее наглядная форма графического представления группировки — гистограмма.

Если δ_1, δ_2, ..., δ_m — длины интервалов группировки, а $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, ..., $\overline{x}_m$ — их середины и $h_j = \dfrac{n_j}{n}$ — относительные частоты попадания наблюдений в j-й интервал группировки, то можно построить график ступенчатой функции: $f(x) = \dfrac{h_j}{\delta_j}$, $x \in \Delta_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Этот график называется гистограммой. В Mathcad для построения гистограмм предназначена функция $\mathsf{hist}(\Delta, \xi)$.

Очевидно, что величина интервала группировки существенно влияет на вид гистограммы. При малой их ширине в каждый интервал попадает незначительное число наблюдений или даже не попадает ни одного, в результате гистограмма становится сильно "изрезанной" и

плохо передает основные особенности изучаемого распределения. Другая крайность — большие интервалы группировки; в этом случае скрадываются характерные черты распределения.

Иная форма графического представления группированных данных — полигон частот. *Полигон частот* — это ломаная линия, соединяющая точки с координатами $(\overline{x}_i, h_i)$, т.е. с абсциссами, равными серединам интервалов группировки, и ординатами, равными соответствующим частотам.

Можно также построить *полигон накопленных частот* — график ломаной, соединяющей точки с координатами $\left(b_j, \sum_{k=1}^{j} n_k\right)$ или $\left(b_j, \sum_{k=1}^{j} \frac{n_k}{n}\right)$, т.е. с абсциссами, равными правым границам интервалов группировки, и ординатами, равными соответствующим накопленным частотам или относительным накопленным частотам.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением $x_{\max}$, $x_{\min}$ и $R = x_{\max} - x_{\min}$ для исследуемой выборки, а также с гистограммами и полигонами частот для различных интервалов группировки.

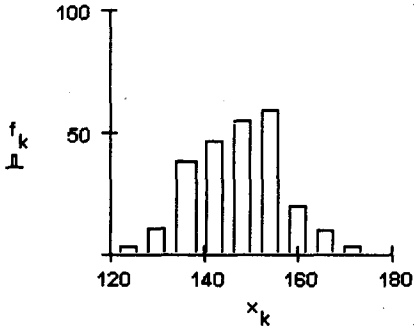
$\mathbf{ORIGIN} := 1$

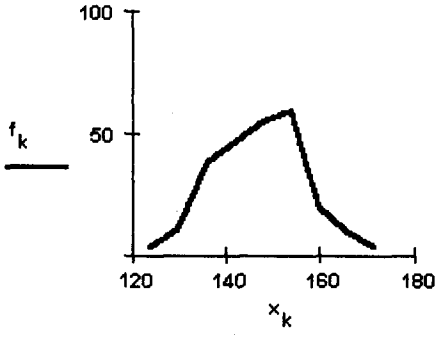
$\mathbf{xmax} := \mathbf{max}(\xi) \qquad \mathbf{xmin} := \mathbf{min}(\xi) \qquad \mathbf{R} := \mathbf{xmax} - \mathbf{xmin}$

$\mathbf{xmax} = 180.482 \qquad \mathbf{xmin} = 120.991 \qquad \mathbf{R} = 59.491 \qquad \mathbf{n} := 250$

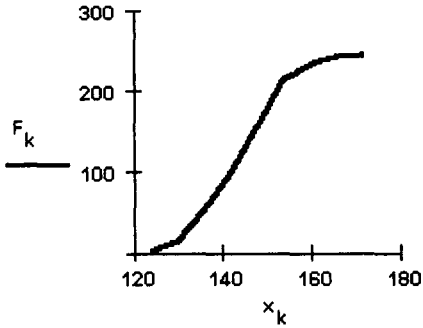
$\mathbf{m} := 10 \qquad \Delta := \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{m}} \qquad \mathbf{j} := 1..\mathbf{m} \qquad \mathbf{k} := 1..\mathbf{m} - 1$

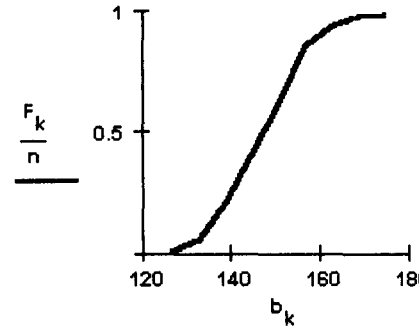
$\mathbf{x}_j := \mathbf{xmin} + \frac{\Delta}{2}\cdot(2\cdot\mathbf{j} - 1) \qquad \mathbf{f} := \mathbf{hist}(\mathbf{x}, \xi) \qquad \Delta = 5.949$





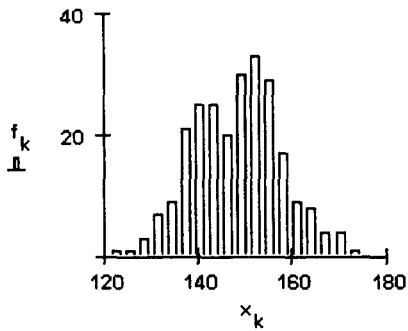
$a_j := xmin + \Delta \cdot (j - 1) \qquad b_j := a_j + \Delta \qquad F_k := \sum_{j=1}^{k} f_j$

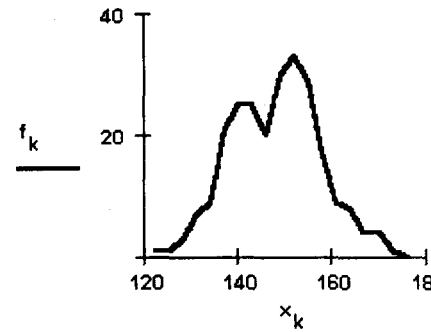




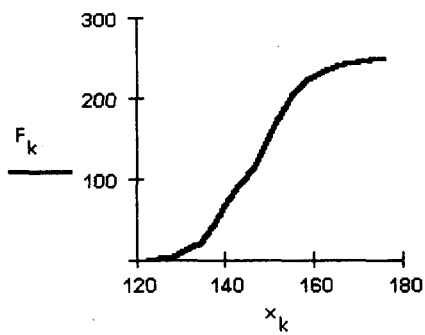
$m := 20 \qquad \Delta := \frac{R}{m} \qquad j := 1..m \qquad k := 1..m - 1$

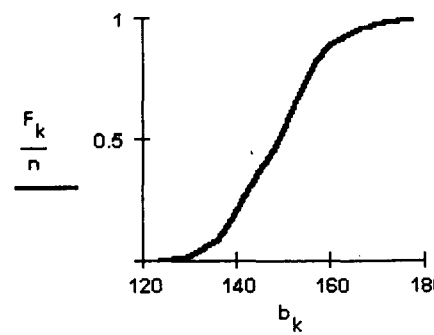
$x_j := xmin + \frac{\Delta}{2} \cdot (2 \cdot j - 1) \qquad f := hist(x, \xi) \qquad \Delta = 2.975$





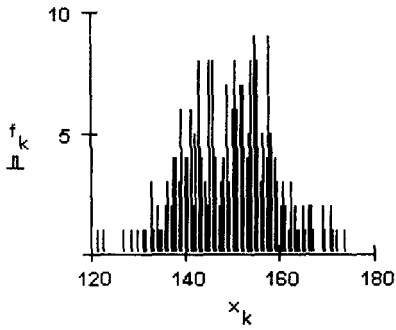
$a_j := xmin + \Delta \cdot (j - 1) \qquad b_j := a_j + \Delta \qquad F_k := \sum_{j=1}^{k} f_j$

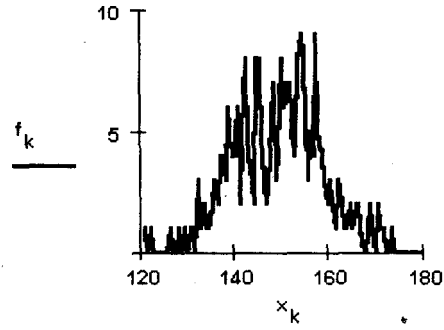




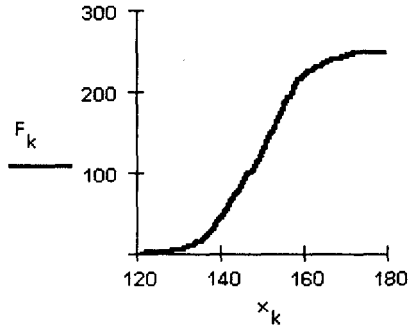
$m := 100 \qquad \Delta := \frac{R}{m} \qquad j := 1..m \qquad k := 1..m-1$

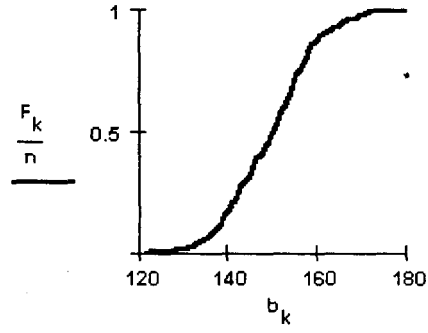
$x_j := xmin + \frac{\Delta}{2}\cdot(2\cdot j - 1) \qquad f := hist(x, \xi) \qquad \Delta = 0.595$



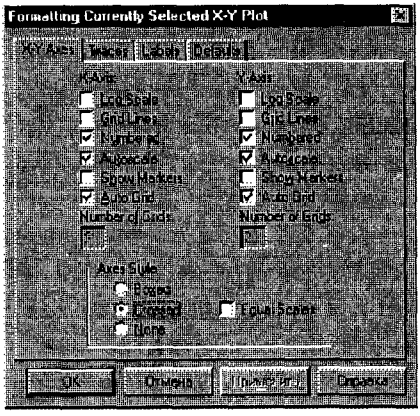


$a_j := xmin + \Delta\cdot(j-1) \qquad b_j := a_j + \Delta \qquad F_k := \sum_{j=1}^{k} f_j$





Указание. В приведенном фрагменте 250 выборочных значений сохранены в массиве с именем ξ. Прежде чем приступать к группировке выборки, необходимо упорядочить выборочные значения в порядке их возрастания. Эту операцию выполняет функция sort(ξ). Группировка производится с помощью функции hist(x,ξ), где x — массив, содержащий значения середин интервалов группировки. Прежде чем обратиться к функции hist(x,ξ), необходимо вычислить середины интервалов группировки и присвоить их значения элементам массива x. Значения функции hist(x,ξ) — вектор, компоненты которого равны количеству элементов массива ξ, которые попадают в интервал группировки, середина которого равна соответствующей компоненте массива x. На рис. 6.2 приведены окна настройки параметров изображения гистограмм.



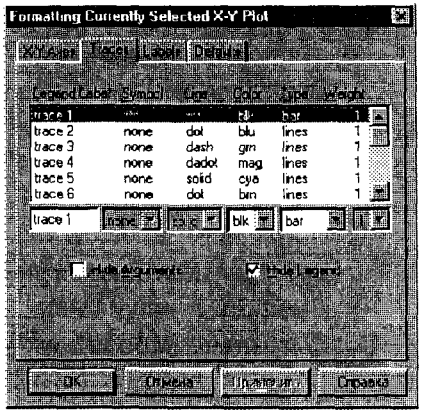


Рис. 6.2. Окна настройки графиков

При первичной обработке выборочных данных можно рекомендовать несколько общих правил:

1. Перед началом группировки следует упорядочить выборочные значения в порядке возрастания. Такая упорядоченная в порядке возрастания выборка называется *вариационным рядом.*
2. При выборе числа интервалов группировки следует ориентироваться на 10–20 интервалов.
3. Предпочтительнее использовать интервалы одинаковой длины.
4. При анализе охватывайте всю область данных.
5. Избегайте полуоткрытых промежутков.
6. Интервалы группировки не должны перекрываться.

ЗАДАНИЕ 6.1

Вычислите максимальное, минимальное значения и размах для заданной части приведенной выше выборки. Выполните группировку для заданных значений m, постройте соответствующие гистограммы, полигоны частот и полигоны накопленных частот.

Порядок выполнения задания

1. Определите и введите вектор-столбец выборочных значений.
2. Упорядочите выборку в порядке возрастания выборочных значений.
3. Вычислите минимальное значение и размах для полученной выборки.
4. Определите число интервалов группировки и их длину.

5. Определите вектор-столбец, содержащий середины интервалов группировки.
6. Определите с помощью функции $\mathsf{hist}(x, \xi)$ вектор-столбец частот для полученных интервалов группировки.
7. Определите вектор-столбец накопленных частот.
8. Постройте гистограмму, полигон частот.
9. Постройте полигон накопленных частот и полигон относительных накопленных частот.
10. Выполните вычисления пп. 6–9 для всех заданных значений m.
11. Сохраните рабочий документ в файле на диске.

Пример выполнения задания

Примерный вариант выполнения задания для всей выборки для $m = 10, 20, 100$ приведен выше.

Числовые характеристики выборки

Показатели положения. Среднее значение выборки вычисляется по формуле

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

В Mathcad для вычисления выборочного среднего значения выборки, сохраненной в матрице A, предназначена функция $\mathsf{mean}(A)$.

Выборочной квантилью уровня p называется решение уравнения

$$F_n(x) = p,$$

где $F_n(x)$ — выборочная функция распределения.

В частности, *выборочная медиана* есть решение уравнения $F_n(x) = 0.5$, т.е. выборочная медиана — это выборочная квантиль уровня 0.5. Выборочная медиана разбивает выборку пополам: слева и справа от нее оказывается одинаковое число элементов выборки. Если число элементов выборки четно, $n = 2k$, то выборочную медиану определяют по формуле $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$, где x_k и x_{k+1} — k-е и $(k+1)$-е выборочные значения из вариационного ряда. При нечетном объеме выборки $(n = 2k + 1)$ в качестве значения медианы принимают величину x_{k+1}.

В Mathcad для вычисления выборочной медианы выборки, сохраненной в матрице A, предназначена функция $\mathsf{median}(\mathsf{A})$.

К показателям положения относятся минимальный и максимальный элементы выборки, а также верхняя и нижняя квартили (они ограничивают зону, в которой сосредоточены 50 % элементов выборки).

Для вычисления минимального и максимального элементов выборки, размещенной в матрице A, в Mathcad предназначены соответственно функции $\mathsf{min}(A)$ и $\mathsf{max}(A)$.

Показатели разброса. К показателям разброса относятся дисперсия выборки (выборочная дисперсия), стандартное отклонение, размах выборки, межквартильный размах, коэффициент эксцесса (выборочный эксцесс).

Выборочной дисперсией называется величина

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.$$

Однако в статистике чаще в качестве выборочной дисперсии используется величина

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.$$

Причина такого, на первый взгляд неожиданного, способа вычисления дисперсии будет объяснена в разд. 6.3.

В Mathcad для определения дисперсии выборки, сохраненной в матрице A, предназначена функция $\mathsf{var}(A)$, а величину s^2 можно вычислить по формуле $s^2=\frac{n}{n-1}\mathsf{var}(A)$.

Стандартное отклонение рассчитывается по формуле $\widehat{\sigma}=\sqrt{s^2}$.

Размах выборки вычисляется по формуле $R=x_{\max}-x_{\min}$.

Межквартильный размах равен $x_{0.75}-x_{0.25}$, где $x_{0.75}$ — 75 %-ная квартиль, решение уравнения $F_n(x_{0.75})=0.75$, $x_{0.25}$ — 25 %-ная квартиль, решение уравнения $F_n(x_{0.25})=0.25$.

Выборочный эксцесс определяется следующим образом. Сначала отыскивается величина выборочного центрального момента 4-го порядка

$$\widehat{\mu}_4=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^4.$$

А затем по формуле $\widehat{E}=\widehat{\mu}_4(s^2)^{-2}-3$ вычисляется выборочный эксцесс.

Показатели асимметрии. На основании этих показателей изучают информацию о симметрии распределения выборочных данных около центра выборки. Сюда в первую очередь относится коэффициент асимметрии, который вычисляется по формуле

$$\widehat{a}=\frac{\widehat{\mu}_3}{\widehat{\sigma}^3},$$

где $\widehat{\mu}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3$ — выборочный центральный момент 3-го порядка, а $\widehat{\sigma}$ — стандартное отклонение, формула для вычисления которого приведена выше.

ЗАДАНИЕ 6.2

Для выборки, сформированной в предыдущем задании, вычислите все описанные выше выборочные характеристики.

Порядок выполнения задания

1. Прочтите сохраненный ранее файл, содержащий выборку.
2. Вычислите максимальный и минимальный элементы и размах выборки.
3. Рассчитайте выборочное среднее.
4. Найдите медиану.
5. Вычислите выборочную дисперсию и стандартное отклонение.
6. Найдите выборочные моменты 3-го и 4-го порядков.
7. Вычислите выборочный эксцесс.
8. Определите коэффициент асимметрии.

Пример выполнения задания

Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление характеристик выборочных данных, приведенных в начале раздела.

$$n := 250$$

$$xmax := \max(\xi) \qquad xmin := \min(\xi) \qquad R := xmax - xmin$$

$$xmax = 180.482 \qquad xmin = 120.991 \qquad R = 59.49$$

$$mean := mean(\xi) \qquad s2 := \frac{n}{n-1}\cdot var(\xi) \qquad \sigma := \sqrt{s2}$$

$$mean = 149.849 \qquad s2 = 98.174 \qquad \sigma = 9.908$$

$$\mu 3 := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - mean\right)^3 \qquad \mu 4 := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - mean\right)^4$$

$$\text{median} := \text{median}(\xi) \qquad E := \frac{\mu 4}{s2^2} - 3 \qquad \alpha := \frac{\mu 3}{\sigma^3}$$

$$\text{median} = 150.69 \qquad E = 0.136 \qquad \alpha = -0.055$$

Указание. В Mathcad нет встроенных функций для вычисления выборочных моментов. Для определения среднеквадратичного отклонения в Mathcad предназначена функция $\text{stdev}(A) = \sqrt{\text{var}(A)}$. Рассчитываемое с ее помощью значение среднеквадратичного отклонения отлично от определенного выше, поэтому среднеквадратичное отклонение следует вычислять как $\sqrt{s^2}$.

Оценка функции распределения

Как уже упоминалось ранее, распределение случайной величины является ее "паспортом", содержащим всю информацию о случайной величине.

Рассмотрим методы оценивания функции распределения $F_\xi(x)$ случайной величины, о которой известно, что она непрерывна.

Пусть $\widehat{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — совокупность выборочных значений случайной величины ξ, т.е. выборка из случайной величины ξ. Расположим наблюдения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в порядке их возрастания. Обозначим новую упорядоченную последовательность — вариационный ряд* — $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_n$. По этому вариационному ряду построим следующую неубывающую ступенчатую функцию:

$$\widehat{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le x'_1, \\ \dfrac{k-1}{n}, & x'_{k-1} < x \le x'_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \\ 1, & x > x'_n. \end{cases}$$

Из приведенной выше формулы видно, что функция $\widehat{F}_n(x)$ претерпевает в каждой точке вариационного ряда скачок, равный по величине $1/n$. Если какая-нибудь точка вариационного ряда повторяется m раз (m точек вариационного ряда совпадают), то скачок функции $\widehat{F}_n(x)$ в этой точке равен m/n.

Функция $\widehat{F}_n(x)$ называется *эмпирической функцией распределения.*

Замечание. Эмпирическая функция распределения $\widehat{F}_n(x)$ зависит не только от x, но и от всей выборки $\widehat{x}$. Чтобы обратить внимание на этот факт, будем обозначать эмпирическую функцию распределения через $F_n(x, \widehat{x})$. Именно $F_n(x, \widehat{x})$ принимают за оценку теоретической функции распределения $F(x)$.

*Напомним, что *вариационным рядом* называется упорядоченная совокупность выборочных значений.

Остается выяснить, насколько хорошо эмпирическая функция распределения аппроксимирует теоретическую функцию распределения.

Если $F_\xi(x)$ — теоретическая функция распределения, а $F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по заданной выборке $\widehat{x}$ значений случайной величины ξ, то в качестве меры расхождения теоретической и эмпирической функций распределения возьмем величину

$$D_n(\widehat{x}) = \sup_x |F_n(x) - F_\xi(x)|.$$

Эта функция от выборочных значений x называется *статистикой Колмогорова*. Следует помнить, что $D_n(\widehat{x})$ — случайная величина и что ее распределение не зависит от неизвестной теоретической функции распределения $F_\xi(x)$, если она непрерывна. Более того, справедлива теорема Колмогорова: если функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ непрерывна, а $\widehat{F}_n(x)$ — ее выборочная функция распределения, то при $n \to \infty$

$$P\Big(\sup_x |\widehat{F}_n(x) - F_\xi(x)| < \frac{z}{\sqrt{n}}\Big) \to K(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}, & z > 0. \end{cases}$$

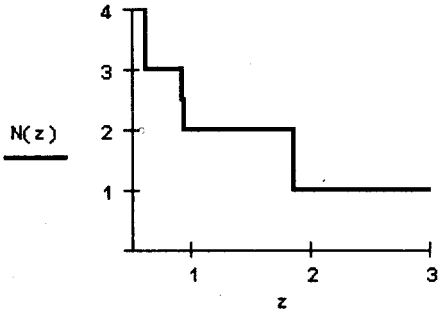
Функция $K(z)$ представляет собой функциональный ряд, который следует протабулировать. Сразу обратим внимание на то, что этот ряд сходится абсолютно для всех $z > 0$, но неравномерно на промежутке $[0, +\infty]$. Это означает, что для достижения заданной точности при вычислении $K(z)$ число N членов в соответствующей частичной сумме зависит от z. Если ε — требуемая точность вычисления $K(z)$, то число N вычисляется по формуле

$$N = \left[\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\varepsilon}}\right] + 1,$$

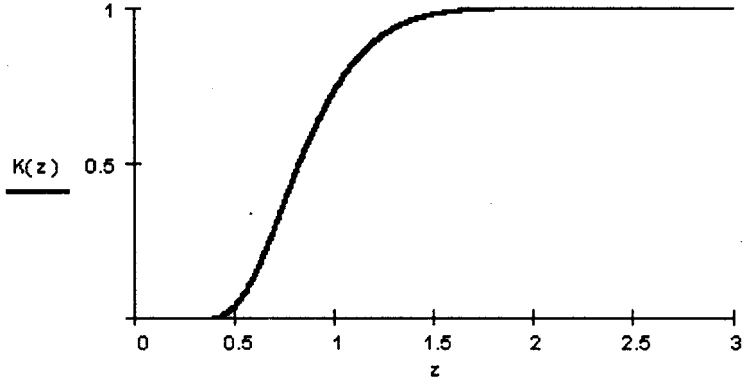
где символом [ ] обозначена целая часть числа.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий приближенное определение функции $K(z)$ для $\varepsilon = 0.001$, $N = 3$, и соответствующие графики.

$$\varepsilon := 0.001 \qquad N(z) := \mathrm{floor}\left(\frac{1}{z}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right) + 1$$



$$N := 3 \qquad K(z) := \begin{cases} 0 & \text{if } z \le 0 \\ \sum_{k=-N}^{N} (-1)^k \cdot \exp(-2 \cdot k^2 \cdot z^2) & \text{if } z > 0 \end{cases}$$



Из приведенных в документе графиков видно, что для малых z величину $K(z)$ можно положить равной нулю, а для $z > 2$ можно считать $K(z)$ равной единице.

Зададимся вероятностью α такой, что событие, происходящее с вероятностью $1-\alpha$, представляется практически достоверным. Вычислим корень z_α уравнения $1 - K(z) = \alpha$, тогда неравенство

$$\widehat{F}_n(x) - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} < F_\xi(x) < \widehat{F}_n(x) + \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$$

выполняется для всех действительных x с вероятностью, близкой к $1-\alpha$.

Таким образом, в окрестности эмпирической функции распределения построен "коридор", в котором лежит истинная, теоретическая функция распределения $F_\xi(x)$. С ростом n "ширина" этого коридора стремится к нулю.

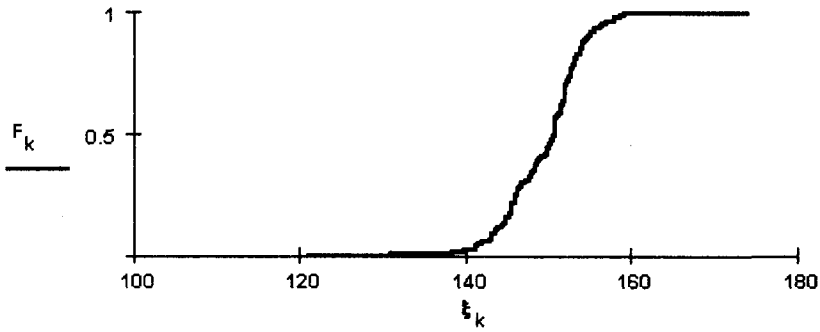
Вместо эмпирической функции распределения будем использовать функцию накопленных относительных частот, поскольку $\widehat{F}_n(x) = F_k$ для $x \in (\xi_{k-1}, \xi_k]$ и значения функций совпадают вне промежутка $[x_{\min}, x_{\max}]$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad с построением 95%-ного "коридора" для функции распределения случайной величины по приведенной выборке.

$$m := 250 \qquad \Delta := \frac{R}{m} \qquad j := 1..m \qquad k := 1..m-1$$

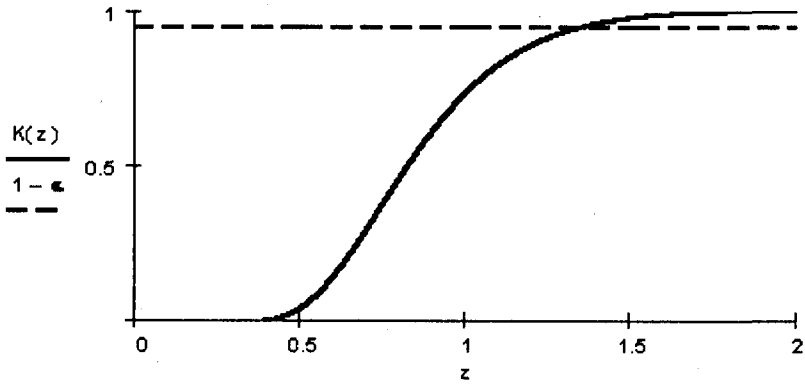
$$x_j := xmin + \frac{\Delta}{2}\cdot(2\cdot j - 1) \qquad f := hist(x, \xi) \qquad \Delta = 0.238$$

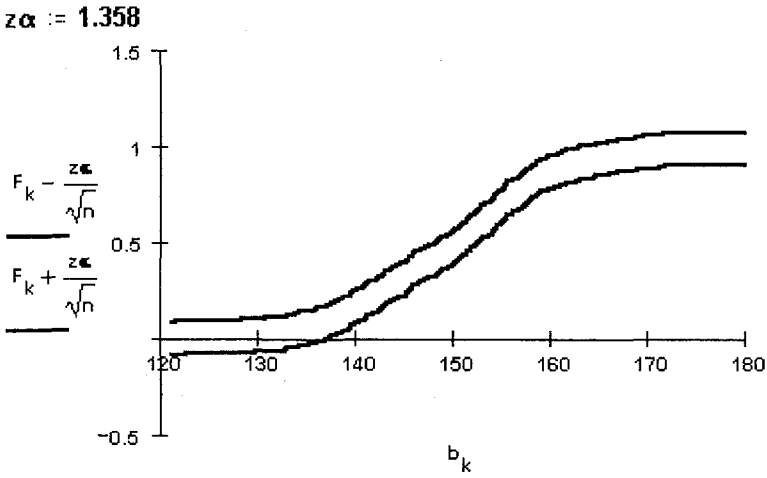
$$a_j := xmin + \Delta\cdot(j-1) \qquad b_j := a_j + \Delta \qquad F_k := \sum_{j=1}^{k} \frac{f_j}{n}$$



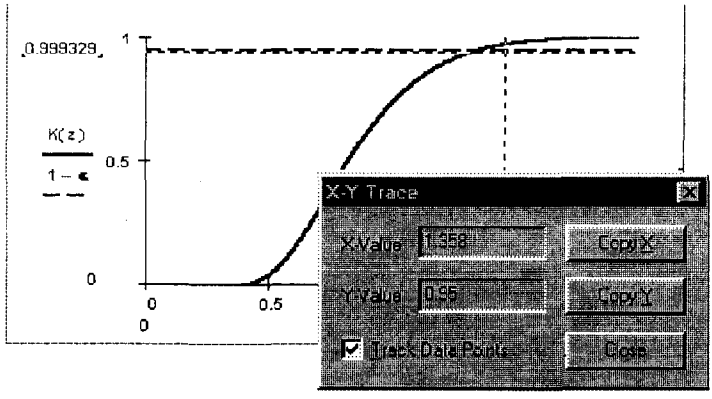
$$\alpha := 0.05 \qquad K(z) := \begin{cases} 0 & \text{if } z \le 0 \\ \sum_{k=-3}^{3} (-1)^k\cdot\exp(-2\cdot k^2\cdot z^2) & \text{if } z > 0 \end{cases}$$

$$p := 1 - \alpha$$





Указание. Как уже отмечалось выше, в качестве эмпирической функции распределения использована эмпирическая функция накопленных частот. Заметим, что Mathcad вместо графика ступенчатой функции строит ломаную линию, соединяя "ступеньки" вертикальными отрезками прямых. Корень уравнения $1 - K(z) = \alpha$ проще всего найти графически, используя операцию **Trace** пункта **Graph** меню **Format** (см. разд. 1.8) как точку пересечения графика $K(z)$ и прямой $y = 1 - \alpha$. Ниже приведен фрагмент окна Mathcad с окном отображения координат точки пересечения.



Для оценки плотности распределения случайной величины можно воспользоваться полигоном частот, который представлен выше. При не очень обременительных ограничениях доказано, что выборочная плотность вероятностей, т.е. полигон частот, с ростом объема выборки до бесконечности стремится к истинной, теоретической, плотности распределения исследуемой случайной величины.

ЗАДАНИЕ 6.3

Постройте для выборки, сформированной в задании 6.1, 95 %-ный "коридор" для функции распределения исследуемой случайной величины.

Порядок выполнения задания

1. Прочитайте файл, сохраненный при выполнении задания 6.1.
2. Определите статистику Колмогорова — функцию $K(z)$ и постройте ее график.
3. Определите значение величины α.
4. Решите графически уравнение $1 - K(z) = \alpha$.
5. Постройте "коридор" для теоретической функции распределения.

Пример выполнения задания

Пример построения 95 %-ного "коридора" функции распределения для исследуемой во всех примерах этого раздела выборки 250 значений случайной величины приведен выше.

При анализе статистических данных большую роль играет опыт и интуиция исследователя. В этой связи чрезвычайно полезными представляются следующие упражнения. Пользователь генерирует достаточно большую выборку значений случайной величины, имеющей известное непрерывное распределение с известными параметрами. А затем производит описанные выше вычисления, изменяя параметры задачи — объем выборки, количество интервалов группировки, доверительные вероятности и др., и сравнивает полученные оценки с известными теоретическими значениями. Здесь прежде всего полезно изучить равномерное и нормальное распределения. Приведенное ниже задание 6.4 заключается в решении именно такой задачи — исследование выборки значений случайной величины с заданным распределением.

Напомним, что исследованная во всех примерах раздела выборка представляет собой сгенерированную функцией Mathcad rnorm выборку 250 значений случайной величины, имеющей нормальное распределение $N(150, 10)$. Следовательно, внимательный читатель может не затрудняться ручным вводом выборки для индивидуального варианта задания, а просто аккуратно сгенерировать ее.

ЗАДАНИЕ 6.4

Сгенерируйте выборку значений случайной величины с заданным непрерывным распределением и выполните ее полный предварительный анализ для указанных значений объема выборки, числа интервалов группировки и доверительной вероятности. Постройте графики плотности вероятностей и функции распределения и сравните их с полученными графиками соответствующих выборочных функций.

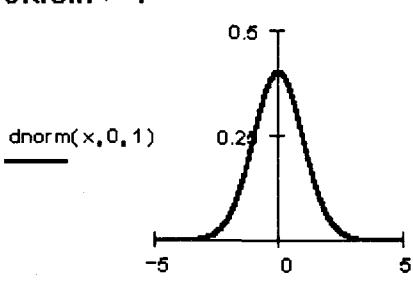
Порядок выполнения задания

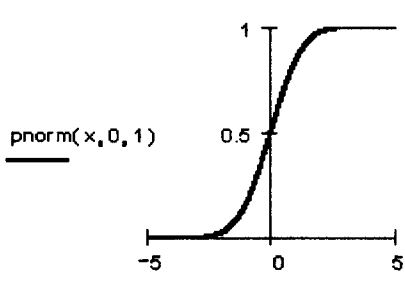
1. Установите в меню **Math** режим **Optimization**.
2. Присвойте переменной n значение, равное 100.
3. Постройте для заданного распределения графики плотности вероятностей и функции распределения.
4. Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратичное отклонение, медиану, моменты 3- и 4-го порядка, асимметрию и эксцесс заданного распределения (см. гл. 6).
5. Сгенерируйте выборку объема n значений случайной величины, имеющей заданное распределение.
6. Определите как функции переменной n и найдите выборочные значения среднего, среднеквадратичного отклонения, моментов 3- и 4-го порядка, асимметрии и эксцесса.
7. Постройте гистограмму, полигон частот, график накопленных относительных частот.
8. Постройте 95 %-ный "коридор" для теоретической функции распределения и изобразите на этом же графике функцию заданного в условии распределения вероятностей.
9. Сравните вычисленные теоретические и выборочные значения параметров.
10. Выполните вычисления пп. 4–7 для n = 150, 200, 300, 500.

Пример выполнения задания

Ниже приведен пример выполнения задания для стандартного нормального распределения $N(0,1)$.

ORIGIN := 1





Mξ := 0 **Dξ := 1** **σξ := 1** **μ2ξ := 1** **μ3ξ := 0**

$$\mu 4\xi := 2\cdot\int_0^{\infty} x^4\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)dx \qquad \mu 4\xi = 3$$

$\beta\xi := \dfrac{\mu 3\xi}{\mu 2\xi^{\frac{3}{2}}}$ $\quad \beta\xi = 0$ $\quad \gamma\xi := \dfrac{\mu 4\xi}{\mu 2\xi^2} - 3$ $\quad \gamma\xi = 0$

median := qnorm(0.5,0,1) median = 0

6.3 ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Предположим, что функция распределения случайной величины ξ зависит от неизвестного параметра θ: $P(\xi < x) = F_\xi(x;\theta)$.

Если x_1, x_2, ..., x_n — выборка из генеральной совокупности случайной величины ξ, то оценкой $\widehat{\theta}$ параметра θ называется произвольная функция от выборочных значений* $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Конечно, используемые на практике оценки $\widehat{\theta}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — не совсем произвольные функции: они обладают рядом свойств, которые обеспечивают в некотором смысле оптимальное извлечение информации из выборок. Обсудим эти свойства более подробно.

Точечные оценки математического ожидания

Прежде всего заметим, что значение оценки $\widehat{\theta}$ меняется от выборки к выборке и, значит, $\widehat{\theta}$ есть случайная величина. Естественно потребовать, чтобы значения этой случайной величины в большинстве экспериментов были близки к значению оцениваемого параметра. Этого можно достигнуть, если для любого значения n математическое ожидание величины $\widehat{\theta}_n$ равно истинному (теоретическому) значению параметра $\widehat{\theta}$: $M\widehat{\theta}_n = \theta$.

Оценки $\widehat{\theta}_n$, удовлетворяющие условию $M\widehat{\theta}_n = \theta$, называются *несмещенными*. Несмещенность оценки означает, что эта оценка не несет в себе систематической ошибки.

Еще одно важное свойство, которым должны обладать оценки, — состоятельность. Оценка $\widehat{\theta}_n$ называется *состоятельной* оценкой параметра θ, если для любого $\varepsilon > 0$ справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(|\widehat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\right) = 1$.

Поясним смысл последнего равенства. Пусть $\varepsilon > 0$ — как угодно малое положительное число. Тогда с ростом n растет наша уверенность в том, что значение оценки $\widehat{\theta}_n$ отличается от истинного значения параметра θ не более чем на величину ε. Таким образом, определение

*Функции от выборочных значений часто называют *статистиками*.

состоятельной оценки находится в полном соответствии со здравым смыслом: с ростом объема выборки увеличивается точность результата! Правда, здесь приходится отойти от традиционного понятия точности: нет гарантии, что $|\widehat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon$, однако утверждается, что начиная с некоторого n событие $|\widehat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon$ становится практически достоверным.

Вообще говоря, для оценки одного и того же параметра можно придумать много различных несмещенных и состоятельных оценок. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка из генеральной совокупности, соответствующей случайной величине ξ с неизвестным математическим ожиданием $M\xi = \theta$ и известной дисперсией $D\xi = \sigma^2$. Построим несколько оценок неизвестного параметра $M\xi = \theta$.

Например, если $\widehat{\theta}_n^{(1)} = x_1$, то* $M\widehat{\theta}_n^{(1)} = M\xi = \theta = x_1$, т.е. рассматриваемая оценка является *несмещенной оценкой*. Но, поскольку значение $\widehat{\theta}_n^{(1)} = x_1$ вообще не зависит от объема выборки n, то оценка $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ не является *состоятельной*.

Рассмотрим другую оценку:

$$\widehat{\theta}_n^{(2)} = \frac{x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n}{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Найдем** $M\widehat{\theta}_n^{(2)}$:

$$M\widehat{\theta}_n^{(2)} = M\left(\frac{\xi_1 + 2\xi_2 + \ldots + n\xi_n}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \cdot \theta(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{2\theta}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \theta,$$

т.е. имеем несмещенную оценку. Проверим ее состоятельность.

$$D\widehat{\theta}_n^{(2)} = D\left(\frac{\xi_1 + 2\xi_2 + \ldots + n\xi_n}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sigma^2(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) =$$

$$= \frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}\sigma^2.$$

*При вычислении математического ожидания выборочное значение x_1 заменено случайной величиной ξ.

**Здесь выборочные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заменены случайными величинами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; они независимы и имеют одинаковые распределения с параметрами $M\xi = \theta$ и $D\xi = \sigma^2$.

Поскольку $D\widehat{\theta}_n^{(2)} \to 0$ при $n \to \infty$, то, согласно закону больших чисел, для $\varepsilon > 0$ справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(|\widehat{\theta}_n^{(2)} - \theta| < \varepsilon\right) = 1$, т.е. имеем состоятельную оценку.

Рассмотрим еще одну оценку неизвестного математического ожидания:

$$\widehat{\theta}_n^{(3)} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

у которой

$$M\widehat{\theta}_n^{(3)} = \frac{1}{n}\Big(M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_n\Big) = \frac{1}{n}\cdot\theta n = \theta,$$

$$D\widehat{\theta}_n^{(3)} = \frac{1}{n^2}\Big(D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n\Big) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$, т.е. последняя оценка также несмещенная и состоятельная.

Какой же оценке отдать предпочтение? Для того чтобы ответить на этот вопрос, сравним дисперсии последних двух оценок. Поскольку

$$D\widehat{\theta}_n^{(3)} = \frac{\sigma^2}{n}, \qquad D\widehat{\theta}_n^{(2)} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 + \frac{n-1}{3(n+1)}\right),$$

то $D\widehat{\theta}_n^{(2)} > D\widehat{\theta}_1^{(3)}$, т.е. оценка $\widehat{\theta}_n^{(3)}$ дает меньший разброс около значений параметра θ и, следовательно, предпочтительнее. В таком случае говорят, что оценка $\widehat{\theta}_n^{(3)}$ *эффективнее* оценки $\widehat{\theta}_n^{(2)}$. Теперь естественно поставить вопрос о построении самой эффективной оценки — об оценке с минимальной дисперсией. Такая оценка называется *эффективной* оценкой*.

Доказано, что эффективной оценкой математического ожидания нормально распределенной случайной величины является оценка $\widehat{\theta}_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Именно поэтому последняя оценка так широко используется в математической статистике.

Итак, впредь для оценки неизвестного математического ожидания случайной величины будем использовать *выборочное среднее*, т.е.

$$\widehat{\theta}_n = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Существуют стандартные (регулярные) методы получения оценок неизвестных параметров распределения. Наиболее известные из них: *метод моментов*, *метод максимального правдоподобия* и *метод наименьших квадратов*. С основными идеями этих методов мы познакомимся на конкретных примерах получения оценок параметров наиболее известных распределений.

*Понятие эффективности определено только для несмещенных оценок.

Точечные оценки дисперсии

Для дисперсии σ^2 случайной величины ξ можно предложить следующую оценку:

$$\overline{DX} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,$$

где $\overline{x}$ — выборочное среднее.

Доказано, что эта оценка состоятельная, но *смещенная.*

В качестве состоятельной несмещенной оценки дисперсии* используют величину

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\overline{x}^2\Big).$$

Именно несмещенностью оценки s^2 объясняется ее более частое использование в качестве оценки величины $D\xi$.

Заметим, что Mathcad предлагает в качестве оценки** дисперсии величину $\overline{DX}$, а не s^2: функция $\mathsf{var}(x)$ вычисляет величину

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(x_i - \mathsf{mean}(x)\big)^2,$$

где $\mathsf{mean}(x)$ — выборочное среднее $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$.

ЗАДАНИЕ 6.5

Найдите состоятельные несмещенные оценки математического ожидания $M\xi$ и дисперсии $D\xi$ случайной величины ξ по приведенным в задании выборочным значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Порядок выполнения задания

1. Прочитайте с диска файл, содержащий выборочные значения, или введите заданную выборку с клавиатуры.
2. Вычислите точечные оценки $M\xi$ и $D\xi$.

Пример выполнения задания

Найдите состоятельные несмещенные оценки математического ожидания $M\xi$ и дисперсии $D\xi$ случайной величины ξ по выборочным значениям, заданным следующей таблицей.

x	904.3	910.2	916.6	928.8	935.0	941.2	947.4	953.6	959.8	966.0	972.2	978.4
n	1	3	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1

*Вообще говоря, эта оценка не является эффективной, что можно легко показать на примере случайной величины, имеющей нормальное распределение.

**См. разд. 6.1.

Для выборки, заданной таблицей такого типа (приведено выборочное значение и число, указывающее, сколько раз это значение встречается в выборке), формулы для состоятельных несмещенных оценок математического ожидания и дисперсии имеют вид:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2, \qquad n = \sum_{i=1}^{n} n_i,$$

где k — количество значений в таблице; n_i — количество значений x_i в выборке; n — объем выборки.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями точечных оценок приведен ниже.

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$\mathbf{i} := 1..12$$

$$\mathbf{D1} := \begin{bmatrix} 1 & 904.3 \\ 3 & 910.2 \\ 1 & 916.6 \\ 1 & 928.8 \\ 1 & 935.0 \\ 2 & 941.2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D2} := \begin{bmatrix} 1 & 947.4 \\ 1 & 953.6 \\ 1 & 959.8 \\ 1 & 966.0 \\ 2 & 972.2 \\ 1 & 978.4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} := \mathbf{stack}(\mathbf{D1}, \mathbf{D2})$$

$$\mathbf{n} := \sum_{i=1}^{12} D_{i,1} \qquad \mathbf{n} = 16$$

$$\mathbf{Mx} := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{12} D_{i,1}\cdot D_{i,2} \qquad \mathbf{Mx} = 940.456$$

$$\mathbf{Dx} := \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{12} D_{i,1}\cdot\left(D_{i,2} - \mathbf{Mx}\right)^2 \qquad \mathbf{Dx} = 632.811$$

$$\mathbf{Dx1} := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{12} D_{i,1}\cdot\left(D_{i,2} - \mathbf{Mx}\right)^2 \qquad \mathbf{Dx1} = 593.26$$

Из приведенных вычислений видно, что смещенная оценка дает заниженное значение оценки дисперсии.

Точечная оценка вероятности события

Предположим, что в некотором эксперименте событие A (благоприятный исход испытания) происходит с вероятностью p и не происходит с вероятностью $q = 1 - p$. Задача состоит в получении оценки $\overline{p}$ неизвестного параметра распределения p по результатам серии n случайных экспериментов. При заданном числе испытаний n количество благоприятных исходов m в серии испытаний — случайная величина, имеющая распределение Бернулли*. Обозначим ее буквой μ.

Если событие A в серии из n независимых испытаний произошло m раз, то оценку $\overline{p}$ величины p предлагается вычислять по формуле $\overline{p} = \dfrac{m}{n}$.

Выясним свойства предлагаемой оценки. Поскольку случайная величина μ имеет распределение Бернулли, то $M\mu = np$ и $M\overline{p} = M\left(\dfrac{\mu}{n}\right) = p$, т.е. налицо несмещенная оценка.

Для испытаний Бернулли справедлива теорема Бернулли, согласно которой $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\dfrac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$, т.е. оценка $\overline{p}$ состоятельная.

Доказано, что эта оценка эффективна, так как обладает при прочих равных условиях минимальной дисперсией.

В Mathcad для моделирования выборки значений случайной величины, имеющей распределение Бернулли, предназначена функция $\mathsf{rbinom}(k,n,p)$, которая формирует вектор из k случайных чисел, каждое из которых равно числу успехов в серии из n независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом.

ЗАДАНИЕ 6.6

Смоделируйте несколько выборок значений случайной величины, имеющей распределение Бернулли с заданным значением параметра p. Вычислите для каждой выборки оценку параметра p и сравните с заданным значением. Представьте результаты вычислений графически.

Порядок выполнения задания

1. Используя функцию $\mathsf{rbinom}(1,n,p)$, опишите и сформируйте последовательность значений случайной величины, имеющей распределение Бернулли с заданными p и n для $n = 10, 20, \ldots, N$, как функцию объема выборки n.

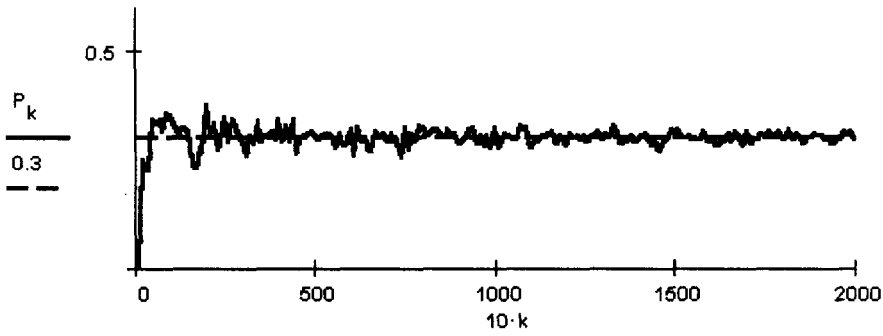
*Распределение Бернулли обсуждалось в разд. 5.2.

2. Вычислите для каждого значения n точечные оценки $\overline{p}$ вероятности p.
3. Постройте график зависимости величины $\overline{p}$ от объема выборки.

Пример выполнения задания

Пример получения точечных оценок выборок объема $n = 10, 20, \ldots, 200$ значений случайной величины μ, имеющей распределение Бернулли с параметром $p = 0.3$, приведен ниже.

$$\text{ORIGIN} := 1 \qquad k := 1..200 \qquad P_k := \frac{\text{rbinom}(1, 10\cdot k, 0.3)_1}{10\cdot k}$$



Указание. Поскольку значением функции является *вектор*, число успехов в серии n независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании содержится в первой компоненте вектора rbinom(1,n,p) , т.е. число успехов равно $\text{rbinom}(1,n,p)_1$. В приведенном выше фрагменте k-я компонента вектора P содержит число успехов в серии $10k$ независимых испытаний для $k = 1, 2, \ldots, 200$.

Точечная оценка параметров равномерного распределения

Обратимся еще к одному поучительному примеру. Пусть x_1, x_2, ..., x_n — выборка из генеральной совокупности, соответствующей случайной величине ξ, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0, \theta]$ с неизвестным параметром θ. Наша задача — оценить этот неизвестный параметр.

Рассмотрим один из возможных способов построения требуемой оценки. Если ξ — случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке $[0, \theta]$, то $M\xi = \frac{\theta}{2}$. Поскольку оценка величины $M\xi$ известна, $M\xi = \overline{x}$, то за оценку $\widehat{\theta}^{(1)}$ параметра θ можно взять оценку $\widehat{\theta}^{(1)} = 2\overline{x} = \frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Несмещенность оценки очевидна: $M\widehat{\theta}^{(1)} = 2M\xi = \theta$.

Вычислив дисперсию $\widehat{\theta}^{(1)}$ и предел $D\widehat{\theta}^{(1)}$ при $n \to \infty$, убедимся в состоятельности оценки $\widehat{\theta}^{(1)}$:

$$D\widehat{\theta}^{(1)} = D\Big(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big) = \frac{4}{n^2}D\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Big) = \frac{4}{n^2}\cdot n\cdot D\xi = \frac{4}{n^2}\cdot n\cdot\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Для получения другой оценки $\widehat{\theta}^{(2)}$ параметра θ обратимся к другой статистике. Пусть $\widehat{\theta}^{(2)} = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Найдем распределение случайной величины $\widehat{\theta}^{(2)}$:

$$F_{\widehat{\theta}^{(2)}}(x) = P\big(\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) < x\big) =$$
$$= P\big(x_1 < x, \ldots, x_n < x\big) = \Big(\frac{x}{\theta}\Big)^n, \quad 0 \le x \le \theta.$$

Тогда математическое ожидание и дисперсия случайной величины $\widehat{\theta}^{(2)}$ с распределением $F_{\widehat{\theta}^{(2)}}(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$ равны соответственно:

$$M\widehat{\theta}^{(2)} = \frac{n}{n+1}\theta, \qquad D\widehat{\theta}^{(2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2,$$

т.е. оценка $\widehat{\theta}^{(2)}$ состоятельная, но смещенная. Однако если вместо $\widehat{\theta}^{(2)} = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рассмотреть $\widehat{\theta}^{(3)} = \frac{n+1}{n}\max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $M\widehat{\theta}^{(3)} = \theta$ и $D\widehat{\theta}^{(3)} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$, и, следовательно, оценка $\widehat{\theta}^{(3)}$ состоятельная и несмещенная.

При этом, поскольку

$$\frac{D\widehat{\theta}^{(3)}}{D\widehat{\theta}^{(1)}} = \frac{3}{n+2} < 1,$$

оценка $\widehat{\theta}^{(3)}$ существенно эффективнее оценки $\widehat{\theta}^{(1)}$. Например, при $n = 97$ разброс оценки $\widehat{\theta}^{(3)}$ в 33 раза меньше разброса оценки $\widehat{\theta}^{(1)}$.

Последний пример еще раз показывает, что выбор статистической оценки неизвестного параметра распределения — важная и нетривиальная задача.

В Mathcad для моделирования выборки значений случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, предназначена функция $\mathrm{runif}(k, a, b)$, которая формирует вектор из k случайных чисел, каждое из которых — значение равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$ случайной величины.

ЗАДАНИЕ 6.7

Смоделируйте несколько выборок разного объема значений случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0, \theta]$ для

значения $\theta = N/2$ (N — номер варианта), и найдите оценки $\widehat{\theta}^{(1)}$ и $\widehat{\theta}^{(3)}$ параметра θ. Постройте график зависимости $\widehat{\theta}^{(1)}$ и $\widehat{\theta}^{(3)}$ от объема выборки.

Порядок выполнения задания

1. Используя функцию $\mathrm{runif}(n, 0, N/2)$, опишите и сформируйте последовательность n значений случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0, N/2]$.
2. Вычислите для каждого значения n точечные оценки $\widehat{\theta}^{(1)}$ и $\widehat{\theta}^{(3)}$ параметра θ.
3. Постройте график зависимости величин $\widehat{\theta}^{(1)}$ и $\widehat{\theta}^{(3)}$ от объема выборки.

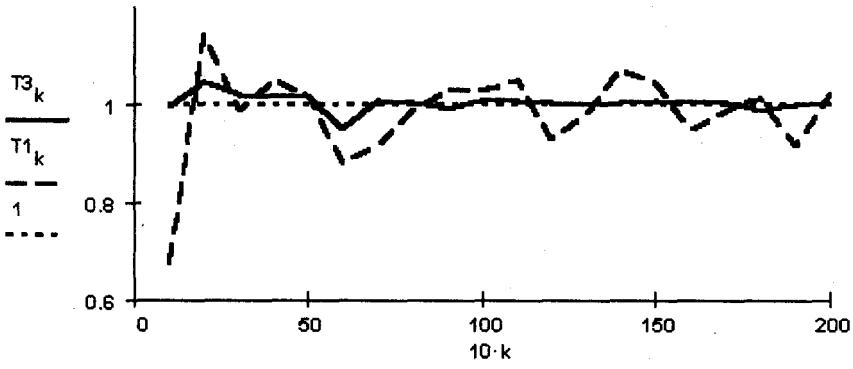
Пример выполнения задания

Пример получения точечных оценок $\widehat{\theta}^{(1)}$ и $\widehat{\theta}^{(3)}$ параметра θ для выборок объема $n = 10, 20, \ldots, 200$ значений случайной величины ξ, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0, \theta]$, $\theta = 1$, приведен ниже.

$$\mathbf{ORIGIN} := 1 \qquad \mathbf{k} := 1 .. 20$$

$$\mathbf{T1}_k := \frac{2}{10 \cdot k} \cdot \sum \mathrm{runif}(10 \cdot k, 0, 1) \qquad \mathbf{T1}_{17} = 0.986$$

$$\mathbf{T3}_k := \frac{10 \cdot k + 1}{10 \cdot k} \cdot \max(\mathrm{runif}(10 \cdot k, 0, 1)) \qquad \mathbf{T3}_{17} = 1.005$$



Указание. Как видно из приведенных в документе вычислений, выборке объема 170 соответствует оценка $\theta_1 = 0.986$, в то время как $\theta_3 = 1.005$. Оценка θ_3 существенно точнее оценки θ_1 (напомним, что истинное значение оцениваемого параметра θ равно 1).

Поскольку значением функции runif(10k,0,1) является *вектор*, содержащий 10k значений случайной величины, имеющей равномерное распределение, для вычисления $\sum_{i=1}^{n} x_i$ щелкните по кнопке [Συ] в панели [⁞⁞⁞] и введите в помеченной позиции обращение к функции runif(10k,0,1). Для вычисления $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ используйте выражение max(runif(10k,0,1)).

6.4 МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК

Как уже упоминалось ранее, существуют регулярные методы получения точечных оценок. Один из них — метод максимального правдоподобия.

Оценки, полученные методом максимального правдоподобия, обладают хорошими *асимптотическими* свойствами: при $n \to \infty$ они становятся эффективными, несмещенными, состоятельными. Познакомимся с этим методом на примерах.

Метод максимального правдоподобия для дискретной случайной величины

Пусть ξ — дискретная случайная величина, распределенная по закону Пуассона с неизвестным параметром λ, т.е. $P(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$ и m_1, m_2, ..., m_n — результаты независимых наблюдений случайной величины ξ. Задача состоит в построении точечной оценки неизвестного параметра λ. Для ее решения введем в рассмотрение *функцию правдоподобия*, заданную равенством

$$L(m_1, m_2, \ldots, m_n) = P(\xi_1 = m_1, \xi_2 = m_2, \ldots, \xi_n = m_n),$$

где ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n — независимые случайные величины, распределенные так же, как и случайная величина ξ.

Поскольку случайные величины ξ_i независимы и $P(\xi_i = m_i) = \frac{\lambda^{m_i}}{m_i!}e^{-\lambda}$, то

$$L(m_1, m_2, \ldots, m_n) = P(\xi_1 = m_1)\,P(\xi_2 = m_2)\ldots P(\xi_n = m_n) = \\ = \frac{\lambda^{m_1+\ldots+m_n}}{m_1!\ldots m_n!}e^{-n\lambda}.$$

Как видно из последнего равенства, функция правдоподобия зависит только от результатов наблюдений m_1, m_2, ..., m_n и от неизвестного параметра λ.

За оценку неизвестного параметра λ примем такое число $\widehat{\lambda}$, которое доставляет максимум функции правдоподобия.

Такой подход к построению оценки представляется естественным. В самом деле, значением функции правдоподобия является вероятность того, что случайные величины ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n принимают именно те значения m_1, m_2, ..., m_n, которые увидел наблюдатель. Вряд ли наблюдатель был свидетелем крайне маловероятного события. Здравый смысл подсказывает, что, скорее всего, наблюдатель видит то, что наиболее вероятно, что должно происходить. Другими словами, он является свидетелем события, вероятность которого является наибольшей и равна $\max L(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Такова основная идея метода максимального правдоподобия, отраженная в его названии.

При решении задач отыскания максимума функции правдоподобия чаще всего находят максимум функции $\ln L$:

$$\ln L = \ln\left(\frac{\lambda^{m_1+\ldots+m_n}}{m_1!\ldots m_n!}e^{-n\lambda}\right) = -n\lambda + (m_1+\ldots+m_n)\ln\lambda - \ln(m_1!\ldots m_n!),$$

которая достигает максимума в той же точке, что и функция правдоподобия $L(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

Из необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -n + \frac{m_1+\ldots+m_n}{\lambda} = 0$$

имеем* искомую оценку $\widehat{\lambda} = \frac{1}{n}(m_1+\ldots+m_n)$ неизвестного параметра λ.

Вспомнив, что математическое ожидание случайной величины ξ, имеющей распределение Пуассона с параметром λ, равно $M\xi = \lambda$ и что эффективной несмещенной состоятельной оценкой математического ожидания ξ по выборке m_1, m_2, ..., m_n является величина $\overline{m} = \frac{1}{n}(m_1+\ldots+m_n) = \widehat{\lambda}$, можем утверждать, что методом максимального правдоподобия получена *естественная* оценка параметра λ.

В Mathcad для моделирования выборки значений случайной величины, распределенной по Пуассону, предназначена функция $\mathrm{rpois}(k, \lambda))$, которая формирует вектор из k случайных чисел, распределенных по Пуассону с параметром λ.

ЗАДАНИЕ 6.8

Смоделируйте несколько выборок объема n значений случайной величины ξ, имеющей распределение Пуассона с параметром $\lambda = 0.1N$,

*По смене знака производной легко проверить, что в стационарной точке функция $\ln L$ имеет максимум.

N — номер варианта. Для одной выборки постройте график функции правдоподобия. Найдите оценку максимального правдоподобия параметра λ как функцию объема выборки. Выполните вычисления для $n = 10N, 20N, \ldots, 50N$ при $N \leq 15$ и для $n = N, 2N, \ldots, 10N$ при $N > 15$. Изобразите на графике зависимость оценки от объема выборки. Сравните полученные оценки с заданным значением параметра.

Порядок выполнения задания

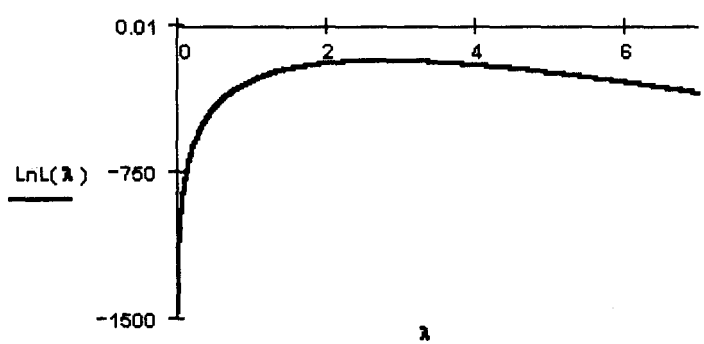
1. Смоделируйте выборку значений случайной величины, имеющей распределение Пуассона с заданным значением параметра λ.
2. Определите логарифм функции максимального правдоподобия и изобразите его график.
3. Смоделируйте несколько выборок разного объема значений случайной величины, имеющей распределение Пуассона с заданным значением параметра λ.
4. Вычислите оценку максимального правдоподобия параметра λ как функцию объема выборки.
5. Изобразите на графике зависимость оценки максимального правдоподобия от объема выборки.

Пример выполнения задания

В приведенном ниже фрагменте рабочего документа выполнены требуемые вычисления для распределения Пуассона с параметром $\lambda = 3$.

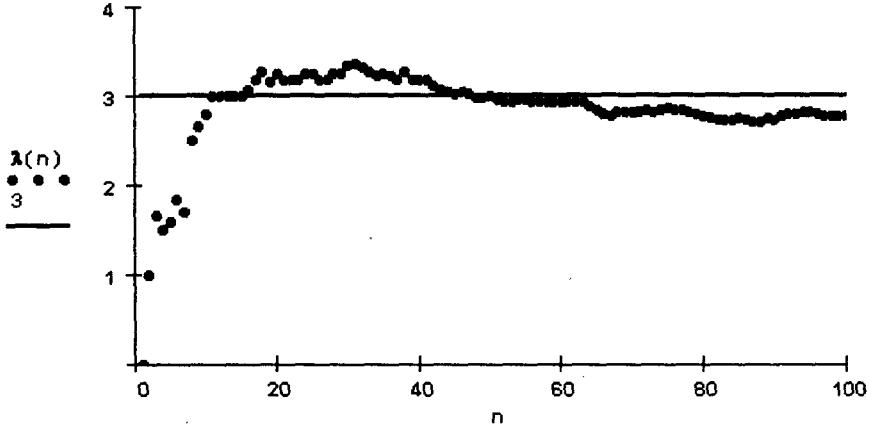
$$\mathbf{ORIGIN} := 1 \qquad \mathbf{P} := \mathbf{rpois}(100, 3)$$

$$\mathbf{LnL}(\lambda) := \left[-100 \cdot \lambda + \left(\sum_{i=1}^{100} P_i \right) \cdot \ln(\lambda) \right] - \ln\left(\prod_{i=1}^{100} P_i ! \right)$$



$n := 1..100 \qquad \lambda(n) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} P_i$

$\lambda(50) = 3 \qquad \lambda(100) = 2.77$



Метод максимального правдоподобия для непрерывной случайной величины

Пусть ξ — случайная величина, распределенная по показательному закону с неизвестным параметром λ:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Задача состоит в построении методом максимального правдоподобия оценки $\widehat{\lambda}$ параметра λ по выборочным значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

По аналогии с предыдущим разделом определим функцию правдоподобия равенством

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_\xi(x_i) = \lambda^n e^{-\lambda(x_1 + \ldots + x_n)}.$$

Как видно, функция правдоподобия зависит не только от выборочных значений, но и от неизвестного параметра распределения λ. Как и выше, за оценку неизвестного параметра λ примем такое число $\widehat{\lambda}$, которое доставляет максимум функции правдоподобия. Снова переходим к логарифму функции правдоподобия, применяем необходимое

условие экстремума и после несложных вычислений получаем:

$$\ln L = n\ln\lambda - (x_1 + \ldots + x_n)\lambda, \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - (x_1 + \ldots + x_n) = 0,$$

$$\widehat{\lambda} = \frac{n}{x_1 + \ldots + x_n} = \frac{1}{\overline{x}},$$

что естественно, поскольку математическое ожидание случайной величины, имеющей показательное распределение с параметром λ, равно $\frac{1}{\lambda}$.

В Mathcad для моделирования выборки значений случайной величины, имеющей показательное распределение, предназначена функция $\mathsf{rexp}(k, \lambda)$, которая формирует вектор из k случайных чисел, распределенных показательно с параметром λ.

ЗАДАНИЕ 6.9

Смоделируйте несколько выборок объема n значений случайной величины ξ, имеющей показательное распределение с параметром $\lambda = 0.1N$, где N — номер варианта. Для одной выборки постройте график функции правдоподобия. Найдите оценку максимального правдоподобия параметра λ как функцию объема выборки. Выполните вычисления для $n = 10N, 20N, \ldots, 50N$ при $N \leq 15$ и для $n = N, 2N, \ldots, 10N$ при $N > 15$. Изобразите на графике зависимость оценки от объема выборки. Сравните полученные оценки с заданным значением параметра.

Порядок выполнения задания

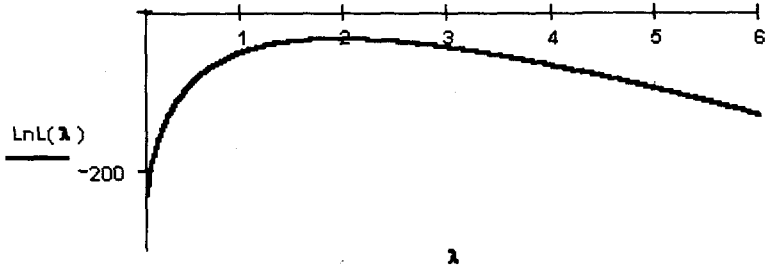
1. Смоделируйте выборку значений случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение с заданным значением параметра λ.
2. Определите логарифм функции максимального правдоподобия и изобразите его график.
3. Смоделируйте несколько выборок разного объема значений случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение с заданным значением параметра λ.
4. Вычислите оценку максимального правдоподобия параметра λ как функцию объема выборки.
5. Изобразите на графике зависимость оценки максимального правдоподобия от объема выборки.

Пример выполнения задания

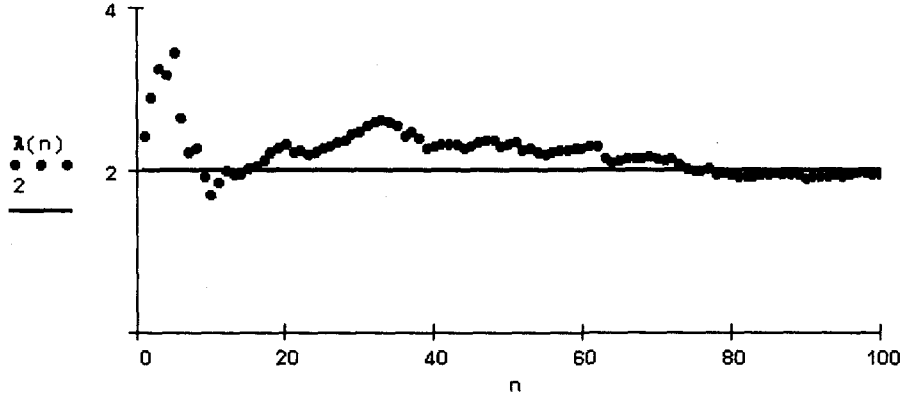
В приведенном ниже фрагменте рабочего документа выполнены требуемые вычисления для экспоненциального распределения с параметром $\lambda = 2$.

ORIGIN := 1 $\qquad$ P := rexp(100,2)

$$LnL(\lambda) := 100\cdot\ln(\lambda) - \lambda\cdot\sum_{i=1}^{100} P_i$$



$n := 1..100 \qquad \lambda(n) := \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \qquad \lambda(50) = 2.33 \qquad \lambda(100) = 1.948$



Обратимся еще к одному примеру. Рассмотрим распределение, которое зависит более чем от одного параметра.

Пусть случайная величина η имеет распределение Лапласа, зависящее от двух неизвестных параметров θ_1 и θ_2:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\theta_2} e^{-\frac{|x-\theta_1|}{\theta_2}}, \quad \theta_2 > 0,$$

и пусть x_1, x_2, ..., x_n — выборка из генеральной совокупности, отвечающей случайной величине η. Задача состоит в построении

методом максимального правдоподобия оценок $\widehat{\theta}_1$ и $\widehat{\theta}_2$ параметров θ_1 и θ_2.

Для рассматриваемого нами распределения функция максимального правдоподобия имеет вид

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\theta_2)^n} \exp\Big(-\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \theta_1|\Big)$$

и

$$\ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -n \ln(2\theta_2) - \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \theta_1|.$$

Здесь нельзя использовать необходимое условие экстремума для гладких функций, так как функция $\ln L$ (а значит, и функция L) не дифференцируема по θ_1. Однако задача легко решается, поскольку при постоянном θ_2 максимум $\ln L$, очевидно, достигается в точке минимума функции $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - \theta_1|$. Если объем выборки n — нечетное число, то оценка $\widehat{\theta}_1$ совпадает с медианой выборки x_1, x_2, ..., x_n. При четном n минимум $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - \theta_1|$ достигается в любой точке отрезка между проранжированными наблюдениями с номерами $\frac{n}{2} - 1$ и $\frac{n}{2}$.

Оценка максимального правдоподобия $\widehat{\theta}_2$ параметра θ_2 удовлетворяет уравнению $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0$ и имеет вид

$$\widehat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \theta_1|,$$

т.е. равна средней величине модуля отклонения выборочных значений от $\widehat{\theta}_1$.

Замечание. В Mathcad нет функции, генерирующей выборки случайных величин, имеющих распределение Лапласа. Однако, поскольку плотность распределения Лапласа всюду непрерывна*, можно моделировать распределенные по Лапласу случайные величины из выборок равномерной случайной величины. Обозначим $F^{-1}(x)$ функцию, обратную функции распределения $F(x)$. Такая функция определена на отрезке $[0, 1]$, поскольку $F(x)$ монотонно возрастает. Доказано, что если случайная величина η равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, то случайная величина $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $F(x)$.

*Случайные величины, имеющие непрерывную плотность распределения, называются *абсолютно непрерывными* случайными величинами.

Например, для случайной величины, имеющей распределение Лапласа с плотностью вероятностей $p(x,\theta_1,\theta_2) = p(x,\theta,1) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|}$, функция распределения и обратная к ней имеют соответственно вид

$$F(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x-\theta}, & x \le \theta, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x+\theta}, & x > \theta, \end{cases}$$

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} \theta + \ln 2x, & 0 \le x \le 0,5, \\ \theta - \ln\Big(2(1-x)\Big), & 0.5 < x \le 1. \end{cases}$$

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий моделирование выборки объема $n = 50$ случайной величины, имеющей распределение Лапласа с параметрами $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = 1$. В документе представлены гистограмма выборки с графиком теоретической плотности вероятностей, а также график эмпирической функции распределения с графиком теоретической функции распределения.

$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad \xi := \mathrm{runif}(500,0,1) \qquad \theta := 0$

$$\mathrm{FL}(x,\theta) := \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\cdot\exp(x-\theta)\right) & \text{if } -\infty < x \le \theta \\ \left(1 - \frac{1}{2}\cdot\exp(-x+\theta)\right) & \text{if } \theta < x < \infty \end{cases}$$

$$f(x,\theta) := \begin{cases} (\theta + \ln(2\cdot x)) & \text{if } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ (\theta - \ln(2\cdot(1-x))) & \text{if } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

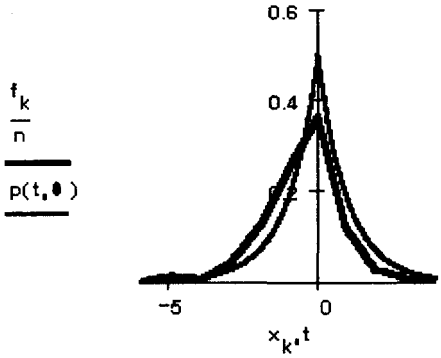
$$p(x,\theta) := \frac{1}{2}\cdot\exp(-|x-\theta|)$$

$n := 500 \qquad i := 1..500 \qquad fx_i := f(\xi_i,\theta) \qquad X := \mathrm{sort}(fx)$

$\mathrm{xmax} := \max(X) \qquad \mathrm{xmin} := \min(X) \qquad R := \mathrm{xmax} - \mathrm{xmin}$

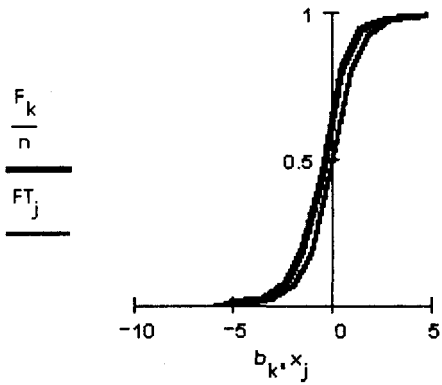
$\mathrm{xmax} = 5.295 \qquad \mathrm{xmin} = -6.349 \qquad R = 11.643$

$x_j := \mathrm{xmin} + \frac{\Delta}{2}\cdot(2\cdot j - 1) \qquad f := \mathrm{hist}(x,X) \qquad \Delta = 0.97$



$a_j := xmin + \Delta \cdot (j - 1)$ $\qquad$ $b_j := a_j + \Delta$

$$F_k := \sum_{j=1}^{k} f_j \qquad FT_j := FL(x_j, \theta)$$



ЗАДАНИЕ 6.10

Смоделируйте выборку объема $n = 200$ значений случайной величины ξ, имеющей распределение Лапласа с указанными параметрами θ_1 и θ_2. Найдите оценки максимального правдоподобия параметров θ_1 и θ_2.

Порядок выполнения задания

1. Смоделируйте выборку значений случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.
2. Определите функцию распределения Лапласа с заданными значениями параметров θ_1 и θ_2.
3. Определите функцию, обратную функции распределения Лапласа с заданными значениями параметров θ_1 и θ_2.

4. Смоделируйте выборку заданного объема значений случайной величины, имеющей распределения Лапласа с заданными значениями параметров θ_1 и θ_2.
5. Проверьте "на глаз" адекватность выборки.
6. Вычислите оценку максимального правдоподобия параметров θ_1 и θ_2.

Пример выполнения задания

В приведенном ниже фрагменте рабочего документа построена выборка и найдены оценки максимального правдоподобия параметров θ_1 и θ_2. Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий моделирование выборки и графики для глазомерной проверки, приведен выше. (Моделировалась выборка с параметрами $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = 1$.)

$$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad \xi := \mathrm{runif}(200, 0, 1) \qquad \theta := 0 \qquad n := 200$$

$$FL(x, \theta) := \begin{cases} \left(\frac{1}{2} \cdot \exp(x - \theta)\right) & \text{if } -\infty < x \le \theta \\ \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \exp(-x + \theta)\right) & \text{if } \theta < x < \infty \end{cases}$$

$$f(x, \theta) := \begin{cases} (\theta + \ln(2 \cdot x)) & \text{if } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ (\theta - \ln(2 \cdot (1 - x))) & \text{if } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

$$p(x, \theta) := \frac{1}{2} \cdot \exp(-|x - \theta|)$$

$$i := 1..200 \qquad fx_i := f(\xi_i, \theta) \qquad X := \mathrm{sort}(fx)$$

$$\theta est1 := X_{99} \qquad \theta est2 := X_{100}$$

$$\theta est1 = 0.035 \qquad \theta est2 = 0.041$$

$$\theta 2est1 := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |X_i - \theta est1| \qquad \theta 2est2 := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |X_i - \theta est2|$$

$$\theta 2est1 = 0.937 \qquad \theta 2est2 = 0.937$$

Таким образом, для выборки из генеральной совокупности, отвечающей распределению Лапласа с параметрами $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = 1$, получены две оценки максимального правдоподобия для θ_1: 0.035, если в качестве оценки выбрано значение $X_{\frac{n}{2}-1} = X_{99}$, и 0.041, если в качестве оценки выбрано значение $X_{\frac{n}{2}}$; для параметра θ_2 в обоих случаях получены одинаковые оценки, равные 0.937.

Интересно проследить за сходимостью полученных оценок к истинным значениям оцениваемых параметров с ростом объема выборки. Такие вычисления рекомендуется выполнить в качестве дополнительного задания.

6.5 ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Точечные оценки дают приближенное значение неизвестного (оцениваемого) параметра. Сама оценка является случайной величиной, и если известно ее распределение или хотя бы дисперсия, то можно указать пределы, в которых с достаточно большой вероятностью лежит неизвестное значение параметра. Эти пределы легко вычисляются через дисперсию. Важно понимать, что пользоваться полученными значениями пределов можно, только если они не зависят от самого оцениваемого параметра.

Зададимся достаточно малой с практической точки зрения вероятностью α и рассмотрим выборку x_1, x_2, ..., x_n из генеральной совокупности, отвечающей случайной величине ξ, имеющей распределение $F_\xi(x,\theta)$, где θ — неизвестный параметр. Предположим, что удалось найти две такие функции $\underline{\theta}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\overline{\theta}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, для которых:

1) $\underline{\theta}(x_1,x_2,\ldots,x_n) < \overline{\theta}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при всех x_1, x_2, ..., x_n;

2) $P(\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}) = 1 - \alpha$.

В этом случае интервал $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ называется *доверительным интервалом* для параметра θ, соответствующим *доверительной вероятности* $1-\alpha$.

В ряде практически важных случаев функции $\underline{\theta}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\overline{\theta}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ можно найти в явном виде.

Чтобы привести соответствующие примеры, обратимся к интервальному оцениванию параметров нормально распределенной случайной величины.

Доверительные интервалы для математического ожидания

Известная дисперсия $D\xi$. Пусть ξ — нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием a и известной дисперсией $D\xi$. Задача состоит в построении доверительного интервала для неизвестного математического ожидания a.

В качестве оценки параметра a возьмем выборочное среднее $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Относительно случайных величин $\overline{x}$ и $\overline{x} - a$ известно следующее:

1) случайная величина $\overline{x}$ распределена нормально и ее математическое ожидание равно a, $M\overline{x} = a$;

2) случайная величина $\overline{x} - a$ тоже распределена нормально и ее математическое ожидание равно нулю, $M(\overline{x} - a) = 0$;

3) дисперсия случайной величины $\overline{x} - a$ равна $D(\overline{x} - a) = \frac{D\xi}{n}$;

4) случайная величина $\frac{\overline{x} - a}{\sqrt{D\xi/n}}$ распределена нормально с параметрами 0 и 1.

Таким образом, построена функция $\frac{\overline{x} - a}{\sqrt{D\xi/n}}$ — "агрегат" из выборочных значений, который представляет собой случайную величину со стандартным распределением, в данном случае — с нормальным $N(0,1)$. Распределение $N(0,1)$ не зависит ни от оцениваемого параметра a, ни от единиц измерения выборочных значений.

Пусть $\Phi(x)$ — функция распределения случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz.$$

Зададимся доверительной вероятностью α и определим величину x_α из уравнения $\Phi(x_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$.

Из рис. 6.3 видно, что если случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, то с вероятностью $1 - \alpha$ ее значение попадает в интервал $(-x_\alpha, x_\alpha)$. А поскольку случайная величина $\frac{\overline{x} - a}{\sqrt{D\xi/n}}$ имеет стандартное нормальное распределение, то с вероятностью $1 - \alpha$ ее значение тоже лежит в интервале $(-x_\alpha, x_\alpha)$ и, следовательно, с вероятностью $1 - \alpha$ выполняется неравенство

$$\overline{x} - x_\alpha\sqrt{\frac{D\xi}{n}} \le a \le \overline{x} + x_\alpha\sqrt{\frac{D\xi}{n}}.$$

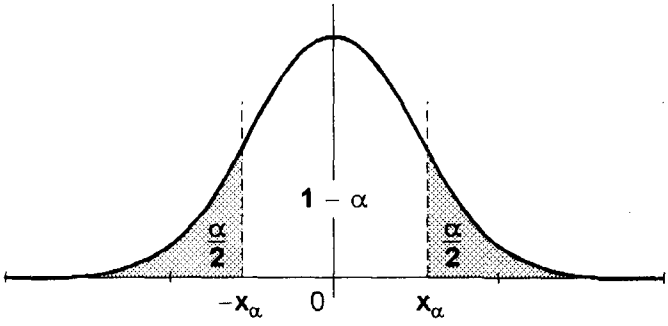


Рис. 6.3. Доверительный интервал для математического ожидания

Это означает, что с вероятностью $p = 1 - \alpha$ интервал

$$\left(\overline{x} - x_\alpha\sqrt{\frac{D\xi}{n}},\ \overline{x} + x_\alpha\sqrt{\frac{D\xi}{n}}\right)$$

накрывает неизвестный параметр a. Получен универсальный алгоритм построения доверительных интервалов для неизвестного математического ожидания при известной дисперсии.

Итак, в данном случае $\underline{\theta} = \overline{x} - x_\alpha\sqrt{\frac{D\xi}{n}}$ и $\overline{\theta} = \overline{x} + x_\alpha\sqrt{\frac{D\xi}{n}}$.

Неизвестная дисперсия $D\xi$. Если из выборочных значений составить случайную величину $\frac{\overline{x} - a}{\sqrt{D\xi/n}}$, то, естественно, возникает вопрос о вычислении "аналога" $D\xi$. Обычно вместо $D\xi$ подставляют оценку дисперсии

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2$$

и рассматривают величину $\frac{\overline{x} - a}{\sqrt{s^2/n}}$, которая распределена не по нормальному закону, а по закону Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы*.

Опять зададимся доверительной вероятностью α и определим величину $t_{\alpha,n-1}$ из уравнения

$$F_{n-1}(t_{\alpha,n-1}) = 1 - 0.5\alpha,$$

где $F_{n-1}(t)$ — функция распределения Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы.

*При достаточно больших n ($n > 120$) распределение Стьюдента мало отличается от нормального.

Строим доверительный интервал

$$\left(\overline{x} - t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}},\ \overline{x} + t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right).$$

Этот интервал с вероятностью $1-\alpha$ накрывает оцениваемый параметр a, т.е. неравенства

$$\overline{x} - t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}} \le a \le \overline{x} + t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

выполняются с вероятностью $1-\alpha$, и в этом случае:

$$\underline{\theta} = \overline{x} - t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}, \qquad \overline{\theta} = \overline{x} + t_{\alpha,n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}.$$

Доверительный интервал для дисперсии

Известное математическое ожидание. Требуется найти доверительный интервал для неизвестной дисперсии σ^2 нормально распределенной случайной величины ξ, если известно ее математическое ожидание a. Составим для σ^2 оценку $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$ и рассмотрим отношение

$$\frac{n\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right)^2.$$

Поскольку каждая из случайных величин $\frac{x_i - a}{\sigma}$ имеет стандартное нормальное распределение, то случайная величина $\frac{n\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2-распределение с n степенями свободы.

Для построения доверительного интервала зададимся доверительной вероятностью α и определим величины $\chi^2_{l,\alpha}$ и $\chi^2_{r,\alpha}$ так, чтобы выполнялись условия:

$$P\left(\frac{n\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{l,\alpha}\right) = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{и} \qquad P\left(\frac{n\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \ge \chi^2_{r,\alpha}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$P\left(\chi^2_{l,\alpha} \le \frac{n\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{r,\alpha}\right) = 1 - \alpha.$$

Отсюда имеем с вероятностью $1-\alpha$ неравенства

$$\frac{n\widehat{\sigma}^2}{\chi^2_{r,\alpha}} \le \sigma^2 \le \frac{n\widehat{\sigma}^2}{\chi^2_{l,\alpha}},$$

т.е. $\left(\frac{n\widehat{\sigma}^2}{\chi^2_{r,\alpha}}, \frac{n\widehat{\sigma}^2}{\chi^2_{l,\alpha}}\right)$ — доверительный интервал для неизвестной дисперсии.

Замечание. Квантили $\chi^2_{l,\alpha}$ и $\chi^2_{r,\alpha}$ находятся как корни уравнений $F_n(\chi^2_{l,\alpha}) = 0.5\alpha$ и $F_n(\chi^2_{r,\alpha}) = 1 - 0.5\alpha$, где $F_n(x)$ — функция χ^2-распределения с n степенями свободы.

Неизвестное математическое ожидание. Требуется найти доверительный интервал для неизвестной дисперсии σ^2 нормально распределенной случайной величины ξ, если не известно ее математическое ожидание. Составим для σ^2 оценку $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ и рассмотрим отношение

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}\right)^2.$$

Здесь $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ — оценка неизвестного математического ожидания.

Можно доказать, что случайная величина $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2-распределение с $n-1$ степенями свободы. Определим квантили $\chi^2_{l,\alpha}$ и $\chi^2_{r,\alpha}$ так же, как и ранее, по χ^2-распределению с $n-1$ степенями свободы.

Тогда

$$P\left(\chi^2_{l,\alpha} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{r,\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

и

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{r,\alpha}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{l,\alpha}},$$

т.е. $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{r,\alpha}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{l,\alpha}}\right)$ — доверительный интервал для неизвестной дисперсии.

ЗАДАНИЕ 6.11

Найдите доверительные интервалы для математического ожидания $M\xi$ и дисперсии $D\xi$ по заданной выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из нормального распределения.

Порядок выполнения задания

1. Определите и введите компоненты вектора выборочных значений случайной величины.
2. Вычислите точечные оценки $M\xi$ и $D\xi$.

3. Вычислите 95 %-ный доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной дисперсии.
4. Вычислите 90 %-ный доверительный интервал для дисперсии.

Пример выполнения задания

Найдите доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии приведенной ниже выборки из нормального распределения.

x	904.3	910.2	916.6	928.8	935.0	941.2	947.4	953.6	959.8	966.0	972.2	978.4
n	3	1	2	7	8	10	4	2	4	1	1	1

Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями доверительных интервалов представлен ниже (в приведенном фрагменте опущено определение массива D, который во втором столбце содержит значения случайной величины, а в первом — их количество в выборке).

$ORIGIN := 1 \qquad i := 1..12$

$$n := \sum_{i=1}^{12} D_{i,1} \qquad n = 44$$

$$Mx := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{12} D_{i,1}\cdot D_{i,2} \qquad Mx = 938.693$$

$$Dx := \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{12} D_{i,1}\cdot\left(D_{i,2} - Mx\right)^2 \qquad Dx = 282.988$$

95%-й доверительный интервал для математического ожидания

$$t := qt\left(1 - \frac{0.05}{2}, n\right) \qquad t = 2.015$$

$$xl := Mx - t\cdot\sqrt{\frac{Dx}{n}} \qquad xl = 933.582$$

$$xr := Mx + t\cdot\sqrt{\frac{Dx}{n}} \qquad xr = 943.804$$

90%-й Доверительный интервал для дисперсии

$$hl := qchisq\left(\frac{0.1}{2}, n-1\right) \qquad hl = 28.965$$

$$hr := qchisq\left(1-\frac{0.1}{2}, n-1\right) \qquad hr = 59.304$$

$$dl := Dx \cdot \frac{(n-1)}{hr} \qquad dl = 205.19$$

$$dr := Dx \cdot \frac{(n-1)}{hl} \qquad dr = 420.114$$

Таким образом, найдены 95 %-ный доверительный интервал для математического ожидания (933.582, 943.804) и 90 %-ный доверительный интервал для дисперсии (205.19, 420.114).

Доверительный интервал для параметра пуассоновского распределения

Пусть x_1, x_2, ..., x_n — выборка из пуассоновского распределения с параметром λ, т.е.

$$P(\xi = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{(x_i)!}e^{-\lambda}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Опишем алгоритм построения доверительного интервала для неизвестного параметра λ. Как уже упоминалось ранее (см. разд. 6.3), точечная оценка для λ имеет вид

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Легко убедиться в том, что $M\widehat{\lambda} = \lambda$ и $D\widehat{\lambda} = \frac{\lambda}{n}$.

Теперь задача состоит в том, чтобы образовать из $\widehat{\lambda}$ и λ случайную величину со стандартным распределением, не зависящим от неизвестного параметра λ. Можно показать, что при $n \to \infty$ случайная величина

$$\frac{2\sqrt{\widehat{\lambda}} - 2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1/n}}$$

стремится к случайной величине со стандартным нормальным распределением (асимптотически распределена нормально с параметрами 0 и 1).

Тогда, если x_α— решение уравнения $\Phi(x_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, то для любого значения λ

$$P\left(\left|\frac{2\sqrt{\hat{\lambda}} - 2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1/n}}\right| < x_\alpha\right) \approx 1 - \alpha$$

и доверительный интервал для λ можно записать в виде

$$\left(\left(\sqrt{\hat{\lambda}} - \frac{x_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2, \left(\sqrt{\hat{\lambda}} + \frac{x_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2\right).$$

С вероятностью $P \approx 1 - \alpha$ этот интервал накрывает оцениваемый параметр λ пуассоновского распределения.

ЗАДАНИЕ 6.12

Найдите доверительный интервал для параметра λ по заданной выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из пуассоновского распределения.

Порядок выполнения задания

1. Сгенерируйте выборку из 500 значений случайной величины, имеющей пуассоновское распределение с заданным параметром λ по первым 100, 150, 200, ..., 500 элементам выборки.
2. Найдите для заданного значения доверительной вероятности α квантиль уровня $1 - 0.5\alpha$ стандартного нормального распределения.
3. Найдите точечную оценку параметра λ.
4. Вычислите доверительный интервал для λ с заданным значением доверительной вероятности α.
5. Постройте график зависимости $\Delta\lambda = \lambda_{\text{right}} - \lambda_{\text{left}}$ от n для различных α.

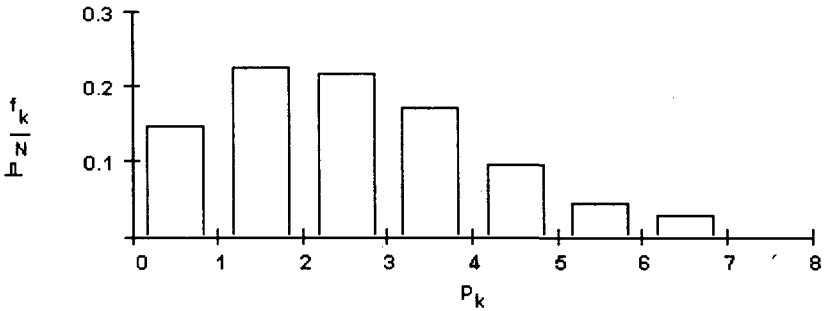
Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением доверительного интервала для λ с доверительной вероятностью $\alpha = 0.1$ приведен ниже.

```
ORIGIN := 1

α := 0.1      λ := 3      N := 500      P := rpois(N, λ)

Pmax := max(P)   Pmin := min(P)   R := Pmax - Pmin

Pmax = 9         Pmin = 0         R = 9         PS := sort(P)
```

$m := 9 \qquad \Delta := \frac{R}{m} \qquad j := 1..m \qquad k := 1..m-1$

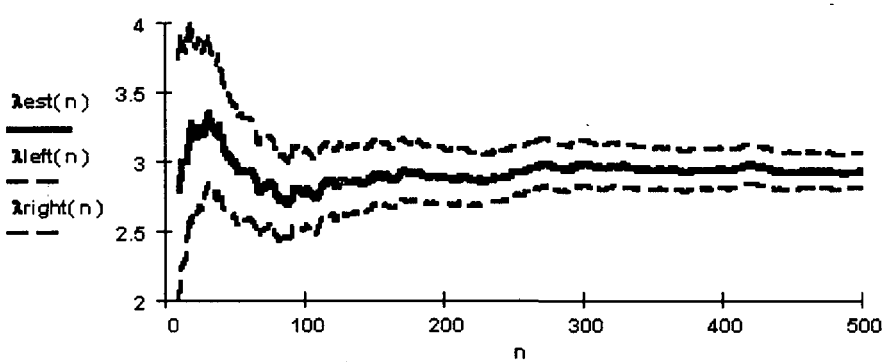
$p_j := Pmin + \frac{\Delta}{2}\cdot(2\cdot j - 1) \qquad f := hist(p, PS)$

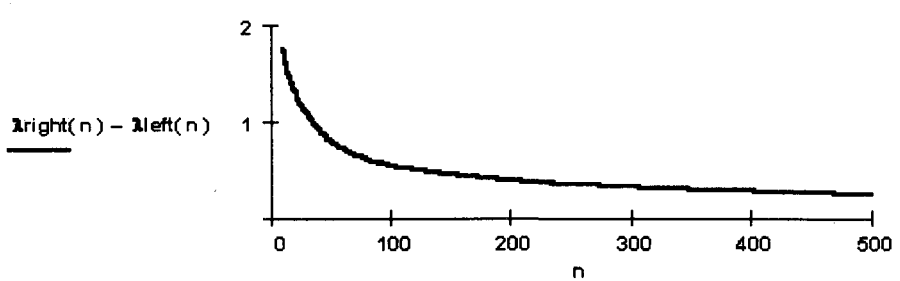


$x\alpha := qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) \qquad x\alpha = 1.645 \qquad n := 10..500$

$\lambda est(n) := \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} P_j \qquad \lambda est(50) = 3 \qquad \lambda est(100) = 2.77$

$\lambda left(n) := \left(\sqrt{\lambda est(n)} - \frac{x\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2 \qquad \lambda right(n) := \left(\sqrt{\lambda est(n)} + \frac{x\alpha}{2\sqrt{n}}\right)^2$





Таким образом, для выборки из 500 значений случайной величины, имеющей пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 3$, получен следующий 90%-ный доверительный интервал для параметра λ: (2.811, 3.063).

Доверительный интервал для вероятности

В практических задачах достаточно часто возникает необходимость строить доверительные интервалы для оценки неизвестной вероятности события. Выше уже отмечалось, что точечной оценкой вероятности события в схеме независимых испытаний Бернулли является величина $\widehat{p} = \frac{m}{n}$, где n — число испытаний, а m — число появлений события в серии из n испытаний.

Если x_α— решение уравнения $\Phi(x_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, то с вероятностью $P \approx 1 - \alpha$ неизвестный параметр p накрывается интервалом

$$\left(\sin^2\left(\arcsin\sqrt{\widehat{p}} - \frac{x_\alpha}{2\sqrt{n}}\right),\ \sin^2\left(\arcsin\sqrt{\widehat{p}} + \frac{x_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)\right).$$

С ростом объема выборки n растет и точность вычисления границ доверительного интервала.

ЗАДАНИЕ 6.13

Найдите доверительный интервал для вероятности события по заданным значениям числа испытаний n и числа m появлений события в серии из n испытаний.

Порядок выполнения задания

1. Найдите для заданного значения доверительной вероятности α квантиль уровня $1 - 0.5\alpha$ стандартного нормального распределения.
2. Найдите точечную оценку параметра p.
3. Вычислите доверительный интервал для параметра p с заданным значением доверительной вероятности α.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислением доверительного интервала для p с доверительной вероятностью $\alpha = 0.1$ приведен ниже.

$$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad \alpha := 0.1 \qquad n := 100 \qquad m := 50$$

$$x\alpha := \mathrm{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) \qquad x\alpha = 1.645 \qquad p := \frac{m}{n} \qquad p = 0.5$$

$$pleft := \left[\sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - acos\left(\sqrt{p}\right)\right) - \frac{x\alpha}{2\cdot\sqrt{n}}\right]\right]^2 \qquad pleft = 0.418$$

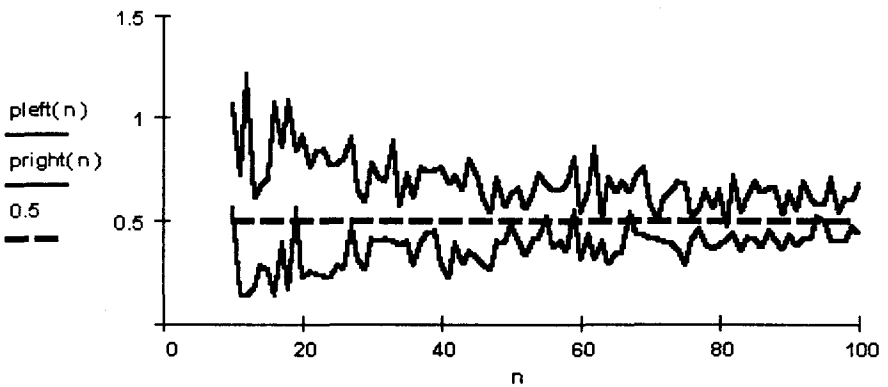
$$pright := \left[\sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - acos\left(\sqrt{p}\right)\right)\right) + \frac{x\alpha}{2\cdot\sqrt{n}}\right]^2 \qquad pright = 0.623$$

Доверительный интервал для параметра p: $(0.436, 0.595)$

$$n := 10..100 \qquad m(n) := rbinom(10, n, 0.5)_1 \qquad p(n) := \frac{m(n)}{n}$$

$$pleft(n) := \left[\sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - acos\left(\sqrt{p(n)}\right)\right) - \frac{x\alpha}{2\cdot\sqrt{n}}\right]\right]^2$$

$$pright(n) := \left[\sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - acos\left(\sqrt{p(n)}\right)\right)\right) + \frac{x\alpha}{2\cdot\sqrt{n}}\right]^2$$



Доверительный интервал для коэффициента корреляции

В заключение приведем алгоритм построения доверительного интервала для коэффициента корреляции. Пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) — выборка объема n из двумерной случайной величины (ξ, η). Точечной оценкой коэффициента корреляции $k_{\xi\eta}$ является выборочный коэффициент корреляции $\widehat{k}$, который вычисляется следующим образом. Сначала находятся выборочные средние

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Затем рассчитываются величины

$$\overline{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}), \quad \widehat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2, \quad \widehat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

и, наконец, находится

$$\widehat{k} = \frac{\overline{m}}{\sqrt{\widehat{\sigma}_x^2 \widehat{\sigma}_y^2}}.$$

Если, как обычно, x_α — решение уравнения $\Phi(x_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$, то доверительный интервал, накрывающий коэффициент корреляции $k_{\xi\eta}$ с вероятностью $P \approx 1 - \alpha$, имеет вид

$$\left(\theta\left(\operatorname{arth}\widehat{k} - \frac{x_\alpha}{\sqrt{n-3}}\right),\ \theta\left(\operatorname{arth}\widehat{k} + \frac{x_\alpha}{\sqrt{n-3}}\right)\right).$$

Здесь $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ — гиперболический тангенс, а $\operatorname{arth} x$ — обратная гиперболическому тангенсу функция, которую можно найти из уравнения $\operatorname{th} y = x$.

Найденный доверительный интервал, конечно, приближенный. Однако уже при небольших объемах выборки он практически не отличается от точного.

Замечание. Точечную оценку для коэффициента корреляции можно вычислить по формуле

$$\widehat{k} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right)}}.$$

ЗАДАНИЕ 6.14

Найдите доверительный интервал для коэффициента корреляции по заданной выборке $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ из двумерной случайной величины.

Порядок выполнения задания

1. Определите и введите компоненты вектора выборочных значений случайной величины.
2. Вычислите выборочные средние для x и y.
3. Вычислите величины $\overline{m}$, $\widehat{\sigma}_x^2$ и $\widehat{\sigma}_y^2$.

4. Найдите для заданного значения доверительной вероятности α квантиль уровня $1 - 0.5\alpha$ стандартного нормального распределения.
5. Найдите точечную оценку коэффициента корреляции.
6. Вычислите доверительный интервал для коэффициента корреляции с заданным значением доверительной вероятности α.
7. Найдите точечную оценку коэффициента корреляции по другой формуле.
8. Вычислите доверительный интервал для коэффициента корреляции с заданным значением доверительной вероятности α, используя точечную оценку коэффициента корреляции, найденную в п. 7.

Пример выполнения задания

Найдите доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии выборки, заданной в нижеследующей таблице.

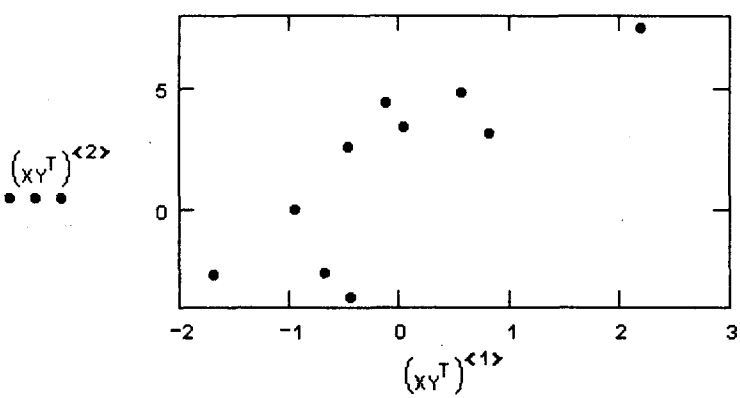
x	−0.439	−0.679	−0.473	−0.951	−1.686	0.044	−0.121	0.556	2.192	0.809
y	−3.580	−2.573	2.566	−0.035	−2.667	3.385	4.4	4.825	7.506	3.189

Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями доверительных интервалов приведен ниже.

$$\mathbf{ORIGIN} := 1$$

$$\alpha := 0.1 \qquad n := 10 \qquad x\alpha := \mathrm{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) \qquad x\alpha = 1.645$$

$$XY := \begin{bmatrix} -0.439 & -0.679 & -0.473 & -0.951 & -1.686 & 0.044 & -0.121 & 0.556 & 2.192 & 0.809 \\ -3.580 & -2.573 & 2.566 & -0.035 & -2.667 & 3.385 & 4.4 & 4.825 & 7.506 & 3.189 \end{bmatrix}$$



$$Xmean := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} XY_{1,i} \qquad Ymean := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} XY_{2,i}$$

$$m := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} \left(XY_{1,i} - Xmean\right)\cdot\left(XY_{2,i} - Ymean\right)$$

$$\sigma 2x := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} \left(XY_{1,i} - Xmean\right)^2 \qquad \sigma 2y := \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} \left(XY_{2,i} - Ymean\right)^2$$

$$k := \frac{m}{\sqrt{\sigma 2x\cdot\sigma 2y}} \qquad k = 0.813$$

$$kleft := \tanh\left(atanh(k) - \frac{x\alpha}{\sqrt{n-3}}\right) \qquad kleft = 0.474$$

$$kright := \tanh\left(atanh(k) + \frac{x\alpha}{\sqrt{n-3}}\right) \qquad kright = 0.942$$

Доверительный интервал для коэффициента корреляции:
$(0.474, 0.942)$

$$k := \frac{\sum_{i=1}^{n} XY_{1,i}\cdot XY_{2,i} - \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} XY_{1,i}\cdot\sum_{i=1}^{n} XY_{2,i}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(XY_{1,i}\right)^2 - \frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} XY_{1,i}\right)^2\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\left(XY_{2,i}\right)^2 - \frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} XY_{2,i}\right)^2\right]}}$$

$k = 0.813$

$$kmin := \tanh\left(atanh(k) - \frac{x\alpha}{\sqrt{n-3}}\right) \qquad kmin = 0.474$$

$$kmax := \tanh\left(atanh(k) + \frac{x\alpha}{\sqrt{n-3}}\right) \qquad kmax = 0.942$$

Доверительный интервал для коэффициента корреляции:
$(0.474, 0.942)$

Обратим внимание на следующую закономерность: при заданной доверительной вероятности с ростом объема выборки ширина доверительного интервала уменьшается и при $n \to \infty$ стремится к нулю. При заданном объеме выборки с ростом доверительной вероятности ширина доверительного интервала тоже растет. Это означает, что, чем надежнее оценка, тем меньше точность этой оценки. И, наоборот, чем выше точность оценки, тем меньше ее надежность (достоверность).

6.6 ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРАХ НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть дана некоторая оценка $\widehat{\theta}$, построенная по выборке из случайной величины ξ. Есть основания считать, что истинное значение оцениваемого параметра равно θ_0. Однако выборочное значение $\widehat{\theta}$ вряд ли будет совпадать с θ_0, поскольку $\widehat{\theta}$ — случайная величина. В связи с этим возникает вопрос, при каком отклонении $\widehat{\theta}$ от θ_0 и с какой степенью уверенности можно утверждать, что истинное значение оцениваемого параметра θ отлично от θ_0. Ответом на этот вопрос может служить вероятность (вычисленная в предположении $\theta = \theta_0$) того, что $\widehat{\theta} - \theta_0$ больше некоторого фиксированного числа, о величине которого будет сказано ниже. Если эта вероятность мала, то мы являемся свидетелями маловероятного события, т.е. отличие *эмпирического* значения $\widehat{\theta}$ от *гипотетического* значения θ_0 представляется *значимым*, и гипотеза о том, что $\theta = \theta_0$, должна быть отвергнута. Если же эта вероятность велика, то отклонение $\widehat{\theta}$ от θ_0, по-видимому, обусловлено естественной случайностью, и, следовательно, гипотеза о том, что $\theta = \theta_0$, может быть принята.

Рассмотрим простой пример. Предположим, что нужно проверить игральную кость. Если кость "честная", то вероятность выпадения каждой грани равна 1/6. Отсюда следует, что при 600 бросках каждая грань должна выпасть около 100 раз. Если в результате получим, что грань с цифрой 1 выпала 100 раз, с цифрой 2 — 99 раз, с цифрой 3 — 98, с цифрой 4 — 102, с цифрой 5 — 100 и с цифрой 6 — 101 раз, то вряд ли кто-нибудь усомнится в том, что кость "правильная". Если же, скажем, 1 выпала 600 раз, то, хотя вероятность такого исхода отлична от нуля, вряд ли кто-нибудь поверит в "правильность" кости.

Наша задача состоит в выработке общего подхода к процедуре, которая называется проверкой гипотез. Пусть $\widehat{\theta}$ — выборочное значе-

ние оцениваемого параметра θ и пусть $p_{\widehat{\theta}}$ — плотность вероятностей случайной величины $\widehat{\theta}$ при условии, что $\theta = \theta_0$.

На рис. 6.4 изображен график функции $p_{\widehat{\theta}}$, на котором отмечены точки θ_{left} и θ_{right}, для которых выполнены условия: $P(\widehat{\theta} < \theta_{left}) = 0.5\alpha$, $P(\widehat{\theta} > \theta_{right}) = 0.5\alpha$, где α — некоторое малое число. Это число имеет простой смысл: если вероятность события не превышает α, то событие маловероятно и мы не можем стать свидетелем такого события, т.е. если вычисленное значение $\widehat{\theta}$ окажется вне промежутка $(\theta_{left}, \theta_{right})$, то есть все основания усомниться в том, что истинное значение параметра θ равно θ_0*, и в этом случае гипотезу о том, что $\theta = \theta_0$, следует отвергнуть(отклонить). Если же $\widehat{\theta}$ попадает в интервал $(\theta_{left}, \theta_{right})$, то гипотеза о том, что $\theta = \theta_0$, может быть принята. Вероятность α, использованная при вычислении интервала $(\theta_{left}, \theta_{right})$, называется *уровнем значимости*; области значений $\widehat{\theta}$, при которых гипотеза отвергается или принимается, называются соответственно *областью отклонения* (*критической областью*) и *областью принятия гипотезы*.

Рис. 6.4. Области принятия и отклонения гипотез

В приведенном на рис. 6.4 примере критерий проверки гипотезы был *двусторонним*, поскольку значимыми были отклонения $\widehat{\theta}$ от θ_0 в обе стороны. Если отклонения значимы только в одну сторону ($\widehat{\theta} > \theta_0$ или $\widehat{\theta} < \theta_0$), то строятся *односторонние критерии*.

Следует обратить внимание на то, что в рассматриваемых нами задачах принятие или отклонение гипотезы не носят категорического характера. Решение об отклонении или принятии гипотезы может оказаться ошибочным: гипотеза отклоняется, хотя она на самом деле верна (ошибка *первого рода*), и гипотеза принимается, хотя она на самом деле неверна (ошибка *второго рода*).

*Очень важно помнить, что все вычисления выполнены при условии $\theta = \theta_0$.

Проверка гипотезы о числовом значении математического ожидания при известной дисперсии

Пусть $M\xi = a$ — неизвестная величина, а дисперсия $D\xi = \sigma^2$ известна. Сформулируем нулевую гипотезу H_0 о том, что неизвестный параметр a равен заданному числу a_0, т.е. H_0: $a = a_0$. Альтернативную гипотезу H_1 можно сформулировать тремя способами:

1) H_1: $a \neq a_0$;
2) H_1: $a > a_0$;
3) H_1: $a < a_0$.

Рассмотрим подробно каждый из этих трех случаев.

Обратимся к первому случаю: нулевая гипотеза H_0: $a = a_0$ и альтернативная гипотеза H_1: $a \neq a_0$. Зададимся некоторым уровнем значимости α и вычислим по выборке $\widehat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значение критерия

$$\varphi = \frac{\overline{x} - a_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}}.$$

Если гипотеза H_0 верна, то случайная величина φ имеет стандартное нормальное распределение, и здравый смысл подсказывает, что в большинстве экспериментов величина φ будет мало отличаться от нуля. Если же ее отклонения от нуля велики, то это, скорее всего, указывает на ошибочность гипотезы H_0. Придадим приведенным соображениям более четкую форму.

Выделим для критерия φ *критическую область*, т.е. укажем такие значения φ, при которых гипотезу H_0 следует отвергнуть. На рис. 6.5 изображена плотность распределения критерия φ (плотность стандартного нормального распределения).

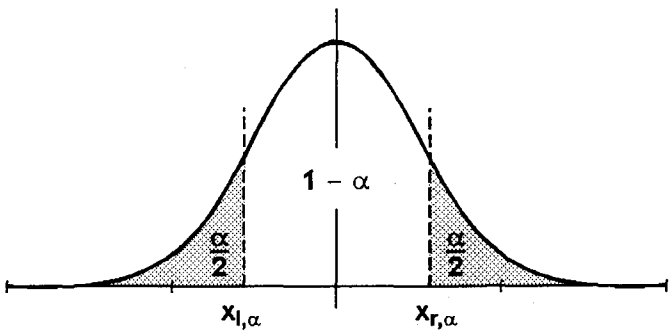


Рис. 6.5. Критическая область для альтернативной гипотезы H_1: $a \neq a_0$

Определим границы критической области $x_{l,\alpha}$ и $x_{r,\alpha}$ так, чтобы

$$P(\varphi < x_{l,\alpha}) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{и} \quad P(\varphi > x_{r,\alpha}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Критические точки $x_{l,\alpha}$ и $x_{r,\alpha}$ расположены симметрично относительно нуля, правая является корнем уравнения $\Phi(x_{r,\alpha}) = 1 - 0.5\alpha$, а левая вычисляется по формуле $x_{l,\alpha} = -x_{r,\alpha}$.

Когда критическая область найдена, можно вычислить по выборке значение критерия φ и проверить, попадает ли оно в критическую область.

Если $\varphi < x_{l,\alpha}$ или $\varphi > x_{r,\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. Если же $x_{l,\alpha} < \varphi < x_{r,\alpha}$, то принимается гипотеза H_0.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий проверку гипотезы о величине математического ожидания нормально распределенной случайной величины H_0: $a = 1$ при альтернативной гипотезе H_1: $a \neq 1$.

ORIGIN := 1

α := 0.1 N := 100 ξ := rnorm(N,1,2) σ := 2

Xmean := mean(ξ) **Xmean = 0.699**

Xright := qnorm$\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right)$ **Xleft := - Xright**

Xright = 1.645 **Xleft = −1.645**

$$\phi 1 := \frac{\text{Xmean} - 1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}} \qquad \phi 1 = -1.505$$

Гипотеза H_0: Mξ=1 принимается

Указание. Сначала с помощью функции rnorm(N, m, σ) сгенерирована выборка объема N = 100 из значений случайной величины, имеющей нормальное распределение $N(1,2)$. Для уровня значимости $\alpha = 0.1$ вычислены границы критической области, Xright = 1.645, Xleft = −1.645, и оценка математического ожидания Xmean = 1.12. Высказана нулевая гипотеза о том, что значение параметра $M\xi = a$ равно $a_0 = 1$, т.е. H_0: $a_0 = 1$. Затем вычислено значение критерия $\varphi = -1.505$ и, поскольку $-1.505 \in (-1.645, 1.645)$, нулевая гипотеза принимается на уровне значимости $\alpha = 0.1$.

Рассмотрим второй случай с нулевой гипотезой H_0: $a = a_0$ и альтернативной гипотезой H_1: $a > a_0$. Снова зададимся некоторым уровнем значимости α и вычислим по выборке $\widehat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значение критерия

$$\varphi = \frac{\overline{x} - a_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}},$$

где $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

В рассматриваемом случае критическая область значений критерия φ, при которых гипотеза H_0 отвергается, правосторонняя (рис. 6.6).

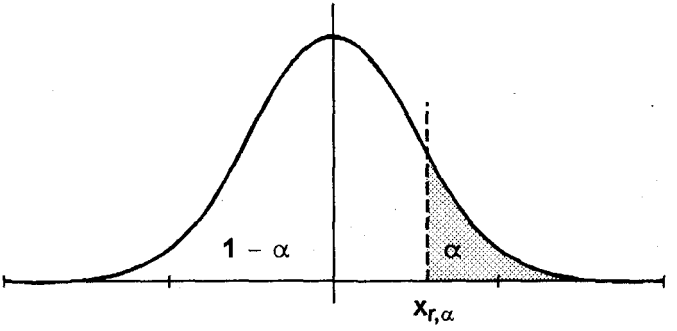


Рис. 6.6. Критическая область для альтернативной гипотезы H_1: $a > a_0$

Критическая точка удовлетворяет условию $P(\varphi > x_{r,\alpha}) = \alpha$ и находится как решение уравнения $\Phi(x_{r,\alpha}) = 1 - \alpha$.

Когда критическая область найдена, можно вычислить по выборке значение критерия φ и проверить, попадает ли оно в критическую область. Если $\varphi > x_{r,\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. Если же $\varphi < x_{r,\alpha}$, то гипотеза H_0 не отвергается.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий проверку гипотезы H_0: $a = a_1$ о величине математического ожидания a нормально распределенной случайной величины при альтернативной гипотезе H_1: $a > a_1$.

```
ORIGIN := 1

α := 0.05      N := 100      X := rnorm(N,1,0.2)      σ := 0.2

Xmean := mean(X)                    Xmean = 0.972

Xright := qnorm(1 - α,0,1)          Xright = 1.645
```

$$\phi := \frac{Xmean - 1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}} \qquad \phi = -1.391$$

Гипотеза H_0: $M\xi=1$ принимается, поскольку $-1.391 < 1.645$

В третьем случае с нулевой гипотезой H_0: $a = a_0$ и альтернативной гипотезой H_1: $a < a_1$ опять зададимся некоторым уровнем значимости α и вычислим по выборке $\widehat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значение критерия

$$\varphi = \frac{\overline{x} - a_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}},$$

где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

В рассматриваемом случае критическая область значений критерия φ, при которых гипотеза H_0 отвергается, левосторонняя (рис. 6.7).

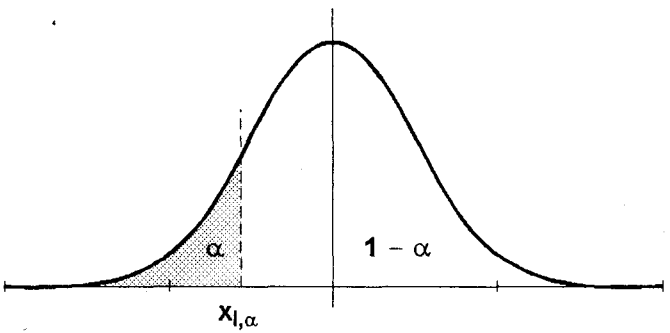


Рис. 6.7. Критическая область для альтернативной гипотезы H_1: $a < a_0$

Критическая точка удовлетворяет условию $P(\varphi < x_{l,\alpha}) = \alpha$ и находится по формуле $x_{l,\alpha} = -x_{r,\alpha}$, где $x_{r,\alpha}$ — решение уравнения $\Phi(x_{r,\alpha}) = 1 - \alpha$. Когда критическая область найдена, можно вычислить по выборке значение критерия φ и проверить, попадает ли оно в критическую область. Если $\varphi < x_{l,\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. Если же $\varphi > x_{l,\alpha}$, то гипотеза H_0 не отвергается.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий проверку гипотезы о величине математического ожидания a нормально распределенной случайной величины H_0: $a = 6$ при альтернативной гипотезе H_1: $a < 6$.

```
ORIGIN := 1

α := 0.05    N := 100    X := rnorm(N,5,1)    σ := 1
```

$Xmean := mean(X)$ $\quad Xmean = 4.85$

$Xright := qnorm(1 - \alpha, 0, 1)$ $\quad Xleft := -Xright$ $\quad Xleft = -1.645$

$$\phi := \frac{Xmean - 6}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}} \qquad \phi = -11.505$$

Гипотеза H_0: $M\xi=6$ отвергается, поскольку $-11.505 < -1.645$

ЗАДАНИЕ 6.15

Смоделируйте выборку 100 значений нормально распределенной случайной величины с указанными параметрами. Сформулируйте нулевую гипотезу о величине математического ожидания и проверьте для заданных уровней значимости три альтернативные гипотезы.

Порядок выполнения задания

1. Смоделируйте описанную в условии выборку.
2. Найдите по выборке точечную оценку математического ожидания.
3. Сформулируйте нулевую гипотезу о значении математического ожидания H_0: $a = a_0$.
4. Вычислите значение критерия.
5. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $a \neq a_0$.
6. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.
7. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $a > a_0$.
8. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.
9. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $a < a_0$.
10. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.

Пример выполнения задания

В каждом из приведенных выше трех фрагментов рабочих документов Mathcad произведены проверки для одной из альтернативных гипотез.

Проверка гипотезы о числовом значении математического ожидания при неизвестной дисперсии

Методика проверки гипотез в этом случае практически не отличается от описанной выше. Однако теперь критерий φ имеет распределение Стьюдента, а не стандартное нормальное, как в предыдущем случае.

Если $\widehat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — выборка из нормального распределения и величины $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ и $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, то при проверке нулевой гипотезы H_0: $a = a_0$ используется критерий

$$\varphi = \frac{\overline{x} - a_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}},$$

который при выполнении гипотезы H_0 имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $n-1$.

Как и в описанной выше методике, рассмотрим три случая альтернативных гипотез при проверке гипотезы H_0: $a = a_0$:

1) H_1: $a \neq a_0$;
2) H_1: $a > a_0$;
3) H_1: $a < a_0$.

В первом из этих случаев, H_1: $a \neq a_0$, критическая область двусторонняя и ее границы определяются из условий $P(\varphi < x_{l,\alpha}) = 0.5\alpha$ и $P(\varphi > x_{r,\alpha}) = 0.5\alpha$. Причем в силу симметричности распределения Стьюдента достаточно вычислить только $x_{r,\alpha}$, поскольку $x_{l,\alpha} = -x_{r,\alpha}$.

Зададимся некоторым уровнем значимости α и вычислим значение $x_{r,\alpha}$ как решение уравнения $F_{n-1}(x_{r,\alpha}) = 1 - 0.5\alpha$, где $F_{n-1}(x)$ — функция распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Когда критическая область найдена, можно вычислить по выборке значение критерия φ и проверить, попадает ли оно в критическую область. Если $\varphi < x_{l,\alpha}$ или $\varphi > x_{r,\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. Если же $x_{l,\alpha} < \varphi < x_{r,\alpha}$, то принимается гипотеза H_0.

Во втором случае, когда альтернативной является гипотеза H_1: $a > a_0$, критическая область значений критерия φ, при которых гипотеза H_0 отвергается, правосторонняя. Она представляет собой интервал $(x_{r,\alpha}, +\infty)$, где критическая точка удовлетворяет условию $P(\varphi > x_{r,\alpha}) = \alpha$ и находится как решение уравнения $F_{n-1}(x_{r,\alpha}) = 1 - \alpha$ при некоторым заданном уровне значимости α.

Теперь вычислим по выборке $\widehat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значение критерия

$$\varphi = \frac{\overline{x} - a_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}},$$

где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ и $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, и проверим, попадает ли оно в критическую область. Если $\varphi > x_{r,\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1.

В третьем случае альтернативной гипотезы H_1: $a < a_0$ критическая область левосторонняя и представляет собой интервал $(-\infty, x_{l,\alpha})$. Критическая точка $x_{l,\alpha}$ удовлетворяет условию $P(\varphi < x_{l,\alpha}) = \alpha$ и находится по формуле $x_{l,\alpha} = -x_{r,\alpha}$, где $x_{r,\alpha}$ — решение уравнения $F_{n-1}(x_{r,\alpha}) = 1 - \alpha$.

Если выборочное значение критерия попадает в критическую область, т.е. $\varphi < x_{l,\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. Если же $\varphi > x_{l,\alpha}$, то гипотеза H_0 не отвергается.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий проверку гипотезы H_0: $a = a_0$ о величине математического ожидания a нормально распределенной случайной величины для всех трех альтернативных гипотез H_1. Вычисления выполнены для выборки объемом 20, представленной в следующей таблице.

4.277	4.483	5.558	4.755	5.09	6.262	4.294	5.002	6.108	5.893
2.099	2.843	5.206	4.384	3.802	5.099	5.771	5.306	5.011	4.236

Выборочные значения сохранены в файле **data.txt** в папке **tmp** на диске **c:**.

ORIGIN := 1 **α := 0.1** **N := 20**

i := 1..20 **X_i := READ("c:\tmp\data.txt")**

Xmean := mean(X) **Xmean = 5.026**

$$s := \sqrt{\frac{N}{N-1}\cdot \mathrm{var}(X)} \qquad s = 0.967$$

Гипотеза H_1 : a≠5.5

$$Xright := \mathrm{qt}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 1\right) \qquad Xleft := -Xright \qquad Xleft = -1.729$$

$$\phi := \frac{Xmean - 5.5}{\sqrt{\frac{s^2}{N}}} \qquad \phi = -2.19$$

Гипотеза H_0 : a=5.5 отвергается, поскольку -2.19<-1.729, принимается альтернативная гипотеза a≠5.5.

Гипотеза H_1 : a>5.5

$Xright := qt(1 - \alpha, N - 1)$ $\quad Xright = 1.328$

$$\phi := \frac{Xmean - 5.5}{\sqrt{\frac{s^2}{N}}} \qquad \phi = -2.19$$

Гипотеза H_0 : a=5.5 принимается, поскольку -2.19<1.328, отвергается альтернативная гипотеза a>5.5.

Гипотеза H_1 : a<5.5

$Xright := qt(1 - \alpha, N - 1)$ $\quad Xleft := -Xright$ $\quad Xleft = -1.328$

$$\phi := \frac{Xmean - 5.5}{\sqrt{\frac{s^2}{N}}} \qquad \phi = -2.19$$

Гипотеза H_0 : a=5.5 отвергается, поскольку -2.19<-1.328, принимается альтернатива a<5.5

ЗАДАНИЕ 6.16

Смоделируйте выборку 100 значений нормально распределенной случайной величины с указанными параметрами. Сформулируйте нулевую гипотезу о величине математического ожидания и проверьте для заданных уровней значимости три альтернативные гипотезы.

Порядок выполнения задания

1. Смоделируйте описанную в условии выборку.
2. Найдите по выборке точечную оценку математического ожидания.
3. Найдите по выборке точечную оценку дисперсии.
4. Сформулируйте нулевую гипотезу о значении математического ожидания H_0: $a = a_0$.
5. Вычислите значение критерия.
6. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $a \neq a_0$.
7. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.

8. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $a > a_0$.
9. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.
10. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $a < a_0$.
11. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисления для выборки из файла **c:\tmp\data.txt**, приведен выше.

Проверка гипотезы о числовом значении дисперсии

Пусть $\widehat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — выборка объема n из нормального распределения. Требуется проверить нулевую гипотезу о том, что параметр нормального распределения σ^2 равен заранее заданному числу σ_0^2, т.е. H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$.

В процедуре проверки гипотезы используется критерий

$$\varphi = (n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2},$$

где $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ — несмещенная точечная оценка дисперсии, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ — оценка математического ожидания. Поскольку рассматривается выборка из нормального распределения, то критерий φ имеет χ^2-распределение с $n-1$ степенями свободы.

Как и ранее, рассмотрим три случая альтернативных гипотез при проверке гипотезы H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$:

1) H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$;
2) H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$;
3) H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$.

В первом из этих случаев, H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, критическая область двусторонняя (рис. 6.8) и ее границы определяются из условий $P(\varphi < x_{l,\alpha}) = 0.5\alpha$ и $P(\varphi > x_{r,\alpha}) = 0.5\alpha$.

Зададимся некоторым уровнем значимости α и найдем значение $x_{l,\alpha}$ как решение уравнения $F_{n-1}(x_{l,\alpha}) = 0.5\alpha$, а $x_{r,\alpha}$ — как решение уравнения $F_{n-1}(x_{r,\alpha}) = 1 - 0.5\alpha$, где $F_{n-1}(x)$ — функция χ^2-распределения с $n-1$ степенями свободы. Когда критическая область найдена,

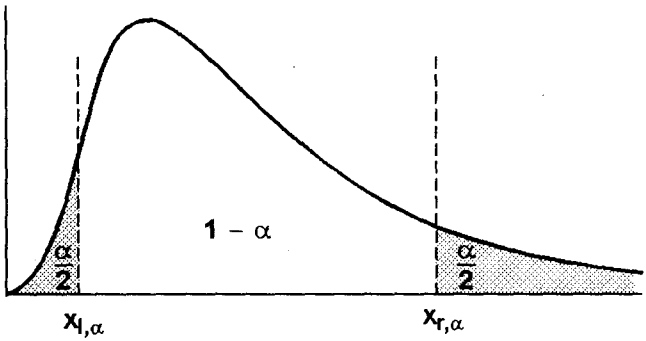


Рис. 6.8. Критическая область для альтернативной гипотезы H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

можно вычислить по выборке значение критерия φ и проверить, попадает ли оно в критическую область. Если $\varphi < x_{l,\alpha}$ или $\varphi > x_{r,\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. Если же $x_{l,\alpha} < \varphi < x_{r,\alpha}$, то принимается гипотеза H_0.

Во втором случае, когда альтернативная гипотеза H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$, критическая область значений критерия φ, при которых гипотеза H_0 отвергается, правосторонняя и представляет собой интервал $(x_{r,\alpha}, +\infty)$, где критическая точка удовлетворяет условию $P(\varphi > x_{r,\alpha}) = \alpha$ и находится как решение уравнения $F_{n-1}(x_{r,\alpha}) = 1 - \alpha$ при некотором заданном уровне значимости α.

Теперь вычислим по выборке $\widehat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ значение критерия φ и проверим, попадает ли оно в критическую область. Если $\varphi > x_{r,\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1.

В третьем случае альтернативной гипотезы H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$ критическая область левосторонняя и представляет собой интервал $(0, x_{l,\alpha})$, где критическая точка $x_{l,\alpha}$ удовлетворяет условию $P(\varphi < x_{r,\alpha}) = \alpha$ и находится как решение уравнения $F_{n-1}(x_{l,\alpha}) = \alpha$. Если выборочное значение критерия попадает в критическую область, т.е. $\varphi < x_{l,\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. Если же $\varphi > x_{l,\alpha}$, то гипотеза H_0 не отвергается.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий проверку гипотезы H_0: $\sigma^2 = 4$ о величине дисперсии нормально распределенной случайной величины для всех трех альтернативных гипотез H_1: $\sigma^2 \neq 4$, H_1: $\sigma^2 > 4$, H_1: $\sigma^2 < 4$ для выборки, рассмотренной в предыдущем примере.

```
ORIGIN := 1        α := 0.1        N := 20

i := 1..20         X_i := READ("c:\tmp\data.txt")
```

$Xmean := mean(X)$ $\quad Xmean = 5.026$

$s := \sqrt{\frac{N}{N-1} \cdot var(X)}$ $\quad s = 0.967$

Гипотеза $H_1 : \sigma^2 \neq 4$

$Xright := qchisq\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 1\right)$ $\quad Xleft := qchisq\left(\frac{\alpha}{2}, N - 1\right)$

$Xright = 30.144$ $\quad Xleft = 10.117$

$\phi := (N - 1) \cdot \frac{s^2}{4}$ $\quad \phi = 4.442$

Гипотеза $H_0 : \sigma^2 = 4$ отвергается, поскольку $4.442 < 10.117$

Гипотеза $H_1 : \sigma^2 > 4$

$Xright := qchisq(1 - \alpha, N - 1)$ $\quad Xright = 27.204$

$\phi := (N - 1) \cdot \frac{s^2}{4}$ $\quad \phi = 4.442$

Гипотеза $H_0 : \sigma^2 = 4$ принимается, поскольку $4.442 < 27.204$

Гипотеза $H_1 : \sigma^2 < 4$

$Xleft := qchisq(\alpha, N - 1)$ $\quad Xleft = 11.651$

$\phi := (N - 1) \cdot \frac{s^2}{4}$ $\quad \phi = 4.442$

Гипотеза $H_0 : \sigma^2 = 4$ отвергается, поскольку $4.442 < 11.651$

ЗАДАНИЕ 6.17

Смоделируйте выборку 100 значений нормально распределенной случайной величины с указанными параметрами. Сформулируйте нулевую гипотезу о величине дисперсии и проверьте для заданных уровней значимости три альтернативные гипотезы.

Порядок выполнения задания

1. Смоделируйте описанную в условии выборку.
2. Найдите по выборке точечную оценку математического ожидания.

3. Найдите по выборке точечную оценку дисперсии.
4. Сформулируйте нулевую гипотезу о значении математического ожидания H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$.
5. Вычислите значение критерия.
6. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$.
7. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.
8. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$.
9. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.
10. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$.
11. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями для выборки, записанной в файле **c:\tmp\data.txt**, приведен выше.

Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий при известных дисперсиях

Пусть $\widehat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — выборка объема n из случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение с параметрами a_ξ и σ_ξ^2, причем значение параметра a_ξ неизвестно, а значение σ_ξ^2 известно.

Аналогично пусть $\widehat{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — выборка объема m из случайной величины η, имеющей нормальное распределение с неизвестным параметром a_η и известным параметром σ_η^2.

Будем считать, что случайные величины ξ и η независимы. В этих условиях необходимо проверить гипотезу H_0: $a_\xi = a_\eta$.

Прежде всего построим критерий проверки этой гипотезы. Обратимся к величинам

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} y_j, \qquad \overline{x} - \overline{y}.$$

Легко показать, что $\overline{x}$ имеет нормальное распределение с параметрами $M\overline{x} = a_\xi$ и $D\overline{x} = \frac{\sigma_\xi^2}{n}$, величина $\overline{y}$ — нормальное распределение с

параметрами $M\overline{y} = a_\eta$ и $D\overline{y} = \frac{\sigma_\eta^2}{m}$, а $\overline{x} - \overline{y}$ — нормальное распределение с параметрами $M(\overline{x} - \overline{y}) = a_\xi - a_\eta$ и $D(\overline{x} - \overline{y}) = \frac{\sigma_\xi^2}{n} + \frac{\sigma_\eta^2}{m}$.

Если гипотеза H_0: $a_\xi = a_\eta$ верна, то величина

$$\varphi = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_\xi^2}{n} + \frac{\sigma_\eta^2}{m}}}$$

подчинена стандартному нормальному распределению $N(0,1)$.

Остановимся только на одном варианте альтернативной гипотезы H_1: $a_\xi \neq a_\eta$. (С остальными двумя случаями читатель легко справится самостоятельно.) Зададимся некоторым уровнем значимости α. В рассматриваемом случае альтернативной гипотезы критическая область двусторонняя (см. рис. 6.8) и ее границы определяются из условий $P(\varphi < x_{l,\alpha}) = 0.5\alpha$ и $P(\varphi > x_{r,\alpha}) = 0.5\alpha$, т.е. $x_{l,\alpha} = -x_{r,\alpha}$, а $x_{r,\alpha}$ — решение уравнения $\Phi(x_{r,\alpha}) = 1 - 0.5\alpha$, где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального распределения. Когда критическая область найдена, можно вычислить по выборке значение критерия φ и проверить, попадает ли оно в критическую область. Если $\varphi < x_{l,\alpha}$ или $\varphi > x_{r,\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. Если же $x_{l,\alpha} < \varphi < x_{r,\alpha}$, то принимается гипотеза H_0.

Замечание. Рассмотренная задача чрезвычайно важна в приложениях. Например, на двух предприятиях производятся одинаковые товары и среднее значение некоторого параметра в контрольной партии с одного предприятия отличается от значения того же параметра, полученного при обследовании второго предприятия. Возникает вопрос: эти различия статистически значимы или нет, т.е. различия обусловлены только случайными факторами или организацией производства на предприятиях?

Рассмотрим две выборки из двух нормальных распределений с дисперсиями $\sigma_1^2 = 2$ и $\sigma_2^2 = 3$. Выборки содержатся соответственно в файлах **data1.txt** и **data2.txt** в папке **tmp** на диске **c:**. Выборочные значения приведены ниже.

x	5.393	4.431	6.841	3.051	5.538	5.619	7.49	4.085	5.779	7.187
	2.424	6.85	3.517	5.649	3.512	3.243	5.6	2.29	4.825	5.584

y	8.539	3.871	5.334	6.825	6.322	6.34	6.902	7.425	7.613	7.554
	6.451	4.799	6.806	5.739	4.505					

Проверим гипотезу H_0 о равенстве математических ожиданий исследуемых распределений против альтернативной гипотезы о том, что они не равны.

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями представлен ниже.

$ORIGIN := 1$

$i := 1..20 \qquad X_i := READ("c:\tmp\data1.txt")$

$i := 1..15 \qquad Y_i := READ("c:\tmp\data2.txt")$

$\sigma x2 := 2 \qquad \sigma y2 := 3 \qquad N := 20 \qquad M := 15 \qquad \alpha := 0.1$

$Xmean := mean(X) \qquad Xmean = 5.026$

$Ymean := mean(Y) \qquad Ymean = 6.775$

$Xright := qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) \qquad Xright = 1.645$

$Xleft := -Xright \qquad Xleft = -1.645$

$$\phi := \frac{Xmean - Ymean}{\sqrt{\frac{\sigma x2}{N} + \frac{\sigma y2}{M}}} \qquad \phi = -3.193$$

Гипотеза о равенстве математических ожиданий отвергается, поскольку $\phi < Xleft$

Принимается альтернативная гипотеза о том, что математические ожидания не равны

ЗАДАНИЕ 6.18

Смоделируйте две выборки из 100 и 120 значений нормально распределенной случайной величины с указанными параметрами. Сформулируйте нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий и проверьте для заданных уровней значимости три альтернативные гипотезы.

Порядок выполнения задания

1. Смоделируйте описанные в задании выборки.
2. Найдите по выборкам точечные оценки математического ожидания.
3. Вычислите значение критерия.
4. Сформулируйте нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий.

5. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $a_\xi \neq a_\eta$.
6. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.
7. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $a_\xi > a_\eta$.
8. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.
9. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $a_\xi < a_\eta$.
10. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями для выборок, записанных в файлах **data1.txt** и **data2.txt**, приведен выше.

Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий при равных неизвестных дисперсиях

Здесь речь пойдет о выборке из двух нормальных распределений с равными, но неизвестными дисперсиями, для которой требуется проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий.

Пусть $\widehat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\widehat{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — выборки из генеральных совокупностей, отвечающих соответственно условиям $\xi \sim N(a_\xi, \sigma)$ и $\eta \sim N(a_\eta, \sigma)$. Вычислим значения следующих величин:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad s_\xi^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_j, \qquad s_\eta^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(y_j - \overline{y})^2.$$

Распределения этих случайных величин известны: величина $\overline{x}$ распределена нормально с параметрами a_ξ и $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, величина $\overline{y}$ — нормально с параметрами η и $\frac{\sigma}{\sqrt{m}}$, величина s_ξ^2 имеет χ^2-распределение с $n-1$ степенями свободы, а s_η^2 — χ^2-распределение с $m-1$ степенями свободы.

Поскольку случайные величины ξ и η независимы, то величина

$$\frac{(n-1)s_\xi^2}{\sigma^2} + \frac{(m-1)s_\eta^2}{\sigma^2}$$

имеет χ^2-распределение с $n+m-2$ степенями свободы, а величина $\overline{x}-\overline{y}$ распределена нормально, причем $M(\overline{x}-\overline{y})=a_\xi-a_\eta$ и $D(\overline{x}-\overline{y})=$ $=\dfrac{\sigma^2}{n}+\dfrac{\sigma^2}{m}$. В то же время центрированная и нормированная случайная величина

$$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(a_\xi-a_\eta)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}+\dfrac{\sigma^2}{m}}}$$

имеет стандартное нормальное распределение $N(0,1)$, а отношение

$$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(a_\xi-a_\eta)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}+\dfrac{\sigma^2}{m}}\sqrt{\left(\dfrac{(n-1)s_\xi^2}{\sigma^2}+\dfrac{(m-1)s_\eta^2}{\sigma^2}\right)\dfrac{1}{n+m-2}}}$$

имеет распределение Стьюдента с $n+m-2$ степенями свободы.

Если гипотеза H_0: $a_\xi=a_\eta$ верна, то величина

$$\varphi=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}\right)\dfrac{(n-1)s_\xi^2+(m-1)s_\eta^2}{n+m-2}}}$$

имеет распределение Стьюдента с $n+m-2$ степенями свободы. Эта величина используется в качестве критерия для проверки гипотезы H_0.

Зададимся уровнем значимости α и построим критическую область для альтернативной гипотезы H_1: $a_\xi\neq a_\eta$. Отметим, что в данном случае критическая область двусторонняя. Значение $x_{l,\alpha}$ находим как решение уравнения $F_{n+m-2}(x_{l,\alpha})=0.5\alpha$, а $x_{r,\alpha}$ — как решение уравнения $F_{n+m-2}(x_{r,\alpha})=1-0.5\alpha$, где $F_{n+m-2}(x)$ — функция распределения Стьюдента с $n+m-2$ степенями свободы. Когда критическая область найдена, можно вычислить по выборке значение критерия φ и проверить, попадает ли оно в критическую область. Если $\varphi<x_{l,\alpha}$ или $\varphi>x_{r,\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. Если же $x_{l,\alpha}<\varphi<x_{r,\alpha}$, то принимается гипотеза H_0.

Рассмотрим две выборки из двух нормальных распределений с одинаковыми дисперсиями. Выборки содержатся соответственно в файлах **data3.txt** и **data4.txt** в папке **tmp** на диске **c:**. Выборочные значения приведены ниже.

x	4.379	4.039	4.331	3.654	2.616	5.062	4.829	5.787	8.1	6.144
	6.393	6.219	6.295	5.952	3.523	5.098	3.931	5.985	4.743	4.089

y	5.14	6.09	5.433	5.016	3.919	4.421	4.047	4.813	6.44	5.255
	5.726	6.046	4.977	5.394	5.229					

Проверим гипотезу H_0 о равенстве математических ожиданий исследуемых распределений против альтернативной гипотезы о том, что они не равны. Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями представлен ниже.

$ORIGIN := 1$

$i := 1..20 \qquad X_i := READ(\text{"c:\tmp\data3.txt"})$

$i := 1..15 \qquad Y_i := READ(\text{"c:\tmp\data4.txt"})$

$N := 20 \qquad M := 15 \qquad \alpha := 0.1$

$Xmean := mean(X) \qquad Xmean = 5.058$

$Ymean := mean(Y) \qquad Ymean = 5.196$

$$s\xi 2 := \frac{1}{N-1}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - Xmean\right)^2 \qquad s\xi 2 = 1.682$$

$$s\eta 2 := \frac{1}{M-1}\cdot\sum_{i=1}^{M}\left(Y_i - Ymean\right)^2 \qquad s\eta 2 = 0.517$$

$$Xright := qt\left(1-\frac{\alpha}{2}, N+M-2\right) \qquad Xright = 1.692$$

$$Xleft := -Xright \qquad Xleft = -1.692$$

$$\phi := \frac{Xmean - Ymean}{\sqrt{\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{M}\right)\cdot\frac{(N-1)\cdot s\xi 2 + (M-1)\cdot s\eta 2}{N+M-2}}} \qquad \phi = -0.371$$

Гипотеза о равенстве математических ожиданий принимается, поскольку $Xleft < \phi < Xright$

ЗАДАНИЕ 6.19

Смоделируйте две выборки из 100 и 120 значений нормально распределенной случайной величины с указанными параметрами. Сформулируйте нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий и проверьте для заданного уровня значимости альтернативную гипотезу.

Порядок выполнения задания

1. Смоделируйте описанные в условии выборки.
2. Найдите по выборкам точечные оценки математического ожидания.
3. Вычислите значение критерия.
4. Сформулируйте нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий.
5. Найдите границы критической области для альтернативной гипотезы H_1: $a_\xi \neq a_\eta$.
6. Сравните значение критерия с границами критической области и сформулируйте соответствующее утверждение.

Пример выполнения задания

Фрагмент рабочего документа Mathcad с вычислениями для выборок, записанных в файлах **data3.txt** и **data4.txt**, приведен выше.

6.7 ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Пусть требуется исследовать зависимость $y(x)$, причем величины y и x измеряются в одних и тех же экспериментах. Без ограничения общности можно считать, что величина x измеряется точно, в то время как измерение величины y содержит случайные погрешности. Это означает, что погрешность измерения величины x пренебрежимо мала по сравнению с погрешностью измерения величины y. Таким образом, результаты эксперимента можно рассматривать как выборочные значения случайной величины $\eta(x)$, зависящей от x, как от параметра.

Регрессией называют зависимость $y(x)$ условного математического ожидания величины $\eta(x)$ от переменной x, т.е. $y(x) \equiv M(\eta/x)$.

Задача регрессионного анализа состоит в восстановлении функциональной зависимости $y(x)$ по результатам измерений (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$.

Аппроксимируем неизвестную зависимость $y(x)$ заданной функцией $f(x, a_0, a_1, \ldots, a_k)$. Это означает, что результаты измерений можно представить в виде

$$y_i = f(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_k) + \xi_i,$$

где a_0, a_1, ..., a_k — неизвестные параметры регрессии, а ξ_i — случайные величины, характеризующие погрешности эксперимента.

Обычно предполагается, что ξ_i — независимые нормально распределенные случайные величины с $M\xi_i = 0$ и одинаковыми дисперсиями $D\xi_i = \sigma^2$.

Параметры a_0, a_1, ..., a_k следует выбирать таким образом, чтобы отклонение значений предложенной функции от результатов эксперимента было минимальным. Часто в качестве меры отклонения выбирают величину

$$\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i, a_1, \ldots, a_k) - y_i\big)^2,$$

и, следовательно, параметры a_0, a_1, ..., a_k определяют методом наименьших квадратов*.

Рассмотрим простейший случай линейной регрессии. Пусть выдвинута гипотеза о том, что функция $f(x, a_0, a_1, \ldots, a_k)$ имеет вид $f(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1 x$. Найдем оценку параметров a_0 и a_1 методом наименьших квадратов. Для этого минимизируем функцию

$$\Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2,$$

приравнивая нулю частные производные $\dfrac{\partial \Phi}{\partial a_0}$ и $\dfrac{\partial \Phi}{\partial a_1}$, откуда

$$a_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\Big)^2}, \qquad a_1 = \frac{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\Big)^2}.$$

В Mathcad для вычисления параметров a_0 и a_1 предназначены соответственно функции intersept(x,y) и slope(x,y).

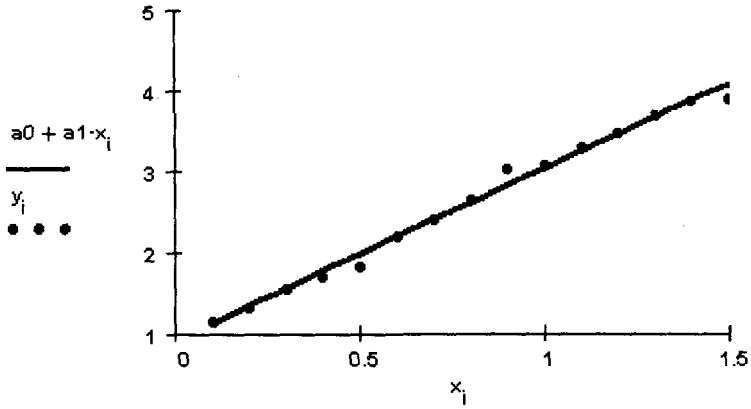
Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление коэффициентов линейной регрессии a_0 и a_1 и соответствующие графики для представленных ниже экспериментальных данных.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y	1.156	1.332	1.553	1.705	1.831	2.204	2.388	2.656
x	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	
y	3.019	3.081	3.299	3.486	3.692	3.867	3.896	

Значения x и y записаны на диске **c:** в папке **tmp** в файле **data5.txt**.

*Сравните с постановкой задачи о сглаживании экспериментальных данных в разд. 2.7.

```
ORIGIN := 1        N := 15

i := 1..N          x_i := i·0.1          y_i := READ("c:\tmp\data5.txt")

a0 := intercept(x,y)      a0 = 0.925

a1 := slope(x,y)          a1 = 2.107
```



Эти же оценки дает метод максимального правдоподобия*. В практических задачах дисперсия $D\xi_i = \sigma^2$ обычно неизвестна, но с помощью метода максимального правдоподобия можно получить ее оценку $\widehat{\sigma}^2$:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \widehat{a}_0 - \widehat{a}_1 x_i\right)^2.$$

Следует помнить, что $\widehat{\sigma}^2$, $\widehat{a}_0$, $\widehat{a}_1$ — случайные величины. При сделанных выше предположениях $\widehat{a}_0$ и $\widehat{a}_1$ распределены нормально, $M\widehat{a}_0 = a_0$, $M\widehat{a}_1 = a_1$, т.е. эти оценки несмещенные, а дисперсии этих оценок вычисляются по формулам

$$D\widehat{a}_0 = \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right)\widehat{\sigma}^2, \qquad D\widehat{a}_1 = \frac{\widehat{\sigma}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2},$$

где

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

*См. разд. 6.4.

Поскольку приведенная выше оценка дисперсии $\widehat{\sigma}^2$ смещена (ее математическое ожидание равно $M\widehat{\sigma}^2 = \frac{n-2}{n}\sigma^2$), будем использовать для оценки дисперсии другую, несмещенную оценку:

$$s^2 = \frac{n}{n-2}\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widehat{a}_0 - \widehat{a}_1 x_i)^2 =$$
$$= \frac{1}{n-2}\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \widehat{a}_0 \sum_{i=1}^{n} y_i - \widehat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big).$$

Величина $\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2-распределение с $n-2$ степенями свободы.

Используя информацию о свойствах случайных величин s^2, $\widehat{a}_0$, $\widehat{a}_1$, можно построить доверительные интервалы для оцениваемых параметров a_0, a_1 и σ^2. Начнем с оценки $\widehat{a}_0$. Если дисперсия σ^2 известна, то случайная величина

$$\frac{\widehat{a}_0 - a_0}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{\overline{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}}$$

имеет стандартное нормальное распределение. Если α — доверительная вероятность и x_α — решение уравнения $\Phi(x_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, доверительный интервал

$$\widehat{a}_0 - x_\alpha\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} < a_0 < \widehat{a}_0 + x_\alpha\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}$$

накрывает неизвестный параметр a_0 с вероятностью $1-\alpha$.

Если же дисперсия неизвестна, то в качестве критерия можно взять величину

$$\frac{\widehat{a}_0 - a_0}{s\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{\overline{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}}.$$

Здесь

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \widehat{a}_0 \sum_{i=1}^{n} y_i - \widehat{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)$$

имеет распределение Стьюдента с $n-2$ степенями свободы.

По заданному значению α найдем корень t_α уравнения $F_{n-2}(t_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$, где $F_{n-2}(x)$ — распределение Стьюдента с $n-2$ степенями свободы.

Теперь доверительный интервал имеет вид

$$\widehat{a}_0 - t_\alpha s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}} < a_0 < \widehat{a}_0 + t_\alpha s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}.$$

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление доверительного интервала для a_0 по выборке, которая приведена выше.

$ORIGIN := 1 \qquad N := 15$

$i := 1..N \qquad x_i := i \cdot 0.1 \qquad y_i := READ(\text{"c:\tmp\data5.txt"})$

$a0 := intercept(x, y) \qquad a0 = 0.925 \qquad a1 := slope(x, y) \qquad a1 = 2.107$

$yr_i := a0 + a1 \cdot x_i$

$Xmean := mean(x) \qquad Xmean = 0.8$

$Ymean := mean(y) \qquad Ymean = 2.611$

$$s2 := \frac{1}{N-2} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(y_k - yr_k\right)^2$$

Построение доверительного интервала для a_0

$\alpha := 0.1 \qquad t := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 2\right) \qquad t = 1.771$

$$a0left := a0 - t \cdot \sqrt{s2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{Xmean^2}{\sum\limits_{k=1}^{N}\left(x_k - Xmean\right)^2}} \qquad a0left = 0.836$$

$$a0right := a0 + t\cdot\sqrt{s2}\cdot\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{Xmean^2}{\sum_{k=1}^{N}\left(x_k - Xmean\right)^2}} \qquad a0right = 1.014$$

Доверительный интервал для a_0 (0.836, 1.014)

Аналогично строится доверительный интервал для параметра $\widehat{a}_1$. Если дисперсия σ^2 известна, то случайная величина

$$\frac{\widehat{a}_1 - a_1}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}}$$

имеет стандартное нормальное распределение и, значит, с вероятностью $1-\alpha$ доверительный интервал

$$\left(\widehat{a}_1 - \frac{x_\alpha\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}},\ \widehat{a}_1 + \frac{x_\alpha\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}\right)$$

накрывает оцениваемый параметр a_1. Здесь, как и выше, x_α — решение уравнения $\Phi(x_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$.

Если же дисперсия неизвестна, то в качестве критерия можно взять величину

$$\frac{\widehat{a}_1 - a_1}{\dfrac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}},$$

которая имеет распределение Стьюдента с $n-2$ степенями свободы, и поэтому интервал

$$\left(\widehat{a}_1 - \frac{t_\alpha s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}},\quad \widehat{a}_1 + \frac{t_\alpha s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}\right)$$

накрывает оцениваемый параметр a_1 с доверительной вероятностью $1-\alpha$. Здесь t_α — корень уравнения $F_{n-2}(t_\alpha) = 1 - 0.5\alpha$, где $F_{n-2}(x)$ — функция распределения Стьюдента с $n-2$ степенями свободы.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление доверительного интервала для a_1 по той же выборке.

$ORIGIN := 1 \qquad N := 15$

$i := 1..N \qquad x_i := i \cdot 0.1 \qquad y_i := READ(\text{"c:\tmp\data5.txt"})$

$a0 := intercept(x, y) \qquad a0 = 0.925 \qquad a1 := slope(x, y) \qquad a1 = 2.107$

$yr_i := a0 + a1 \cdot x_i$

$Xmean := mean(x) \qquad Xmean = 0.8$

$Ymean := mean(y) \qquad Ymean = 2.611$

$$s2 := \frac{1}{N-2} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(y_k - yr_k\right)^2$$

$$\alpha := 0.1 \qquad t := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 2\right) \qquad t = 1.771$$

Построение доверительного интервала для a_1

$$a1left := a1 - \frac{t \cdot \sqrt{s2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left(x_k - Xmean\right)^2}} \qquad a1left = 2.009$$

$$a1right := a1 + \frac{t \cdot \sqrt{s2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left(x_k - Xmean\right)^2}} \qquad a1right = 2.205$$

Доверительный интервал для a_1 (2.009, 2.205)

И, наконец, построим доверительный интервал для дисперсии. Как уже отмечалось выше, случайная величина $\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2-распределение с $n-2$ степенями свободы. Задавшись малой вероятностью α, решим два уравнения: $F_{n-2}(\chi_{l,\alpha}) = 0.5\alpha$ и $F_{n-2}(\chi_{r,\alpha}) = 1 - 0.5\alpha$, где $F_{n-2}(x)$ — функция χ^2-распределения с $n-2$ степенями свободы. Случайная величина $\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}$ попадает в интервал $(\chi_{l,\alpha}, \chi_{r,\alpha})$ с

вероятностью $1-\alpha$. Отсюда получаем доверительный интервал для дисперсии: $\left(\frac{(n-2)s^2}{\chi_{r,\alpha}}, \frac{(n-2)s^2}{\chi_{l,\alpha}}\right)$.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление доверительного интервала для дисперсии по той же выборке.

$ORIGIN := 1 \qquad N := 15 \qquad \alpha := 0.1$

$i := 1..N \qquad x_i := 0.1 \cdot i \qquad y_i := READ(\text{"c:\tmp\data5.txt"})$

$a0 := intercept(x, y) \qquad a0 = 0.925 \qquad a1 := slope(x, y) \qquad a1 = 2.107$

$yr_i := a0 + a1 \cdot x_i$

$Xmean := mean(x) \qquad Ymean := mean(y)$

$Xmean = 0.8 \qquad Ymean = 2.611$

$$s2 := \frac{1}{N-2} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(y_k - yr_k\right)^2 \qquad s2 = 8.556 \cdot 10^{-3}$$

Построение доверительного интервала для дисперсии

$$\chi left := qchisq\left(\frac{\alpha}{2}, N-2\right) \qquad \chi left = 5.892$$

$$\chi right := qchisq\left(1-\frac{\alpha}{2}, N-2\right) \qquad \chi right = 22.362$$

$$\sigma left := \frac{(N-2) \cdot s2}{\chi right} \qquad \sigma left = 4.974 \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma right := \frac{(N-2) \cdot s2}{\chi left} \qquad \sigma right = 0.019$$

Доверительный интервал для дисперсии (0.005, 0.019)

Теперь задача о построении доверительных интервалов для параметров линейной регрессии решена полностью.

Рассмотрим еще некоторые свойства линейной регрессии.

Пусть линейная регрессия построена: $f(x, a_0, a_1) = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 x$. Возьмем в области изменения аргумента некоторую точку x_0 и вычислим $\widehat{y}_0 = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 x_0$. Величина $\widehat{y}_0$ случайная и меняется от выборки к выборке. Ее математическое ожидание равно истинному значению функции

$f(x)$ в точке x_0, т.е. величине $y_0 = a_0 + a_1 x_0$. Найдем доверительный интервал для величины y_0. Для этого рассмотрим статистику

$$\frac{(\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 x_0) - (a_0 + a_1 x_0)}{s\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{\overline{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}}.$$

Доказано, что она имеет распределения Стьюдента с $n-2$ степенями свободы, и поэтому доверительный интервал

$$\left(\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 x_0 - t_\alpha s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}},\quad \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 x_0 + t_\alpha s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}\right)$$

накрывает истинное значение $y_0 = a_0 + a_1 x_0$ с вероятностью $1-\alpha$. Величина t_α определена выше.

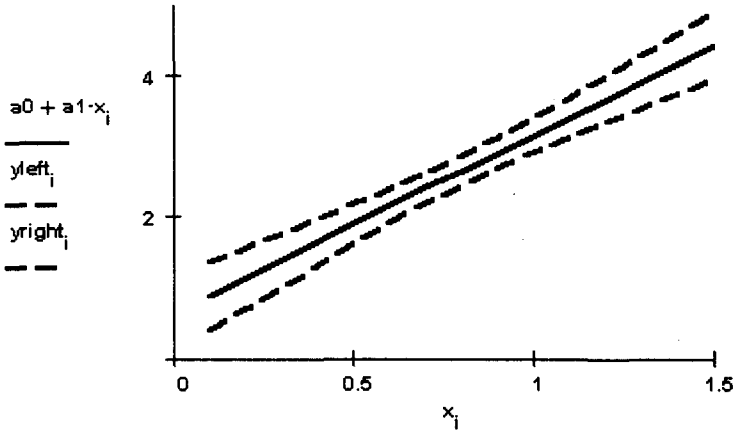
Границы доверительных интервалов в каждой точке x_0 образуют доверительную полосу, или доверительный коридор (см. ниже). Эта полоса, однако, не является доверительной областью для всей линии регрессии. Она определяет только концы доверительных интервалов для y при каждом значении x. С помощью коридора регрессии нельзя, например, построить одновременно два доверительных интервала в различных точках x_0 и x_1.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий построение коридора регрессии.

Построение доверительного коридора $\quad i := 1..N$

$$yleft_i := a0 + a1\cdot x_i - t\cdot\sqrt{s2}\cdot\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x_i - Xmean)^2}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{N}(x_k - Xmean)^2}}}$$

$$yright_i := (a0 + a1\cdot x_i) + t\cdot\sqrt{s2}\cdot\sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x_i - Xmean)^2}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{N}(x_k - Xmean)^2}}}$$



Доверительная область для *всей линии регрессии* определяется с помощью следующих уравнений соответственно нижней и верхней границ полосы:

$$y = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 x - 2 f_\alpha s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}},$$

$$y = \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 x + 2 f_\alpha s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}},$$

где f_α — корень уравнения $F_{2,n-2}(f_\alpha) = 1 - \alpha$; $F_{2,n-2}(x)$ — функция распределения Фишера с 2 и $n - 2$ степенями свободы.

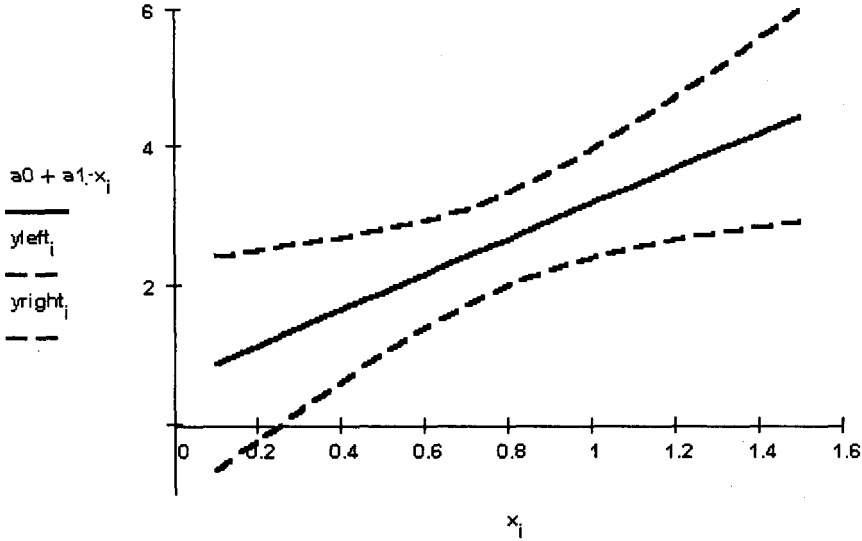
Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление доверительной области регрессии для выборки, анализируемой во всех предыдущих примерах.

Построение доверительной области

$$f := qF(1 - \alpha, 2, N - 2) \qquad i := 1..N$$

$$yleft_i := a0 + a1 \cdot x_i - 2 \cdot f \cdot \sqrt{s2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x_i - Xmean)^2}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{N} (x_k - Xmean)^2}}}$$

$$yright_i := (a0 + a1 \cdot x_i) + 2 \cdot f \cdot \sqrt{s2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x_i - Xmean)^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^{N} (x_k - Xmean)^2}}}$$



ЗАДАНИЕ 6.20

Для заданной в условии выборки вычислите регрессию и найдите доверительные интервалы коэффициентов регрессии и дисперсии для заданной доверительной вероятности. Вычислите коридор и доверительную область регрессии. Изобразите выборку графически на одном графике с линией регрессии. Изобразите графически коридор и доверительную область регрессии.

Порядок выполнения задания

1. Определите и введите заданную выборку.
2. Найдите точечные оценки математического ожидания обеих переменных.
3. Вычислите точечную несмещенную оценку неизвестной дисперсии.
4. Найдите коэффициенты регрессии.
5. Постройте график линии регрессии и изобразите на нем экспериментальные точки.
6. Вычислите значение критерия для оценки коэффициента регрессии a_0.

7. Найдите доверительный интервал для a_0.
8. Вычислите значение критерия для оценки коэффициента регрессии a_1.
9. Найдите доверительный интервал для a_1.
10. Вычислите значение критерия для оценки дисперсии.
11. Найдите доверительный интервал для дисперсии.
12. Вычислите коридор регрессии.
13. Изобразите на графике линию регрессии и границы коридора для нее.
14. Вычислите доверительную область для всей регрессии.
15. Изобразите на графике линию регрессии и доверительную область для нее.

Пример выполнения задания

Все приведенные выше фрагменты рабочих документов Mathcad содержат последовательные этапы выполнения задания для выборки, описанной в тексте.

6.8 ЭЛЕМЕНТЫ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

Однофакторный дисперсионный анализ

Дисперсионным анализом называют статистический анализ результатов, зависящих от качественных факторов. Сначала остановимся на случае однофакторного анализа.

Пусть, например, ставится задача исследования влияния технологии обработки почвы на урожайность. Технологию естественно назвать фактором, а каждую конкретную технологию T_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) — уровнем этого фактора. Здесь m — полное число применяемых технологий. Обозначим x_{ij} — урожайность культуры, полученную в j-м году при использовании i-й технологии T_i ($j = 1, 2, \ldots, n_i$, n_i — число лет, в течение которых производились наблюдения за применением технологии T_i). Сведем все данные в таблицу

	1	2	3	...	
T_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n_1}
T_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n_2}
...	...	...	...	...	...
T_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	...	x_{mn_m}

Обратим внимание на то, что в разных строчках этой таблицы содержится, вообще говоря, разное число элементов.

Рассмотрим математическую модель, в которой предполагается, что каждая случайная величина x_{ij} может быть представлена в виде $x_{ij} = a_i + \varepsilon_{ij}$, где a_i — урожайность, характерная для технологии T_i, а ε_{ij} — независимые случайные величины, которые описывают суммарный вклад всех случайных факторов, влияющих на итоговую урожайность. Чаще всего полагают, что все $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma)$, т.е. имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и с одинаковой дисперсией σ^2.

Задача, которую предстоит решить, ставится следующим образом: выяснить, влияет ли выбор технологии обработки почвы на урожайность культуры или нет. На математическом языке это означает, что по результатам эксперимента необходимо проверить справедливость статистической гипотезы H_0 о том, что все технологии T_i одинаково эффективны, H_0: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Анализ результатов будет основан на сопоставлении двух оценок неизвестной дисперсии σ^2.

Одна из этих оценок не зависит от того, верна ли гипотеза H_0. Для другой оценки это предположение существенно, т.е. эта оценка будет близка к значению σ^2 только тогда, когда гипотеза H_0 верна.

Если обе оценки близки, то гипотезу H_0 следует принять. Если же оценки существенно отличаются, то гипотезу H_0 следует отвергнуть.

Построим эти оценки.

Сначала для каждой строки вычислим средние

$$\overline{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

а затем величину

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \overline{x}_i)^2.$$

Важно отметить, что при сделанных предположениях о случайных величинах ε_{ij} величина $\frac{s_1^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2-распределение с $n - m$ степенями свободы независимо от того, верна ли гипотеза H_0. Следовательно, первая оценка для σ^2 получена.

Для получения второй оценки сначала найдем величину

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij},$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$, а затем вычислим

$$s_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2.$$

При выполнении гипотезы H_0 величины s_1^2 и s_2^2 независимы, а величина $\frac{s_2^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2-распределение с $n-1$ степенями свободы.

Теперь сравним оценки s_1^2 и s_2^2. Если гипотеза H_0 верна, то величина

$$F_{\text{н}} = \frac{\dfrac{s_2^2}{n-1}}{\dfrac{s_1^2}{n-m}} = \frac{s_2^2(n-m)}{s_1^2(n-1)}$$

имеет распределение Фишера с $n-1$ и $n-m$ степенями свободы. Напомним, что распределение Фишера характеризуется двумя параметрами: числом степеней свободы числителя и числом степеней свободы знаменателя (см. разд. 5.4).

Зададимся достаточно малым уровнем значимости α и решим уравнение

$$F_{n-1,n-m}(x) = 1 - \alpha.$$

Сравним корень этого уравнения x_α с вычисленным выше значением $F_{\text{н}}$.

При $F_{\text{н}} > x_\alpha$ гипотеза H_0 отвергается, в противном случае — принимается.

Выясним на уровне значимости $\alpha = 0.05$, зависит ли урожайность сельскохозяйственной культуры от технологии обработки почвы, по результатам, приведенным в таблице, представленной ниже.

Номер технологии	Годы						n_i
	1	2	3	4	5	6	
1	140	141	140	141	142	145	6
2	150	149	150	147			4
3	147	147	145	150	150		5
4	144	147	142	146			4

Фрагмент документа Mathcad, содержащий соответствующие вычисления, приведен ниже.

ORIGIN := 1

$x_{1,1} := 140$ $x_{1,2} := 141$ $x_{1,3} := 140$ $x_{1,4} := 141$

$x_{1,5} := 142$ $x_{1,6} := 145$ $n_1 := 6$

$x_{2,1} := 150 \quad x_{2,2} := 149 \quad x_{2,3} := 150 \quad x_{2,4} := 147 \quad n_2 := 4$

$x_{3,1} := 147 \quad x_{3,2} := 147 \quad x_{3,3} := 145 \quad x_{3,4} := 150$

$x_{3,5} := 150 \quad n_3 := 5$

$x_{4,1} := 144 \quad x_{4,2} := 147 \quad x_{4,3} := 142 \quad x_{4,4} := 146 \quad n_4 := 4$

$$m := 4 \qquad N := \sum_{i=1}^{m} n_i \qquad N = 19 \qquad i := 1..m$$

$$X_i := \frac{1}{n_i} \cdot \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j} \qquad s1 := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_i - x_{i,j}\right)^2$$

$$XN := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j} \qquad s2 := \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \left(XN - X_i\right)^2$$

$$s1 = 57.05 \qquad s2 = 173.582 \qquad FN := \frac{s2 \cdot (N - m)}{s1 \cdot (N - 1)} \qquad FN = 2.536$$

$$\alpha := 0.05 \qquad x\alpha := qF(1 - \alpha, N - 1, N - m) \qquad x\alpha = 2.353$$

$$r2 := \frac{s2}{s1} \qquad r2 = 3.043$$

Указание. Для того чтобы найти решение уравнения $F_{n-1,n-m}(x) = 1 - \alpha$, используйте встроенную функцию Mathcad $qF(p, d_1, d_2)$ с параметрами $p = 1 - \alpha$, $d_1 = n - 1$, $d_2 = n - m$, значением которой является искомый корень уравнения.

Поскольку в результате вычислений получено $F_н$=2.536 и x_α=2.353, т.е. $F_н > x_\alpha$, то гипотеза H_0 отвергается. Делаем вывод о том, что выбор технологии влияет на урожайность. Следующая задача — оценить степень этого влияния.

Для оценки степени влияния фактора используют *выборочный коэффициент детерминации* r^2, который вычисляется по формуле

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\overline{x}_i - \overline{x})^2 n_i}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \overline{x})^2} = \frac{s_2^2}{s^2},$$

где s^2 — оценка полной выборочной дисперсии:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{x})^2.$$

Чтобы разобраться со смыслом коэффициента детерминации, обратимся к одной из важнейших формул дисперсионного анализа

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{x}_i)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}(x_i - \overline{x})^2,$$

или $s^2 = s_1^2 + s_2^2$.

Из равенства $s^2 = s_1^2 + s_2^2$ видно, что полная выборочная дисперсия состоит из двух слагаемых s_1^2 и s_2^2, причем s_1^2 — это средняя величина групповых дисперсий, а s_2^2 — дисперсия групповых средних. Величина s_1^2 характеризует изменчивость, обусловленную случайными факторами, а величина s_2^2 определяет разброс средних значений в каждой группе около среднего значения всей выборки, т.е. зависит от различий параметров a_i. И понятно, что коэффициент детерминации r^2 показывает, какую часть в общей дисперсии величин x_{ij} составляет часть, обусловленная зависимостью от фактора T.

В рассмотренном выше примере $r^2 = 0.753$, т.е. 75.3% общей вариации урожайности обусловлены технологией.

Полученные результаты позволяют оценить параметры исходной модели.

Если гипотеза H_0 принимается, т.е. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, то оценкой параметра $\overline{a}$ (математического ожидания) является величина $\overline{x}$, а оценкой дисперсии σ^2 — величина $\frac{s_1^2}{n-m}$.

Если же гипотеза H_0 отвергается, то оценкой a_i является $\overline{x}_i$, а оценкой дисперсии σ^2 для всех уровней — величина $\frac{s_1^2}{n-m}$. Эффект влияния i-го уровня можно вычислять по формуле $\overline{x}_i - \overline{x}$.

Ниже приведены вычисления коэффициента детерминации и оценок параметров распределений каждого уровня для рассмотренного выше примера о влиянии технологии обработки почвы на урожайность.

$$r2 := \frac{s2}{s1 + s2} \qquad r2 = 0.753 \qquad a_i := X_i \qquad a = \begin{bmatrix} 141.5 \\ 149 \\ 147.8 \\ 144.75 \end{bmatrix}$$

$$\sigma 2 := \frac{s1}{N - m} \qquad \sigma := \sqrt{\sigma 2} \qquad \sigma = 1.95$$

Указание. Из приведенных вычислений следует, например, что урожайность при второй технологии обработки представляет собой случайную величину, имеющую нормальное распределение $N(149, 1.95)$.

На рис. 6.9 приведены графики плотности вероятностей урожайностей для всех четырех технологий обработки.

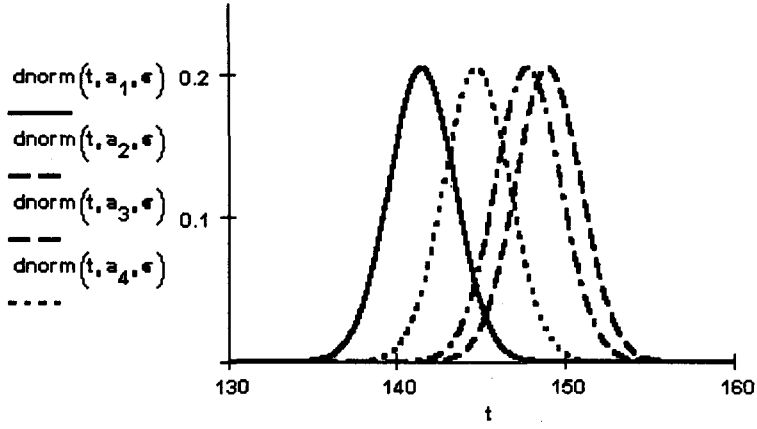


Рис. 6.9. Графики плотности вероятностей урожайности

ЗАДАНИЕ 6.21

Установите влияние объема продаж товара в зависимости от типа используемой рекламы для заданного значения α. Установите меру влияния каждого типа рекламы. Определите параметры и постройте плотности вероятностей распределения числа продаж для каждого типа рекламы.

Дополнительное задание. Проверьте гипотезу о равенстве групповых дисперсий для данных задания 6.21. Примерный вариант выполнения дополнительного задания приведен выше.

Порядок выполнения задания

1. Определите и введите компоненты матрицы выборочных значений случайной величины x_{ij}, i — уровень фактора, j — номер наблюдения.
2. Введите значение количества факторов и объем выборки для каждого уровня фактора.
3. Вычислите объем выборки.
4. Вычислите выборочное среднее и средние по группам.
5. Вычислите значения s_1^2 и s_2^2 и значение $F_н$.

6. Для заданного значения α проверьте гипотезу о независимости конечного значения от уровня фактора.
7. Если гипотеза независимости от фактора отклоняется, вычислите коэффициент детерминации.
8. Запишите оценки параметров распределения исследуемой величины для каждого фактора.
9. Постройте графики плотности вероятностей для соответствующих распределений.

Пример выполнения задания

Примерный вариант задания для исследования зависимости урожайности от технологии обработки почвы приведен выше.

Замечание. Напомним еще раз, что описанная здесь методика дисперсионного анализа основана на предположении о том, что величины ε_{ij}, описывающие в модели $x_{ij} = a_i + \varepsilon_{ij}$ суммарное влияние случайных факторов, имеют одинаковые дисперсии*.

Если уверенности в таком распределении ε_{ij} нет, то, прежде чем проводить дисперсионный анализ, следует убедиться в том, что групповые дисперсии для всех уровней фактора совпадают. На языке статистических гипотез это означает, что требуется убедиться в том, что гипотеза h_0 об одинаковых групповых дисперсиях σ_1^2, σ_2^2, ..., σ_n^2 не противоречит результатам наблюдений. Для этого вычислим несмещенные оценки групповых дисперсий

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{x}_i)^2, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и величины

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2 + \ldots + (n_m-1)s_m^2}{(n_1-1) + (n_2-1) + \ldots + (n_m-1)},$$

$$q = \left[1 + \frac{1}{3(m-1)}\left(\frac{1}{n_1-1} + \frac{1}{n_2-1} + \ldots + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{n_m-1} + \frac{1}{(n_1-1)(n_2-1)\ldots(n_m-1)}\right)\right],$$

$$b = q\left[(n_1-1)\ln\frac{s^2}{s_1^2} + (n_2-1)\ln\frac{s^2}{s_2^2} + \ldots + (n_m-1)\ln\frac{s^2}{s_m^2}\right].$$

*Дисперсии σ_i^2 случайных величин x_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, n_i)$ называют *групповыми дисперсиями*.

Величина b называется *критерием Бартлетта.*

Доказано, что если гипотеза h_0 верна и все $n_i > 3$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то случайная величина b имеет распределение, близкое к χ^2-распределению с $m - 1$ степенями свободы.

Зададимся уровнем значимости α и найдем *правостороннюю критическую точку* x_α — решение уравнения $F_{m-1}(x_\alpha) = 1 - \alpha$. Если $b > x_\alpha$, то гипотеза h_0 отклоняется. В противном случае полагаем, что гипотеза не противоречит результатам наблюдений.

Ниже приведен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий проверку гипотезы о равенстве групповых дисперсий для примера о зависимости урожайности от технологии обработки почвы.

$$s_i := \frac{1}{n_i - 1} \cdot \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{i,j} - X_i\right)^2 \qquad S := \frac{\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) \cdot s_i}{\left[\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1)\right]}$$

$$q := \left[1 - \frac{1}{3 \cdot (m - 1)} \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i - 1} + \frac{1}{\left[\prod_{i=1}^{m} (n_i - 1)\right]}\right]\right]^{-1}$$

$$b := q \cdot \sum_{i=1}^{m} (n_i - 1) \cdot \ln\left(\frac{S}{s_i}\right) \qquad b = 0.83$$

$$x := \mathrm{qchisq}(1 - \alpha, m - 1) \qquad x = 7.815$$

Двухфакторный дисперсионный анализ

Рассмотренная в предыдущем пункте методика однофакторного анализа легко обобщается на случай двух факторов.

Пусть случайная величина ξ зависит от двух признаков (факторов): A и B. Обозначим A_i, $i = 1, 2, \ldots, m_A$, B_j, $j = 1, 2, \ldots, m_B$, — уровни факторов A и B соответственно. Результаты измерения случайной

величины ξ представлены в нижеследующей таблице.

	1	2	3	...	m_B
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1m_B}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2m_B}
...	...	...	...	...	...
m_A	x_{m_A1}	x_{m_A2}	x_{m_A3}	...	$x_{m_Am_B}$

Для простоты остановимся на случае, когда в каждой клетке таблицы, т.е. при каждом сочетании уровней факторов, приведен результат только одного наблюдения (измерения). Тогда общее число наблюдений $n = m_A m_B$.

Обозначим через a_i математическое ожидание ξ при уровне A, $i = 1, 2, \ldots, m_B$, через b_j — математическое ожидание ξ при уровне B_j, $j = 1, 2, \ldots, m_B$. Если при изменении фактора A сохраняется равенство $a_1 = a_2 = \ldots = a_{m_A}$, то естественно считать, что величина ξ не зависит от фактора A; в противном случае ξ зависит от фактора A. Аналогично определяется зависимость от фактора B.

Однако априори значения a_i и b_j не известны. Таким образом, проблема сведена к задаче проверки следующих гипотез: H_A: $a_1 = a_2 = \ldots = a_{m_A}$ и H_B: $b_1 = b_2 = \ldots = b_{m_A}$. При решении задачи будем предполагать, что выполняются следующие условия:

- наблюдения при различных сочетаниях уровней факторов независимы;
- при всех сочетаниях уровней факторов случайная величина ξ нормально распределена с одной и той же дисперсией σ^2.

Изменчивость наблюдаемых факторов при переходе от одной клетки таблицы к другой может быть обусловлена как изменением уровней факторов, так и случайными неконтролируемыми факторами. Изменчивость, вызванная случайными неконтролируемыми факторами, называется *остаточной*.

Вычислим общую среднюю результатов измерений по формуле

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m_A} \sum_{j=1}^{m_B} x_{ij}.$$

Эту величину можно представить в другой форме, использующей групповые средние $\overline{x}_{i\cdot}$ и $\overline{x}_{\cdot j}$:

$$\overline{x}_{i\cdot} = \frac{1}{m_B} \sum_{j=1}^{m_B} x_{ij}, \qquad \overline{x}_{\cdot j} = \frac{1}{m_A} \sum_{i=1}^{m_A} x_{ij}.$$

Точка в индексе величины $\overline{x}_{i\cdot}$ означает, что суммирование ведется по i-й строке, а точка в индексе величины $\overline{x}_{\cdot j}$ — что суммирование ведется по j-му столбцу. В этих обозначениях среднее результатов измерений вычисляется по любой из формул:

$$\overline{x} = \frac{m_B}{n}\sum_{i=1}^{m_A}\overline{x}_{i\cdot}, \qquad \overline{x} = \frac{m_A}{n}\sum_{j=1}^{m_B}\overline{x}_{\cdot j}.$$

Средняя изменчивость, вызванная фактором A, вычисляется по формуле

$$\widehat{\sigma}_A^2 = \frac{S_A^2}{n} = \frac{m_B}{n}\sum_{i=1}^{m_A}(\overline{x}_{i\cdot} - \overline{x})^2.$$

Аналогично для изменчивости, вызванной фактором B:

$$\widehat{\sigma}_B^2 = \frac{S_B^2}{n} = \frac{m_A}{n}\sum_{j=1}^{m_B}(\overline{x}_{\cdot j} - \overline{x})^2.$$

Для общей характеристики изменчивости, обусловленной случайными факторами, вычисляем

$$\widehat{\sigma}_0^2 = \frac{S_0^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m_A}\sum_{j=1}^{m_B}(\overline{x}_{ij} - \overline{x}_{i\cdot} - \overline{x}_{\cdot j} + \overline{x})^2.$$

Общую изменчивость величины ξ характеризуют величиной

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{S^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m_A}\sum_{j=1}^{m_B}(\overline{x}_{ij} - \overline{x})^2.$$

Доказано, что

$$\widehat{\sigma}^2 = \widehat{\sigma}_A^2 + \widehat{\sigma}_B^2 + \widehat{\sigma}_0^2.$$

Понятно, что по соотношениям между $\widehat{\sigma}_A^2$, $\widehat{\sigma}_B^2$ и $\widehat{\sigma}_0^2$ можно судить о степени влияния факторов на случайную величину ξ.

Проверка гипотезы H_A основывается на сравнении величин $\widehat{\sigma}_A^2$ и $\widehat{\sigma}_0^2$. Если гипотеза H_A верна, то величина

$$F_A = \frac{\widehat{\sigma}_A^2}{\widehat{\sigma}_0^2}$$

имеет распределение Фишера со степенями свободы $k = m_A - 1$ и $l = (m_A - 1)(m_B - 1)$.

Зададимся уровнем значимости α и найдем *правостороннюю критическую точку* x_α — решение уравнения $F_{k,l}(x_\alpha) = 1 - \alpha$. Если

значение F_A, вычисленное по результатам измерений, удовлетворяет неравенству $F_A < x_\alpha$, то гипотеза H_A принимается. В противном случае гипотеза H_A отвергается, и можно заключить, что изменение фактора A влияет на изменение величины ξ.

Мерой этого влияния является коэффициент детерминации

$$r_A^2 = \frac{\widehat{\sigma}_A^2}{\widehat{\sigma}^2},$$

который показывает, какая доля общей изменчивости величины ξ обусловлена изменением фактора A.

Аналогично проверяется гипотеза H_B, которая основывается на сравнении величин $\widehat{\sigma}_B^2$ и $\widehat{\sigma}_0^2$. Если гипотеза H_B верна, то величина

$$F_B = \frac{\widehat{\sigma}_B^2}{\widehat{\sigma}_0^2}$$

имеет распределение Фишера со степенями свободы $k = m_B - 1$ и $l = (m_A - 1)(m_B - 1)$. При уровне значимости α правосторонняя критическая точка x_α — решение уравнения $F_{k,l}(x_\alpha) = 1 - \alpha$. Если значение F_B, вычисленное по результатам измерений, удовлетворяет неравенству $F_B < x_\alpha$, то гипотеза H_B принимается. В противном случае гипотеза H_B отвергается, и можно заключить, что изменение фактора B влияет на изменение величины ξ. Мерой этого влияния является коэффициент детерминации

$$r_B^2 = \frac{\widehat{\sigma}_B^2}{\widehat{\sigma}^2},$$

который показывает, какая доля общей изменчивости величины ξ обусловлена изменением фактора B.

В рамках двухфакторного дисперсионного анализа можно получить более конкретное представление о случайной величине ξ. Ее модель на i-м уровне фактора A и на j-м уровне фактора B имеет вид

$$\xi_{ij} = a + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m_A, \quad j = 1, 2, \ldots, m_B,$$

где a — генеральное среднее случайной величины ξ;

α_i — слагаемое, которое описывает эффект влияния фактора A на случайную величину ξ на i-м уровне фактора A;

β_j — слагаемое, которое описывает эффект влияния фактора B на случайную величину ξ на j-м уровне фактора B;

ε_{ij} — слагаемое, которое описывает эффект влияния случайных факторов.

Величины ε_{ij} — независимые случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение $\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, m_A$, $j = 1, 2, \ldots, m_B$.

Если гипотезы H_A и H_B не отвергаются, то в рассмотренной модели параметры $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{m_A} = 0$ и $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{m_B} = 0$.

Величина $\overline{x}$ представляет собой оценку параметра a, а величина $\frac{s_0^2}{(m_A-1)(m_B-1)}$ — несмещенную оценку параметра σ^2.

Если гипотезы H_A и H_B отвергаются, то:

- оценка параметра a равна $\overline{x}$;
- оценка параметра α_i равна $\overline{x}_{i\cdot} - \overline{x}$;
- оценка параметра β_j равна $\overline{x}_{\cdot j} - \overline{x}$;
- несмещенная оценка параметра σ^2 равна $\frac{s_0^2}{(m_A-1)(m_B-1)}$.

ЗАДАНИЕ 6.22

Проведите двухфакторный дисперсионный анализ данных из таблицы.

Порядок выполнения задания

1. Определите матрицу наблюдений и введите ее элементы; определите и введите число уровней каждого фактора и вычислите объем выборки.
2. Вычислите групповые и генеральную средние.
3. Вычислите оценки дисперсии.
4. Определите для первого фактора величину $F_{\text{н}}$.
5. Найдите для первого фактора величину $\mathsf{qF}(1-\alpha,\mathsf{k},\mathsf{l})$ (решение уравнения $F(x) = 1 - \alpha$ для распределения Фишера F с соответствующим числом степеней свободы).
6. Сравните значения $F_{\text{н}}$ со значением x_α и сформулируйте вывод о справедливости гипотезы H_A.
7. Определите для второго фактора величину $F_{\text{н}}$.
8. Найдите для второго фактора величину $\mathsf{qF}(1-\alpha,\mathsf{k},\mathsf{l})$ (решение уравнения $F(x) = 1 - \alpha$ для распределения Фишера F с соответствующим числом степеней свободы).
9. Если гипотеза H_A отклоняется, вычислите коэффициент детерминации для первого фактора.
10. Сравните значения $F_{\text{н}}$ со значением $\mathsf{qF}(1-\alpha,\mathsf{k},\mathsf{l})$ и сформулируйте вывод о справедливости гипотезы H_B.
11. Если гипотеза H_B отклоняется, вычислите коэффициент детерминации для второго фактора.
12. Вычислите оценки параметров распределения исследуемой случайной величины.

Пример выполнения задания

Проведите двухфакторный дисперсионный анализ нижеследующей таблицы.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10.9	11.1	9.9	11.51
A_2	13.3	15.2	14.8	14.9
A_3	17.3	18.0	19.6	19.3

Фрагмент рабочего документа Mathcad приведен ниже.

$$ORIGIN := 1 \qquad mA := 3 \qquad mB := 4 \qquad \alpha := 0.05 \qquad n := mA \cdot mB$$

$$x := \begin{bmatrix} 10.9 & 11.1 & 9.9 & 11.51 \\ 13.3 & 15.2 & 14.8 & 14.9 \\ 17.3 & 18.0 & 19.6 & 19.3 \end{bmatrix}$$

$$XS := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{mA} \sum_{j=1}^{mB} x_{i,j} \qquad XS = 14.651$$

$$j := 1..mB \qquad i := 1..mA$$

$$XA_i := \frac{1}{mB} \cdot \sum_{j=1}^{mB} x_{i,j} \qquad XA^T = [\,10.852 \quad 14.55 \quad 18.55\,]$$

$$XB_j := \frac{1}{mA} \cdot \sum_{i=1}^{mA} x_{i,j} \qquad XB^T = [\,13.833 \quad 14.767 \quad 14.767 \quad 15.237\,]$$

$$\sigma A := \frac{mB}{n} \cdot \sum_{i=1}^{mA} \left(XA_i - XS\right)^2 \qquad \sigma A = 9.88$$

$$\sigma B := \frac{mA}{n} \cdot \sum_{j=1}^{mB} \left(XB_j - XS\right)^2 \qquad \sigma B = 0.26$$

$$\sigma 0 := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{mB} \sum_{i=1}^{mA} \left(x_{i,j} - XA_i - XB_j + XS\right)^2 \qquad \sigma 0 = 0.332$$

$$\sigma := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{mB} \sum_{i=1}^{mA} \left(x_{i,j} - XS\right)^2 \qquad \sigma = 10.472$$

$$FA := \frac{\sigma A}{\sigma 0} \qquad FA = 29.73$$

$$qF(1 - \alpha, mA - 1, (mA - 1) \cdot (mB - 1)) = 5.143$$

Гипотеза H_A о том, что величина x не зависит от фактора A отвергается

$$rA := \frac{\sigma A}{\sigma} \qquad rA = 0.943 \qquad FB := \frac{\sigma B}{\sigma 0} \qquad FB = 0.781$$

$$qF(1 - \alpha, mB - 1, (mA - 1) \cdot (mB - 1)) = 4.757$$

Гипотеза H_B о том, что величина x не зависит от фактора B принимается

$$rB := \frac{\sigma B}{\sigma} \qquad rB = 0.025 \qquad a := XS \qquad a = 14.651$$

$$\sigma 2 := \frac{\sigma 0 \cdot n}{(mA - 1) \cdot (mB - 1)} \qquad \sigma 2 = 0.665$$

Обсудим полученные численные результаты. Коэффициент детерминации для фактора A равен $rA = 0.943$. Это означает, что более 94 % изменчивости исследуемой случайной величины обусловлено изменением этого фактора. На долю фактора B приходится только 2.5 % изменчивости, поскольку $rB = 0.025$.

Независимость ξ от фактора B позволяет построить уточненную модель исследуемой случайной величины в виде:

$$\xi_{ij} = \overline{x}_{i\cdot} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

где ε_{ij} — независимые случайные величины, распределенные нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 0.665$.

С учетом вышеизложенного матрица, описывающая влияние факторов на изучаемое явление, имеет следующий вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10.852	10.852	10.852	10.852
A_2	14.55	14.55	14.55	14.55
A_3	18.55	18.55	18.55	18.55

Остальная часть элементов исходной матрицы обусловлена случайными факторами. Так, например, на уровнях A_2 и B_3 случайная величина ξ_{23} имеет нормальное распределение $N(14.55, \sqrt{0.66}) = N(14.55, 0.81)$.

Приложение
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

ГЛАВА 2

Задание 2.1. Умножая на матрицы специального вида, сформируйте матрицу-столбец и матрицу-строку, соответственно равные j-му столбцу и i-й строке матрицы A. Вычислите суммы элементов j-го столбца и i-й строки матрицы A.

Варианты 1–10: переставьте 1-ю и 2-ю строки и 1-й и 2-й столбцы.

Варианты 11–20: переставьте 2-ю и 3-ю строки и 1-й и 3-й столбцы.

1. $i=1,\ j=1,$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 0 \\ 3 & -0.3333 & 1 & 0.25 \\ 1.5 & 0.3333 & 0.5 & 0 \\ 1.2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $i=1,\ j=2,$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 4 & 0.5 \\ 2.5 & 1.333 & 0.6667 & 0.6930 \\ 4.4 & 1.5 & -2.667 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. $i=1,\ j=3,$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1.5 & 2.5 & 3 \\ 9 & 1 & 9 & 0.75 \\ 3.5 & 3 & 0.75 & 1.099 \\ 9.6 & 2 & -2.333 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. $i=1,\ j=4,$

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 6 \\ 12 & 2.667 & 16 & 1 \\ 4.5 & 5.333 & 0.8 & 1.386 \\ 16/8 & 2/5 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. $i=2,\ j=1,$

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2.5 & 3.5 & 10 \\ 15 & 5 & 25 & 1.25 \\ 5.5 & 8.333 & 0.8333 & 1.609 \\ 26 & 3 & -1.667 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. $i=2,\ j=2,$

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 15 \\ 18 & 8 & 36 & 1.5 \\ 6.5 & 12 & 0.8570 & 1.792 \\ 37.2 & 3.5 & -1.333 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. $i=2,\ j=3,$

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 3/5 & 4/5 & 21 \\ 21 & 11.67 & 49 & 1.750 \\ 7.5 & 16.33 & 0.8750 & 1.946 \\ 50.4 & 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

8. $i=2,\ j=4,$

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 & 28 \\ 24 & 16 & 64 & 2 \\ 8.5 & 21.33 & 0.8890 & 2.079 \\ 65.60 & 4.5 & -0.6667 & 6 \end{pmatrix}.$$

9. $i=3,\ j=1,$

$$A=\begin{pmatrix} 9 & 4.5 & 5.5 & 36 \\ 27 & 21 & 81 & 2.25 \\ 9.5 & 27 & 0.9 & 2.197 \\ 82.8 & 5 & -0.3333 & 9 \end{pmatrix}.$$

10. $i=3,\ j=2,$

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 & 45 \\ 30 & 26.67 & 100 & 2.5 \\ 10.5 & 33.33 & 0.9090 & 2.303 \\ 102 & 5.5 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

11. $i=3,\ j=3,$

$$A=\begin{pmatrix} 11 & 5.5 & 6.5 & 55 \\ 33 & 33 & 121 & 2.75 \\ 11.5 & 40.33 & 0.9170 & 2.398 \\ 123.2 & 6 & 0.3333 & 11 \end{pmatrix}.$$

12. $i=3,\ j=4,$

$$A=\begin{pmatrix} 12 & 6 & 7 & 66 \\ 36 & 40 & 144 & 3 \\ 12.5 & 48 & 0.9230 & 2.4850 \\ 146.4 & 6.5 & 0.6667 & 12 \end{pmatrix}.$$

13. $i=1,\ j=3,$
$$A=\begin{pmatrix} 13 & 6.5 & 7.5 & 78 \\ 39 & 47.67 & 169 & 3.25 \\ 13.50 & 56.33 & 0.9290 & 2.565 \\ 171.6 & 7 & 1 & 13 \end{pmatrix}.$$

14. $i=1,\ j=2,$
$$A=\begin{pmatrix} 14 & 7 & 8 & 91 \\ 42 & 56 & 196 & 3.5 \\ 14.50 & 65.33 & 0.9333 & 2.639 \\ 198.8 & 7.5 & 1.333 & 14 \end{pmatrix}.$$

15. $i=1,\ j=3,$
$$A=\begin{pmatrix} 15 & 7.5 & 8.5 & 105 \\ 45 & 65 & 225 & 3.75 \\ 15.5 & 75 & 0.9380 & 2.708 \\ 228 & 8 & 1.667 & 15 \end{pmatrix}.$$

16. $i=1,\ j=4,$
$$A=\begin{pmatrix} 16 & 8 & 9 & 120 \\ 48 & 74.67 & 256 & 4 \\ 16.50 & 85.33 & 0.941 & 2.773 \\ 259.2 & 8.5 & 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

17. $i=2,\ j=1,$
$$A=\begin{pmatrix} 17 & 8.5 & 9.5 & 136 \\ 51 & 85 & 289 & 4.25 \\ 17.5 & 96.33 & 0.9440 & 2.833 \\ 292.4 & 9 & 2.333 & 17 \end{pmatrix}.$$

18. $i=2,\ j=2,$
$$A=\begin{pmatrix} 18 & 9 & 10 & 153 \\ 54 & 96 & 324 & 4.5 \\ 48.50 & 108 & 0.947 & 2.89 \\ 327.6 & 9.5 & 2.667 & 18 \end{pmatrix}.$$

19. $i=2,\ j=3,$
$$A=\begin{pmatrix} 19 & 9.5 & 10.5 & 171 \\ 57 & 107.7 & 361 & 4.75 \\ 19.5 & 120.3 & 0.9500 & 2.944 \\ 364.8 & 10 & 3 & 19 \end{pmatrix}.$$

20. $i=2,\ j=4,$
$$A=\begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 & 190 \\ 60 & 120 & 400 & 5 \\ 20.5 & 133.3 & 0.9520 & 2.996 \\ 404 & 10.5 & 3.333 & 20 \end{pmatrix}.$$

Задание 2.2. Докажите, что матрица P идемпотентна. Вычислите ее определитель. Покажите, что матрица $I=2P-E$ инволютивна. Вычислите ее определитель и обратную матрицу.

1. $P=\begin{pmatrix} 0.646 & -0.227 & -0.421 \\ -0.227 & 0.854 & -0.270 \\ -0.421 & -0.270 & 0.500 \end{pmatrix}.$

2. $P=\begin{pmatrix} 0.587 & 0.189 & -0.455 \\ 0.189 & 0.913 & 0.208 \\ -0.455 & 0.208 & 0.500 \end{pmatrix}.$

3. $P=\begin{pmatrix} 0.990 & 0.070 & -0.071 \\ 0.070 & 0.510 & 0.495 \\ -0.071 & 0.495 & 0.500 \end{pmatrix}.$

4. $P=\begin{pmatrix} 0.714 & -0.247 & 0.378 \\ -0.247 & 0.786 & 0.327 \\ 0.378 & 0.327 & 0.500 \end{pmatrix}.$

5. $P=\begin{pmatrix} 0.540 & 0.136 & 0.479 \\ 0.136 & 0.960 & -0.142 \\ 0.479 & -0.142 & 0.500 \end{pmatrix}.$

6. $P=\begin{pmatrix} 0.961 & 0.134 & 0.140 \\ 0.134 & 0.539 & -0.480 \\ 0.140 & -0.480 & 0.500 \end{pmatrix}.$

7. $P=\begin{pmatrix} 0.784 & -0.248 & -0.328 \\ -0.248 & 0.716 & -0.377 \\ -0.328 & -0.377 & 0.500 \end{pmatrix}.$

8. $P=\begin{pmatrix} 0.511 & 0.072 & -0.495 \\ 0.072 & 0.989 & 0.073 \\ -0.495 & 0.073 & 0.500 \end{pmatrix}.$

9. $P=\begin{pmatrix} 0.915 & 0.188 & -0.206 \\ 0.188 & 0.585 & 0.456 \\ -0.206 & 0.456 & 0.500 \end{pmatrix}.$

10. $P=\begin{pmatrix} 0.852 & -0.228 & 0.272 \\ -0.228 & 0.648 & 0.420 \\ 0.272 & 0.420 & 0.500 \end{pmatrix}.$

11. $P=\begin{pmatrix} 0.872 & 0.218 & 0.253 \\ 0.218 & 0.628 & -0.431 \\ 0.253 & -0.431 & 0.500 \end{pmatrix}.$

12. $P=\begin{pmatrix} 0.856 & 0.226 & 0.268 \\ 0.226 & 0.644 & -0.422 \\ 0.268 & -0.422 & 0.500 \end{pmatrix}.$

13. $P=\begin{pmatrix} 0.912 & -0.191 & -0.210 \\ -0.191 & 0.588 & -0.454 \\ -0.210 & -0.454 & 0.500 \end{pmatrix}.$

14. $P=\begin{pmatrix} 0.509 & -0.068 & -0.495 \\ -0.068 & 0.991 & -0.068 \\ -0.495 & -0.068 & 0.500 \end{pmatrix}.$

15. $P = \begin{pmatrix} 0.789 & 0.247 & -0.325 \\ 0.247 & 0.711 & 0.380 \\ -0.325 & 0.380 & 0.500 \end{pmatrix}$. **16.** $P = \begin{pmatrix} 0.959 & -0.138 & 0.144 \\ -0.138 & 0.541 & 0.479 \\ 0.144 & 0.479 & 0.500 \end{pmatrix}$.

17. $P = \begin{pmatrix} 0.538 & -0.132 & 0.481 \\ -0.132 & 0.962 & 0.138 \\ 0.481 & 0.138 & 0.500 \end{pmatrix}$. **18.** $P = \begin{pmatrix} 0.718 & 0.248 & 0.375 \\ 0.248 & 0.782 & -0.330 \\ 0.375 & -0.330 & 0.500 \end{pmatrix}$.

19. $P = \begin{pmatrix} 0.989 & -0.074 & -0.075 \\ -0.074 & 0.511 & -0.494 \\ -0.075 & -0.494 & 0.500 \end{pmatrix}$. **20.** $P = \begin{pmatrix} 0.583 & -0.186 & -0.456 \\ -0.186 & 0.917 & -0.204 \\ -0.456 & -0.204 & 0.500 \end{pmatrix}$.

Задание 2.3. Исследуйте и, если решение существует, найдите по формулам Крамера решение системы $Ax = b$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0.005 & 0.004 & 0.150 & 0 \\ -0.090 & -0.033 & 0.0067 & -0.098 \\ 0.150 & 0.033 & 0.050 & 0 \\ 2.857 & 0.100 & -0.300 & 0.025 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.057 \\ -0.098 \\ 0.183 \\ -0.041 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0.010 & 0.008 & 0.200 & 0.050 \\ -0.080 & 0 & 0.013 & 0.050 \\ 0.250 & 0.067 & 0.067 & 0.069 \\ 0.0057 & 0.150 & -0.267 & 0.050 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.186 \\ -0.126 \\ 0.646 \\ 0.0086 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 0.015 & 0.012 & 0.250 & 0.100 \\ -0.070 & 0.033 & 0.020 & 0.075 \\ 0.350 & 0.100 & 0.075 & 0.110 \\ 0.0086 & 0.200 & -0.233 & 0.075 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.388 \\ -0.084 \\ 1.357 \\ 0.149 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0.020 & 0.016 & 0.300 & 0.150 \\ -0.060 & 0.067 & 0.027 & 0.100 \\ 0.450 & 0.133 & 0.080 & 0.139 \\ 0.011 & 0.250 & -0.200 & 0.100 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.662 \\ 0.029 \\ 2.312 \\ 0.379 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 0.025 & 0.020 & 0.350 & 0.200 \\ -0.050 & 0.100 & 0.033 & 0.125 \\ 0.550 & 0.167 & 0.083 & 0.161 \\ 0.014 & 0.300 & -0.167 & 0.125 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1.008 \\ 0.212 \\ 3.507 \\ 0.700 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 0.030 & 0.024 & 0.400 & 0.250 \\ -0.040 & 0.133 & 0.040 & 0.150 \\ 0.650 & 0.200 & 0.086 & 0.179 \\ 0.017 & 0.350 & -0.133 & 0.150 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1.427 \\ 0.465 \\ 4.940 \\ 1.111 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 0.035 & 0.028 & 0.450 & 0.300 \\ -0.030 & 0.167 & 0.047 & 0.175 \\ 0.750 & 0.233 & 0.088 & 0.195 \\ 0.020 & 0.400 & -0.100 & 0.175 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1.918 \\ 0.788 \\ 6.611 \\ 1.613 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 0.040 & 0.032 & 0.500 & 0.350 \\ -0.020 & 0.200 & 0.053 & 0.200 \\ 0.850 & 0.267 & 0.089 & 0.208 \\ 0.023 & 0.450 & -0.067 & 0.200 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2.481 \\ 1.182 \\ 8.520 \\ 2.205 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 0.045 & 0.036 & 0.550 & 0.400 \\ -0.010 & 0.233 & 0.060 & 0.225 \\ 0.950 & 0.300 & 0.090 & 0.220 \\ 0.026 & 0.500 & -0.033 & 0.225 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3.117 \\ 1.646 \\ 10.664 \\ 2.888 \end{pmatrix}.$

10. $A = \begin{pmatrix} 0.050 & 0.040 & 0.600 & 0.450 \\ 0 & 0.267 & 0.067 & 0.250 \\ 1.050 & 0.333 & 0.091 & 0.230 \\ 0.029 & 0.550 & 0 & 0.250 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3.825 \\ 2.181 \\ 13.045 \\ 3.661 \end{pmatrix}.$

11. $A = \begin{pmatrix} 0.055 & 0.044 & 0.065 & 0.500 \\ 0.010 & 0.300 & 0.073 & 0.275 \\ 1.150 & 0.367 & 0.092 & 0.240 \\ 0.031 & 0.600 & 0.033 & 0.75 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4.605 \\ 2.785 \\ 15.662 \\ 4.524 \end{pmatrix}.$

12. $A = \begin{pmatrix} 0.060 & 0.048 & 0.700 & 0.550 \\ 0.020 & 0.333 & 0.080 & 0.300 \\ 1.250 & 0.400 & 0.092 & 0.248 \\ 0.034 & 0.650 & 0.067 & 0.300 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5.458 \\ 3.460 \\ 18.515 \\ 5.478 \end{pmatrix}.$

13. $A = \begin{pmatrix} 0.065 & 0.052 & 0.750 & 0.600 \\ 0.030 & 0.367 & 0.087 & 0.325 \\ 1.350 & 0.433 & 0.093 & 0.256 \\ 0.037 & 0.700 & 0.100 & 0.325 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6.383 \\ 4.205 \\ 21.603 \\ 6.522 \end{pmatrix}.$

14. $A = \begin{pmatrix} 0.070 & 0.056 & 0.800 & 0.650 \\ 0.040 & 0.400 & 0.093 & 0.350 \\ 1.450 & 0.467 & 0.093 & 0.264 \\ 0.040 & 0.750 & 0.133 & 0.350 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7.380 \\ 5.021 \\ 24.926 \\ 7.657 \end{pmatrix}.$

15. $A = \begin{pmatrix} 0.075 & 0.060 & 0.850 & 0.700 \\ 0.050 & 0.433 & 0.100 & 0.375 \\ 1.550 & 0.500 & 0.094 & 0.248 \\ 0.043 & 0.800 & 0.167 & 0.375 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8.450 \\ 5.906 \\ 28.484 \\ 8.882 \end{pmatrix}.$

16. $A = \begin{pmatrix} 0.080 & 0.064 & 0.900 & 0.750 \\ 0.060 & 0.467 & 0.107 & 0.400 \\ 1.650 & 0.533 & 0.094 & 0.277 \\ 0.046 & 0.850 & 0.200 & 0.400 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9.592 \\ 6.862 \\ 32.278 \\ 10.198 \end{pmatrix}.$

17. $A = \begin{pmatrix} 0.085 & 0.068 & 0.950 & 0.800 \\ 0.070 & 0.500 & 0.113 & 0.425 \\ 1.750 & 0.567 & 0.094 & 0.283 \\ 0.049 & 0.900 & 0.233 & 0.425 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10.806 \\ 7.888 \\ 36.306 \\ 11.604 \end{pmatrix}.$

18. $A = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.072 & 1 & 0.85 \\ 0.08 & 0.533 & 0.12 & 0.45 \\ 1.85 & 0.6 & 0.095 & 0.289 \\ 0.051 & 0.95 & 0.267 & 0.45 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12.093 \\ 8.985 \\ 40.569 \\ 13.101 \end{pmatrix}.$

19. $A = \begin{pmatrix} 0.095 & 0.076 & 1.050 & 0.900 \\ 0.090 & 0.567 & 0.127 & 0.475 \\ 1.950 & 0.633 & 0.095 & 0.294 \\ 0.054 & 1.000 & 0.300 & 0.475 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13.452 \\ 10.152 \\ 45.067 \\ 14.688 \end{pmatrix}.$

20. $A = \begin{pmatrix} 0.100 & 0.080 & 1.100 & 0.950 \\ 0.100 & 0.600 & 0.133 & 0.500 \\ 2.050 & 0.667 & 0.095 & 0.300 \\ 0.057 & 1.050 & 0.333 & 0.500 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14.883 \\ 11.389 \\ 49.799 \\ 16.365 \end{pmatrix}.$

Задание 2.4. Найдите методом простых итераций приближенное решение линейной системы $Ax = b$.

1. $A = \begin{pmatrix} 100 & -14 & 13 \\ 0.5 & 200 & 9.5 \\ -9 & 9 & 300 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1232 \\ 326 \\ 4335 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 200 & -13 & 12 \\ 1 & 400 & 9 \\ -8 & 8 & 600 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2470 \\ 904 \\ 7920 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 300 & -12 & 11 \\ 1.5 & 600 & 8.5 \\ -7 & 7 & 900 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3504 \\ 1884 \\ 1091 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 400 & -11 & 10 \\ 2 & 800 & 8 \\ -6 & 6 & 1200 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4334 \\ 3226 \\ 13290 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 500 & -10 & 9 \\ 2.5 & 1000 & 7.5 \\ -5 & 5 & 1500 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4960 \\ 5050 \\ 15080 \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} 600 & -9 & 8 \\ 3 & 1200 & 7 \\ -4 & 4 & 1800 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5382 \\ 72360 \\ 16260 \end{pmatrix}.$

7. $A = \begin{pmatrix} 700 & -8 & 7 \\ 3.5 & 1400 & 6.5 \\ -3 & 3 & 2100 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5600 \\ 9824 \\ 16850 \end{pmatrix}.$

8. $A = \begin{pmatrix} 800 & -7 & 6 \\ 4 & 1600 & 6 \\ -2 & 2 & 2400 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5614 \\ 12810 \\ 16830 \end{pmatrix}.$

9. $A = \begin{pmatrix} 900 & -6 & 5 \\ 4.5 & 1800 & 5.5 \\ -1 & 1 & 2700 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5424 \\ 16210 \\ 16220 \end{pmatrix}.$

10. $A = \begin{pmatrix} 1000 & -5 & 4 \\ 5 & 2000 & 5 \\ 0 & 0 & 3000 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5030 \\ 20000 \\ 15000 \end{pmatrix}.$

11. $A = \begin{pmatrix} 1100 & -4 & 3 \\ 5.5 & 2200 & 4.5 \\ 1 & -1 & 3300 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4432 \\ 24200 \\ 13190 \end{pmatrix}.$

12. $A = \begin{pmatrix} 1200 & -3 & 2 \\ 6 & 2400 & 4 \\ 2 & -2 & 3600 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3630 \\ 2879 \\ 1077 \end{pmatrix}.$

13. $A = \begin{pmatrix} 1300 & -2 & 1 \\ 6.5 & 2600 & 3.5 \\ 3 & -3 & 3900 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2624 \\ 3379 \\ 7755 \end{pmatrix}.$

14. $A = \begin{pmatrix} 1400 & -1 & 0 \\ 7 & 2800 & 3 \\ 4 & -4 & 4200 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1414 \\ 39200 \\ 4140 \end{pmatrix}.$

15. $A = \begin{pmatrix} 1500 & 0 & -1 \\ 7.5 & 3000 & 2.5 \\ 5 & -5 & 4500 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 45000 \\ -75 \end{pmatrix}.$

16. $A = \begin{pmatrix} 1600 & 1 & -2 \\ 8 & 3200 & 2 \\ 6 & -6 & 4800 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1618 \\ 5121 \\ -4890 \end{pmatrix}.$

17. $A = \begin{pmatrix} 1700 & 2 & -3 \\ 8.5 & 3400 & 1.5 \\ 7 & -7 & 5100 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3440 \\ 57800 \\ -10310 \end{pmatrix}.$

18. $A = \begin{pmatrix} 1800 & 3 & -4 \\ 9 & 3600 & 1 \\ 8 & -8 & 5400 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5466 \\ 6482 \\ -16320 \end{pmatrix}.$

19. $A = \begin{pmatrix} 1900 & 4 & -5 \\ 9.5 & 3800 & 0.5 \\ 9 & -9 & 5700 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 76960 \\ 72240 \\ -22940 \end{pmatrix}.$

20. $A = \begin{pmatrix} 2100 & 6 & -7 \\ 10.5 & 4200 & -0.5 \\ 11 & -11 & 6300 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12770 \\ 88270 \\ -37970 \end{pmatrix}.$

Задание 2.5. Исследуйте однородную систему линейных алгебраических уравнений $Ax = 0$.

1. $A = \begin{pmatrix} -14 & -9 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & -2 & -4 & -14 \\ -14 & -9 & -9 & 3 & -2 \\ -15 & -11 & -11 & -3 & -8 \\ -29 & -20 & -20 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} -13 & -8 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & -3 & -13 \\ -13 & -8 & 3 & 4 & -1 \\ -13 & -9 & 4 & -1 & -6 \\ -26 & -17 & 7 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} -12 & -7 & -2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 8 & -2 & -12 \\ -12 & -7 & 4 & 5 & 0 \\ -11 & -7 & 6 & 1 & -4 \\ -23 & -14 & 10 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} -11 & -6 & -1 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 9 & -1 & -11 \\ -11 & -6 & 5 & 6 & 1 \\ -9 & -5 & 8 & 3 & 2 \\ -20 & -11 & 13 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} -10 & -5 & 0 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 0 & -10 \\ -10 & -5 & 6 & 7 & 2 \\ -7 & -3 & 10 & 5 & 0 \\ -17 & -8 & 16 & 12 & 2 \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} -9 & -4 & 1 & 6 & 11 \\ 4 & 3 & 11 & 1 & -9 \\ -9 & -4 & 7 & 8 & 3 \\ -5 & -1 & 12 & 7 & 2 \\ -14 & -5 & 19 & 15 & 5 \end{pmatrix}.$

7. $A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 2 & 7 & 12 \\ 5 & 4 & 12 & 2 & -8 \\ -8 & -3 & 8 & 9 & 4 \\ -3 & 1 & 14 & 9 & 4 \\ -11 & -2 & 22 & 18 & 8 \end{pmatrix}.$

8. $A = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 & 8 & 13 \\ 6 & 5 & 13 & 3 & -7 \\ -7 & -2 & 9 & 10 & 5 \\ -1 & 3 & 16 & 11 & 6 \\ -8 & 1 & 25 & 21 & 11 \end{pmatrix}.$

9. $A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 & 9 & 14 \\ 7 & 6 & 14 & 4 & -6 \\ -6 & -1 & 10 & 11 & 6 \\ 1 & 5 & 18 & 13 & 8 \\ -5 & 4 & 28 & 24 & 14 \end{pmatrix}.$

10. $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 8 & 7 & 15 & 5 & -5 \\ -5 & 0 & 11 & 12 & 7 \\ 3 & 7 & 20 & 15 & 10 \\ -2 & 7 & 31 & 27 & 17 \end{pmatrix}.$

11. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 & 11 & 16 \\ 9 & 8 & 16 & 6 & -4 \\ -4 & 1 & 12 & 13 & 8 \\ 5 & 9 & 22 & 17 & 12 \\ 1 & 10 & 34 & 30 & 20 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 & 12 & 17 \\ 10 & 9 & 17 & 7 & -3 \\ -3 & 2 & 13 & 14 & 9 \\ 7 & 11 & 24 & 19 & 14 \\ 4 & 13 & 37 & 33 & 23 \end{pmatrix}$.

13. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 & 13 & 18 \\ 11 & 10 & 18 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & 14 & 15 & 10 \\ 9 & 13 & 26 & 21 & 16 \\ 7 & 16 & 40 & 36 & 26 \end{pmatrix}$.

14. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 & 14 & 19 \\ 12 & 11 & 19 & 9 & -1 \\ -1 & 4 & 15 & 16 & 11 \\ 11 & 15 & 28 & 23 & 18 \\ 10 & 19 & 43 & 39 & 29 \end{pmatrix}$.

15. $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 & 15 & 20 \\ 13 & 12 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 16 & 17 & 12 \\ 13 & 17 & 30 & 25 & 20 \\ 13 & 22 & 46 & 42 & 32 \end{pmatrix}$.

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \\ 14 & 13 & 21 & 11 & 1 \\ 1 & 6 & 17 & 18 & 13 \\ 15 & 19 & 32 & 27 & 22 \\ 16 & 25 & 49 & 45 & 35 \end{pmatrix}$.

17. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 12 & 17 & 22 \\ 15 & 14 & 22 & 12 & 2 \\ 2 & 7 & 18 & 19 & 14 \\ 17 & 21 & 34 & 29 & 24 \\ 19 & 28 & 52 & 48 & 38 \end{pmatrix}$.

18. $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 & 18 & 23 \\ 16 & 15 & 23 & 13 & 3 \\ 3 & 8 & 19 & 20 & 15 \\ 19 & 23 & 36 & 31 & 26 \\ 22 & 31 & 55 & 51 & 41 \end{pmatrix}$.

19. $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 14 & 19 & 24 \\ 17 & 16 & 24 & 14 & 4 \\ 4 & 9 & 20 & 21 & 16 \\ 21 & 25 & 38 & 33 & 28 \\ 25 & 34 & 58 & 54 & 44 \end{pmatrix}$.

20. $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 18 & 17 & 25 & 15 & 5 \\ 5 & 10 & 21 & 22 & 17 \\ 23 & 27 & 40 & 35 & 30 \\ 28 & 37 & 61 & 57 & 47 \end{pmatrix}$.

Задание 2.6. Исследуйте неоднородную систему линейных алгебраических уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ для двух различных правых частей $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_2$.

1. $A = \begin{pmatrix} -14 & -9 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 6 & -4 & -14 \\ -14 & -9 & 2 & 3 & -2 \\ -15 & -11 & 2 & -3 & -8 \\ -29 & -20 & 4 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -3.45 \\ -15.2 \\ -10.45 \\ -18.65 \\ -29.1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -2.45 \\ -15.1 \\ -9.45 \\ -18.98 \\ -29.6 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} -13 & -8 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & -3 & -13 \\ -13 & -8 & 3 & 4 & -1 \\ -13 & -9 & 4 & -1 & -6 \\ -26 & -17 & 7 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -2.8 \\ -26.3 \\ -16.8 \\ -29.1 \\ -45.9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -1.8 \\ -26.1 \\ -15.8 \\ -29.77 \\ -46.9 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -12 & -7 & -2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 8 & -2 & -12 \\ -12 & -7 & 4 & 5 & 0 \\ -11 & -7 & 6 & 1 & -4 \\ -23 & -14 & 10 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1.95 \\ -33.3 \\ -19.05 \\ -31.35 \\ -50.4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2.95 \\ -33 \\ -18.05 \\ -32.35 \\ -51.9 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} -11 & -6 & -1 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 9 & -1 & -11 \\ -11 & -6 & 5 & 6 & 1 \\ -9 & -5 & 8 & 3 & -2 \\ -20 & -11 & 13 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 10.8 \\ -36.2 \\ -17.2 \\ -25.4 \\ -42.6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 11.8 \\ -35.8 \\ -16.2 \\ -26.73 \\ -44.6 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} -10 & -5 & 0 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 0 & -10 \\ -10 & -5 & 6 & 7 & 2 \\ -7 & -3 & 10 & 5 & 0 \\ -17 & -8 & 16 & 12 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 23.75 \\ 35 \\ -11.25 \\ -11.25 \\ -22.5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 24.75 \\ 34.5 \\ -10.25 \\ -12.92 \\ -25 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} -9 & -4 & 1 & 6 & 11 \\ 4 & 3 & 11 & 1 & -9 \\ -9 & -4 & 7 & 8 & 3 \\ -5 & -1 & 12 & 7 & 2 \\ -14 & -5 & 19 & 15 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 40.8 \\ -29.7 \\ -1.2 \\ 11.1 \\ 9.9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 41.8 \\ 29.1 \\ -0.2 \\ 9.1 \\ 6.9 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 2 & 7 & 12 \\ 5 & 4 & 12 & 2 & -8 \\ -8 & -3 & 8 & 9 & 4 \\ -3 & 1 & 14 & 9 & 4 \\ -11 & -2 & 22 & 18 & 8 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 61.95 \\ -20.3 \\ 12.95 \\ 41.65 \\ 54.6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 62.5 \\ -19.6 \\ 13.95 \\ 39.32 \\ 51.1 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 & 8 & 13 \\ 6 & 5 & 13 & 3 & -7 \\ -7 & -2 & 9 & 10 & 5 \\ -1 & 3 & 16 & 11 & 6 \\ -8 & 1 & 25 & 21 & 11 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 87.2 \\ -6.8 \\ 31.2 \\ 80.4 \\ 111.6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 88.2 \\ -6 \\ 32.2 \\ 77.73 \\ 107.6 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 4 & 9 & 14 \\ 7 & 6 & 14 & 4 & -6 \\ -6 & -1 & 10 & 11 & 6 \\ 1 & 5 & 18 & 13 & 8 \\ -5 & 4 & 28 & 24 & 14 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 116.55 \\ 10.8 \\ 53.55 \\ 127.35 \\ 180.9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 117.55 \\ 11.7 \\ 54.55 \\ 124.35 \\ 176.4 \end{pmatrix}$.

10. $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 8 & 7 & 15 & 5 & -5 \\ -5 & 0 & 11 & 12 & 7 \\ 3 & 7 & 20 & 15 & 10 \\ -2 & 7 & 31 & 27 & 17 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 150 \\ 32.5 \\ 80 \\ 182.5 \\ 262.5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 151 \\ 33.5 \\ 81 \\ 179.167 \\ 257.5 \end{pmatrix}$.

11. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 & 11 & 16 \\ 9 & 8 & 16 & 6 & -4 \\ -4 & 1 & 12 & 13 & 8 \\ 5 & 9 & 22 & 17 & 12 \\ 1 & 10 & 34 & 30 & 20 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 187.55 \\ 58.3 \\ 110.55 \\ 245.85 \\ 356.4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 188.55 \\ 59.4 \\ 11.55 \\ 242.183 \\ 350.9 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 & 12 & 17 \\ 10 & 9 & 17 & 7 & -3 \\ -3 & 2 & 13 & 14 & 9 \\ 7 & 11 & 24 & 19 & 14 \\ 4 & 13 & 37 & 33 & 23 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 229.2 \\ 88.2 \\ 145.2 \\ 317.4 \\ 462.6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 230.2 \\ 89.4 \\ 146.2 \\ 313.4 \\ 456.6 \end{pmatrix}$.

13. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 & 13 & 18 \\ 11 & 10 & 18 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & 14 & 15 & 10 \\ 9 & 13 & 26 & 21 & 16 \\ 7 & 16 & 40 & 36 & 26 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 274.95 \\ 122.2 \\ 183.95 \\ 397.15 \\ 581.1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 275.95 \\ 123.5 \\ 184.95 \\ 392.817 \\ 574.6 \end{pmatrix}$.

14. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 & 14 & 19 \\ 12 & 11 & 19 & 9 & -1 \\ -1 & 4 & 15 & 16 & 11 \\ 11 & 15 & 28 & 23 & 18 \\ 10 & 19 & 43 & 39 & 29 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 324.8 \\ 160.3 \\ 226.8 \\ 485.1 \\ 711.9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 325.8 \\ 161.7 \\ 227.8 \\ 480.433 \\ 704.9 \end{pmatrix}$.

15. $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 & 15 & 20 \\ 13 & 12 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 16 & 17 & 12 \\ 13 & 17 & 30 & 25 & 20 \\ 13 & 22 & 46 & 42 & 32 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 378.75 \\ 202.5 \\ 273.75 \\ 581.25 \\ 855 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 379.75 \\ 204 \\ 274.75 \\ 576.25 \\ 847.5 \end{pmatrix}$.

16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \\ 14 & 13 & 21 & 11 & 1 \\ 1 & 6 & 17 & 18 & 13 \\ 15 & 19 & 32 & 27 & 22 \\ 16 & 25 & 49 & 45 & 35 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 436.8 \\ 248.8 \\ 324.8 \\ 685.6 \\ 1010 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 437.8 \\ 250.4 \\ 325.8 \\ 680.267 \\ 1002 \end{pmatrix}$.

17. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 12 & 17 & 22 \\ 15 & 14 & 22 & 12 & 2 \\ 2 & 7 & 18 & 19 & 14 \\ 17 & 21 & 34 & 29 & 24 \\ 19 & 28 & 52 & 48 & 38 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 498.95 \\ 299.2 \\ 379.95 \\ 798.15 \\ 1178 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 499.95 \\ 300.9 \\ 380.95 \\ 792.483 \\ 1170 \end{pmatrix}$.

18. $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 & 18 & 23 \\ 16 & 15 & 23 & 13 & 3 \\ 3 & 8 & 19 & 20 & 15 \\ 19 & 23 & 36 & 31 & 26 \\ 22 & 31 & 55 & 51 & 41 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 565.2 \\ 353.7 \\ 439.2 \\ 918.9 \\ 1258 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 566.2 \\ 355.5 \\ 440.2 \\ 912.9 \\ 1349 \end{pmatrix}$.

19. $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 14 & 19 & 24 \\ 17 & 16 & 24 & 14 & 4 \\ 4 & 9 & 20 & 21 & 16 \\ 21 & 25 & 38 & 33 & 28 \\ 25 & 34 & 58 & 54 & 44 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 635.55 \\ 412.3 \\ 502.55 \\ 1048 \\ 1550 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 636.55 \\ 414.2 \\ 503.55 \\ 1042 \\ 1541 \end{pmatrix}$.

20. $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 18 & 17 & 25 & 15 & 5 \\ 5 & 10 & 21 & 22 & 17 \\ 23 & 27 & 40 & 35 & 30 \\ 28 & 37 & 60 & 57 & 47 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 711 \\ 475 \\ 570 \\ 1185 \\ 1755 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 711 \\ 477 \\ 571 \\ 1178 \\ 1755 \end{pmatrix}$.

Задание 2.7. Докажите, что векторы $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{f}_4$ образуют базис в пространстве L_4, и найдите координаты вектора $x = (1\ 1\ 1\ 1)^T$ в этом базисе.

1. $\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.333 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0.33 \\ 0.25 \\ 0.167 \\ 0.143 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 1.25 \\ -0.667 \\ 2.2 \\ 3.1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_4 = \begin{pmatrix} -0.667 \\ 1.333 \\ 1.25 \\ -0.75 \end{pmatrix}$.

2. $\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.667 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0.667 \\ 0.5 \\ 0.333 \\ 0.286 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.333 \\ 2.4 \\ 3.2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}_4 = \begin{pmatrix} -0.33 \\ 1.667 \\ 1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$.

3. $f_1 = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1 \\ 0.6 \\ 0.3 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ 0.5 \\ 0.429 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 0 \\ 2.6 \\ 3.3 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1.75 \\ -0.25 \end{pmatrix}$.

4. $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.333 \\ 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1.333 \\ 1 \\ 0.667 \\ 0.571 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.333 \\ 2.8 \\ 3.4 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 2.333 \\ 2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$.

5. $f_1 = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.667 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1.667 \\ 1.25 \\ 0.833 \\ 0.714 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 2.25 \\ 0.667 \\ 3 \\ 3.5 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 0.667 \\ 2.667 \\ 2.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$.

6. $f_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 1.2 \\ 0.6 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 1 \\ 0.887 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 3.2 \\ 3.6 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

7. $f_1 = \begin{pmatrix} 1.75 \\ 2.333 \\ 1.4 \\ 0.7 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 2.333 \\ 1.75 \\ 1.167 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 2.75 \\ 1.333 \\ 3.4 \\ 3.7 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1.333 \\ 3.333 \\ 2.75 \\ 0.75 \end{pmatrix}$.

8. $f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.667 \\ 1.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 2.667 \\ 2 \\ 1.333 \\ 1.143 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.667 \\ 3.6 \\ 3.8 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1.667 \\ 3.667 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. $f_1 = \begin{pmatrix} 2.25 \\ 3 \\ 1.8 \\ 0.9 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2.25 \\ 1.5 \\ 1.286 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 3.25 \\ 2 \\ 3.8 \\ 3.9 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3.25 \\ 1.25 \end{pmatrix}$.

10. $f_1 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3.333 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 3.333 \\ 2.5 \\ 1.667 \\ 1.429 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2.333 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 2.333 \\ 4.333 \\ 3.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$.

11. $f_1 = \begin{pmatrix} 2.75 \\ 3.667 \\ 2.2 \\ 1.1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 3.667 \\ 2.75 \\ 1.833 \\ 1.571 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 2.667 \\ 4.2 \\ 4.1 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 2.667 \\ 4.667 \\ 3.75 \\ 1.75 \end{pmatrix}$.

12. $f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2.4 \\ 1.2 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1.714 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4.4 \\ 4.2 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

13. $f_1 = \begin{pmatrix} 3.25 \\ 4.333 \\ 2.6 \\ 1.3 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 4.333 \\ 3.25 \\ 2.167 \\ 1.857 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 4.25 \\ 3.333 \\ 4.6 \\ 4.3 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 3.333 \\ 5.333 \\ 4.25 \\ 2.25 \end{pmatrix}$.

14. $f_1 = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 4.667 \\ 2.8 \\ 1.4 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 4.667 \\ 3.5 \\ 2.333 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 3.667 \\ 4.8 \\ 4.4 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 3.667 \\ 5.667 \\ 4.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$.

15. $f_1 = \begin{pmatrix} 3.75 \\ 5 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3.75 \\ 2.5 \\ 2.143 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 4.75 \\ 4 \\ 5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4.75 \\ 2.75 \end{pmatrix}$.

16. $f_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5.333 \\ 3.2 \\ 1.6 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 5.333 \\ 4 \\ 2.667 \\ 2.286 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4.333 \\ 5.2 \\ 4.6 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 4.333 \\ 6.333 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

17. $f_1 = \begin{pmatrix} 4.25 \\ 5.667 \\ 3.4 \\ 1.7 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 5.667 \\ 4.25 \\ 2.833 \\ 2.429 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 5.25 \\ 4.667 \\ 5.4 \\ 4.7 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 4.667 \\ 6.667 \\ 5.25 \\ 3.25 \end{pmatrix}$.

18. $f_1 = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 6 \\ 3.6 \\ 1.8 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4.5 \\ 3 \\ 2.571 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 5 \\ 5.6 \\ 4.8 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$.

19. $f_1 = \begin{pmatrix} 4.75 \\ 6.333 \\ 3.8 \\ 1.9 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 6.333 \\ 4.75 \\ 3.167 \\ 2.714 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 5.75 \\ 5.333 \\ 5.8 \\ 4.9 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 5.333 \\ 7.333 \\ 5.75 \\ 3.75 \end{pmatrix}$.

20. $f_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6.667 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 6.667 \\ 5 \\ 3.333 \\ 2.857 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5.667 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 5.667 \\ 7.667 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Задание 2.8. Исследуйте на линейную независимость системы векторов f_1, f_2, f_3, f_4 и g_1, g_2, g_3, g_4. Выделите в линейно зависимой системе независимую подсистему. Найдите линейные выражения всех векторов линейно зависимой системы через векторы линейно независимой подсистемы.

1. $f_1 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.2 \\ 0.25 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.5 \\ 1.2 \\ 1.25 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 2.5 \\ 1.6 \\ 1.75 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1.533 \\ 2.333 \\ 1.733 \\ 1.833 \end{pmatrix}$,

$g_1 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ -0.276 \\ -0.11 \\ -0.138 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.379 \\ -0.552 \\ -0.69 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ -0.69 \\ -0.276 \\ 0.655 \end{pmatrix}$, $g_4 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ -0.552 \\ 0.779 \\ -0.276 \end{pmatrix}$.

2. $f_1 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 2 \\ 1.4 \\ 1.5 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 4 \\ 2.2 \\ 2.5 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1.733 \\ 3.333 \\ 2.133 \\ 2.333 \end{pmatrix}$,

$$g_1 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.11 \\ -0.138 \\ 0.945 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -0.552 \\ 0.779 \\ -0.276 \\ -0.11 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -0.69 \\ -0.276 \\ 0.655 \\ -0.138 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} -0.379 \\ -0.552 \\ -0.69 \\ -0.276 \end{pmatrix}.$$

3. $$f_1 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 1.5 \\ 0.6 \\ 0.75 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 2.5 \\ 1.6 \\ 1.75 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 5.5 \\ 2.8 \\ 3.25 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1.933 \\ 4.333 \\ 2.533 \\ 2.833 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \\ -0.276 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \\ -0.552 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -0.38 \\ -0.276 \\ 0.655 \\ -0.69 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \\ -0.379 \end{pmatrix}.$$

4. $$f_1 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 2 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 3 \\ 1.8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 7 \\ 3.4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 2.133 \\ 5.333 \\ 2.933 \\ 3.333 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -0.552 \\ -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -0.69 \\ -0.138 \\ -0.276 \\ 0.655 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} -0.379 \\ -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \end{pmatrix}.$$

5. $$f_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.5 \\ 1 \\ 1.25 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3.5 \\ 2 \\ 2.25 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 8.5 \\ 4 \\ 4.75 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 2.333 \\ 6.333 \\ 3.333 \\ 3.833 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ 0.945 \\ -0.11 \\ -0.276 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.11 \\ 0.779 \\ -0.552 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0.655 \\ -0.138 \\ -0.276 \\ -0.69 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} -0.69 \\ -0.276 \\ -0.552 \\ -0.379 \end{pmatrix}$$

6. $$f_1 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 3 \\ 1.2 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 4 \\ 2.2 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 10 \\ 4.6 \\ 5.5 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 2.533 \\ 7.333 \\ 3.733 \\ 4.333 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \\ -0.552 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ -0.276 \\ 0.655 \\ -0.69 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \\ -0.379 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \\ -0.276 \end{pmatrix}.$$

7. $$f_1 = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 3.5 \\ 1.4 \\ 1.75 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1.7 \\ 4.5 \\ 2.4 \\ 2.75 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 11.5 \\ 5.2 \\ 6.25 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 2.733 \\ 8.333 \\ 4.133 \\ 4.833 \end{pmatrix},$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \\ -0.276 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ -0.276 \\ 0.655 \\ -0.69 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \\ -0.379 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \\ -0.552 \end{pmatrix}.$$

8. $f_1 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 4 \\ 1.6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 5 \\ 2.6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 13 \\ 5.8 \\ 7 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 2.933 \\ 9.333 \\ 4.533 \\ 5.333 \end{pmatrix}$,

$g_1 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \\ -0.276 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \\ -0.552 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \\ -0.379 \end{pmatrix}$, $g_4 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ -0.276 \\ 0.655 \\ -0.69 \end{pmatrix}$.

9. $f_1 = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 4.5 \\ 1.8 \\ 2.25 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 5.5 \\ 2.8 \\ 3.25 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 3.7 \\ 14.5 \\ 6.4 \\ 7.75 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 3.133 \\ 10.333 \\ 4.933 \\ 5.833 \end{pmatrix}$,

$g_1 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \\ -0.276 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \\ -0.379 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \\ -0.552 \end{pmatrix}$, $g_4 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ -0.276 \\ 0.655 \\ -0.69 \end{pmatrix}$.

10. $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 2.5 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 3.5 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 7 \\ 8.5 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 3.333 \\ 11.333 \\ 5.333 \\ 6.333 \end{pmatrix}$,

$g_1 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ -0.276 \\ 0.655 \\ -0.69 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \\ -0.276 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \\ -0.552 \end{pmatrix}$, $g_4 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \\ -0.379 \end{pmatrix}$.

11. $f_1 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 5.5 \\ 2.2 \\ 2.75 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 6.5 \\ 3.2 \\ 3.75 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 4.3 \\ 17.5 \\ 7.6 \\ 9.25 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 3.533 \\ 12.333 \\ 5.733 \\ 6.833 \end{pmatrix}$,

$g_1 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ 0.945 \\ -0.11 \\ -0.276 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.11 \\ 0.779 \\ -0.552 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} 0.655 \\ -0.138 \\ -0.276 \\ -0.69 \end{pmatrix}$, $g_4 = \begin{pmatrix} -0.69 \\ -0.276 \\ -0.552 \\ -0.379 \end{pmatrix}$.

12. $f_1 = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 6 \\ 2.4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 7 \\ 3.4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 4.6 \\ 19 \\ 8.2 \\ 10 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 3.733 \\ 13.333 \\ 6.133 \\ 7.333 \end{pmatrix}$,

$g_1 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ -0.138 \\ 0.945 \\ -0.276 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 0.779 \\ -0.276 \\ -0.11 \\ -0.552 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ 0.655 \\ -0.138 \\ -0.69 \end{pmatrix}$, $g_4 = \begin{pmatrix} -0.552 \\ -0.69 \\ -0.276 \\ -0.379 \end{pmatrix}$.

13. $f_1 = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 6.5 \\ 2.6 \\ 3.25 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 2.3 \\ 7.5 \\ 3.6 \\ 4.25 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 4.9 \\ 20.5 \\ 8.8 \\ 10.75 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 3.933 \\ 14.333 \\ 6.533 \\ 7.833 \end{pmatrix}$,

$$g_1 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \\ -0.552 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \\ -0.276 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ -0.276 \\ 0.655 \\ -0.69 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \\ -0.379 \end{pmatrix}.$$

14. $f_1 = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 7 \\ 2.8 \\ 3.5 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2.4 \\ 8 \\ 3.8 \\ 4.5 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 5.2 \\ 22 \\ 9.4 \\ 11.5 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 4.133 \\ 15.333 \\ 6.933 \\ 8.333 \end{pmatrix},$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \\ -0.276 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ -0.276 \\ 0.655 \\ -0.69 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \\ -0.379 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \\ -0.552 \end{pmatrix}.$$

15. $f_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 7.5 \\ 3 \\ 3.75 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 8.5 \\ 4 \\ 4.75 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 23.5 \\ 11 \\ 12.25 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 4.333 \\ 16.333 \\ 7.333 \\ 8.833 \end{pmatrix},$

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \\ -0.276 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \\ -0.552 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \\ -0.379 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ -0.276 \\ 0.655 \\ -0.69 \end{pmatrix}.$$

16. $f_1 = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 8 \\ 3.2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 9 \\ 4.2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 5.8 \\ 25 \\ 10.6 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 4.533 \\ 17.333 \\ 7.733 \\ 9.333 \end{pmatrix},$

$$g_1 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \\ -0.379 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \\ -0.276 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \\ -0.552 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ -0.276 \\ 0.655 \\ -0.69 \end{pmatrix}.$$

17. $f_1 = \begin{pmatrix} 1.7 \\ 8.5 \\ 3.4 \\ 4.25 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2.7 \\ 9.5 \\ 4.4 \\ 5.25 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 6.1 \\ 26.5 \\ 11.2 \\ 13.75 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 4.733 \\ 18.333 \\ 8.133 \\ 9.833 \end{pmatrix},$

$$g_1 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ -0.276 \\ 0.655 \\ -0.69 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \\ -0.276 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \\ -0.552 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \\ -0.379 \end{pmatrix}.$$

18. $f_1 = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 9 \\ 3.6 \\ 4.5 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 10 \\ 4.6 \\ 5.5 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 28 \\ 11.8 \\ 14.5 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 4.933 \\ 19.333 \\ 8.533 \\ 10.333 \end{pmatrix},$

$$g_1 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ 0.945 \\ -0.11 \\ -0.138 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -0.552 \\ -0.11 \\ 0.779 \\ -0.276 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} -0.69 \\ -0.138 \\ -0.276 \\ 0.655 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} -0.379 \\ -0.276 \\ -0.552 \\ -0.69 \end{pmatrix}.$$

19. $f_1 = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 9.5 \\ 3.8 \\ 4.75 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 10.5 \\ 4.6 \\ 5.5 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 6.7 \\ 29.5 \\ 12.4 \\ 15.25 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 5.133 \\ 20.333 \\ 8.933 \\ 10.833 \end{pmatrix}$,

$g_1 = \begin{pmatrix} -0.138 \\ 0.945 \\ -0.11 \\ -0.276 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.11 \\ 0.779 \\ -0.552 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} 0.655 \\ -0.138 \\ -0.276 \\ -0.69 \end{pmatrix}$, $g_4 = \begin{pmatrix} -0.69 \\ -0.276 \\ -0.552 \\ -0.379 \end{pmatrix}$.

20. $f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 31 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 5.333 \\ 21.333 \\ 9.333 \\ 11.333 \end{pmatrix}$,

$g_1 = \begin{pmatrix} -0.11 \\ 0.945 \\ -0.276 \\ -0.138 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 0.779 \\ -0.11 \\ -0.552 \\ -0.276 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} -0.276 \\ -0.138 \\ -0.69 \\ 0.655 \end{pmatrix}$, $g_4 = \begin{pmatrix} -0.552 \\ -0.276 \\ -0.379 \\ -0.69 \end{pmatrix}$.

Задание 2.9. Оператор A, действующий в линейном пространстве X_n, задан своей матрицей в некотором базисе. Найдите координаты образа $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ вектора $\boldsymbol{x} \in X_n$. В линейном пространстве X_n введен новый базис. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{x} \in X_n$, координаты образа $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ и матрицу оператора в новом базисе. Выполните вычисления для $\boldsymbol{x} = (1\ \ -1\ \ 2\ \ -2)^T$ и $\boldsymbol{e}_1' = (N\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$, $\boldsymbol{e}_2' = (N\ \ N\ \ 0\ \ 0)^T$, $\boldsymbol{e}_3' = (N\ \ N\ \ N\ \ 0)^T$, $\boldsymbol{e}_4' = (N\ \ N\ \ N\ \ N)^T$, где N — номер варианта.

1. $A = \begin{pmatrix} 0.333 & -0.064 & 0.154 & -0.321 \\ 0.333 & -0.026 & 0.462 & -1.128 \\ 0.167 & -0.167 & 0.75 & -0.833 \\ 0.1 & -0.062 & 0.158 & -0.108 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} 2.667 & -0.513 & 1.231 & -2.564 \\ 2.667 & -0.205 & 3.692 & -9.026 \\ 1.333 & -1.333 & 6 & -6.667 \\ 0.8 & -0.429 & 1.262 & -0.862 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 0.333 & -0.064 & 0.154 & -0.321 \\ 0.333 & -0.026 & 0.462 & -1.128 \\ 0.167 & -0.167 & 0.75 & -0.833 \\ 0.1 & -0.062 & 0.158 & -0.108 \end{pmatrix}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -0.577 & 1.385 & -2.885 \\ 3 & -0.231 & 4.154 & -10.154 \\ 1.5 & -1.5 & 6.75 & -7.5 \\ 0.9 & -0.554 & 1.419 & -0.969 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -0.192 & 0.462 & -0.962 \\ 1 & -0.077 & 1.385 & -3.385 \\ 0.5 & -0.5 & 2.25 & -2.5 \\ 0.3 & -0.185 & 0.473 & -0.323 \end{pmatrix}$ **6.** $A = \begin{pmatrix} 3.333 & -0.641 & 1.538 & -3.025 \\ 3.333 & -0.256 & 4.615 & -11.282 \\ 1.667 & -1.667 & 7.5 & -8.333 \\ 1 & -0.615 & 1.577 & -1.077 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1.333 & -0.256 & 0.615 & -1.282 \\ 1.333 & -0.103 & 1.846 & -4.513 \\ 0.667 & -0.667 & 3 & -3.333 \\ 0.4 & -0.246 & 0.631 & -0.431 \end{pmatrix}$ **8.** $A = \begin{pmatrix} 3.667 & -0.705 & 1.692 & -3.526 \\ 3.667 & -0.282 & 5.077 & -12.41 \\ 1.833 & -1.833 & 8.25 & -9.167 \\ 1.1 & -0.667 & 1.735 & -1.185 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 1.667 & -0.321 & 0.769 & -1.603 \\ 1.667 & -0.128 & 2.308 & -5.641 \\ 0.833 & -0.833 & 3.75 & -4.167 \\ 0.5 & -0.308 & 0.788 & -0.538 \end{pmatrix}$ **10.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -0.769 & 1.846 & -3.846 \\ 4 & -0.308 & 5.538 & -13.538 \\ 2 & -2 & 9 & -10 \\ 12 & -0.738 & 1.892 & -1.292 \end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix} 2 & -0.385 & 0.923 & -1.923 \\ 2 & -0.154 & 2.769 & -6.769 \\ 1 & -1 & 4.5 & -5 \\ 0.6 & -0.369 & 0.946 & -0.646 \end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix} 4.333 & -0.833 & 2 & -4.167 \\ 4.333 & -0.333 & 6 & -14.667 \\ 2.167 & -2.167 & 9.75 & -10.833 \\ 1.3 & -0.8 & 2.05 & -1.4 \end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix} 2.333 & -0.449 & 1.077 & -2.244 \\ 2.333 & -0.179 & 3.231 & -7.897 \\ 1.167 & -1.167 & 5.25 & -5.833 \\ 0.7 & -0.431 & 1.104 & -0.754 \end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix} 4.667 & -0.897 & 2.154 & -4.487 \\ 4.667 & -0.359 & 6.462 & -15.795 \\ 2.333 & -2.333 & 10.5 & -11.667 \\ 14 & -0.862 & 2.208 & -1.508 \end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix} 5 & -0.962 & 2.308 & -4.808 \\ 5 & -0.385 & 6.923 & -16.923 \\ 2.5 & -2.5 & 11.25 & -1.25 \\ 1.5 & -0.923 & 2.365 & -1.615 \end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix} 7.333 & -1.41 & 3.385 & -7.051 \\ 7.333 & -0.564 & 10.154 & 2.482 \\ 3.667 & -3.667 & 1.65 & -18.333 \\ 2.2 & -1.354 & 3.469 & -2.369 \end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix} 0.333 & -0.064 & 0.154 & -0.321 \\ 0.333 & -0.026 & 0.462 & -1.128 \\ 0.167 & -0.167 & 0.75 & -0.833 \\ 0.1 & -0.062 & 0.158 & -0.108 \end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix} 7.667 & -1.474 & 3.538 & -7.372 \\ 7.667 & -0.59 & 10.615 & -25.949 \\ 3.833 & -3.833 & 17.25 & -19.167 \\ 2.3 & -1.415 & 3.627 & -2.477 \end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix} 5.667 & -1.09 & 2.615 & -5.449 \\ 5.667 & -0.436 & 7.846 & -19.179 \\ 2.833 & -2.833 & 1.275 & -14.167 \\ 1.7 & -1.046 & 2.681 & -1.831 \end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix} 8 & -1.538 & 3.692 & -7.692 \\ 8 & -0.615 & 11.077 & -27.077 \\ 4 & -4 & 18 & -20 \\ 2.4 & -1.477 & 3.785 & -2.585 \end{pmatrix}$

Задание 2.10. Опишите структуру образа и ядра линейного оператора, действующего в линейном пространстве X, заданного своей матрицей в некотором базисе. Проверьте, принадлежат ли векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ядру оператора, а векторы $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ — его образу. Выполните вычисления для оператора из задания 2.9.

1. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -0.18 \\ -0.898 \\ -0.359 \\ -0.18 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} 0.82 \\ 0.102 \\ 0.641 \\ 0.82 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 0.103 \\ -0.359 \\ -0.083 \\ 0.088 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1.103 \\ 0.641 \\ 0.917 \\ 1.088 \end{pmatrix}$.

2. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -0.18 \\ -0.898 \\ -0.359 \\ -0.18 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} 0.82 \\ 0.102 \\ 0.641 \\ 0.82 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 0.205 \\ -0.718 \\ -0.167 \\ 0.177 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1.205 \\ 0.282 \\ 0.833 \\ 1.177 \end{pmatrix}$.

3. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.898 \\ 0.359 \\ 0.18 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} 1.18 \\ 1.898 \\ 1.359 \\ 1.18 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 0.308 \\ -1.077 \\ -0.25 \\ 0.265 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1.308 \\ -0.077 \\ 0.75 \\ 1.265 \end{pmatrix}$.

4. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -0.18 \\ -0.898 \\ -0.359 \\ -0.18 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} 0.82 \\ 0.102 \\ 0.641 \\ 0.82 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 0.41 \\ -1.436 \\ -0.333 \\ 0.354 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1.41 \\ -0.436 \\ 0.667 \\ 1.354 \end{pmatrix}$.

5. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.898 \\ 0.359 \\ 0.18 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} 1.18 \\ 1.898 \\ 1.359 \\ 1.18 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 0.513 \\ -1.795 \\ -0.417 \\ 0.442 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1.513 \\ -0.795 \\ 0.583 \\ 1.442 \end{pmatrix}$.

6. $x = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.898 \\ 0.359 \\ 0.18 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 1.898 \\ 1.359 \\ 1.18 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0.645 \\ -2.154 \\ -0.5 \\ 0.531 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1.615 \\ -1.154 \\ 0.5 \\ 1.531 \end{pmatrix}$.

7. $x = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.898 \\ 0.359 \\ 0.18 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 1.898 \\ 1.359 \\ 1.18 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0.718 \\ -2.513 \\ -0.583 \\ 0.619 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1.718 \\ -1.513 \\ 0.417 \\ 1.619 \end{pmatrix}$.

8. $x = \begin{pmatrix} -0.18 \\ -0.898 \\ -0.359 \\ -0.18 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0.82 \\ 0.102 \\ 0.641 \\ 0.82 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0.821 \\ -2.872 \\ -0.667 \\ 0.708 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1.821 \\ -1.872 \\ 0.333 \\ 1.708 \end{pmatrix}$.

9. $x = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.898 \\ 0.359 \\ 0.18 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 1.898 \\ 1.359 \\ 1.18 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0.923 \\ -3.231 \\ -0.75 \\ 0.796 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1.923 \\ -2.231 \\ 0.25 \\ 1.796 \end{pmatrix}$.

10. $x = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.898 \\ 0.359 \\ 0.18 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 1.898 \\ 1.359 \\ 1.18 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1.026 \\ -3.59 \\ -0.833 \\ 0.885 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2.026 \\ -2.59 \\ 0.167 \\ 1.885 \end{pmatrix}$.

11. $x = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.898 \\ 0.359 \\ 0.18 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 1.898 \\ 1.359 \\ 1.18 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1.128 \\ -3.949 \\ -0.917 \\ 0.973 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2.128 \\ -2.949 \\ 0.083 \\ 1.973 \end{pmatrix}$.

12. $x = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.898 \\ 0.359 \\ 0.18 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 1.898 \\ 1.359 \\ 1.18 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1.231 \\ -4.308 \\ -1 \\ 1.062 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2.231 \\ -3.308 \\ 0 \\ 2.062 \end{pmatrix}$.

13. $x = \begin{pmatrix} -0.18 \\ -0.898 \\ -0.359 \\ -0.18 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0.82 \\ 0.102 \\ 0.641 \\ 0.82 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1.333 \\ -4.667 \\ -1.083 \\ 1.15 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2.333 \\ -3.667 \\ -0.083 \\ 2.15 \end{pmatrix}$.

14. $x = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.898 \\ 0.359 \\ 0.18 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 1.898 \\ 1.359 \\ 1.18 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1.436 \\ -5.026 \\ -1.167 \\ 1.238 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2.436 \\ -4.026 \\ -0.167 \\ 2.238 \end{pmatrix}$.

15. $x = \begin{pmatrix} -0.18 \\ -0.898 \\ -0.359 \\ -0.18 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0.82 \\ 0.102 \\ 0.641 \\ 0.82 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1.538 \\ -5.385 \\ -1.25 \\ 1.327 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2.538 \\ -4.385 \\ -0.25 \\ 2.327 \end{pmatrix}$.

16. $x = \begin{pmatrix} -0.18 \\ -0.898 \\ -0.359 \\ -0.18 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0.82 \\ 0.102 \\ 0.641 \\ 0.82 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1.641 \\ -5.744 \\ -1.333 \\ 1.415 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2.641 \\ -4.744 \\ -0.333 \\ 2.415 \end{pmatrix}$.

17. $x = \begin{pmatrix} -0.18 \\ -0.898 \\ -0.359 \\ -0.18 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0.82 \\ 0.102 \\ 0.641 \\ 0.82 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1.744 \\ -6.103 \\ -1.417 \\ 1.504 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2.744 \\ -5.103 \\ -0.417 \\ 2.504 \end{pmatrix}$.

18. $x = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.898 \\ 0.359 \\ 0.18 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 1.898 \\ 1.359 \\ 1.18 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1.846 \\ -6.462 \\ -1.5 \\ 1.592 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2.846 \\ -5.462 \\ -0.5 \\ 2.592 \end{pmatrix}.$

19. $x = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.898 \\ 0.359 \\ 0.18 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 1.898 \\ 1.359 \\ 1.18 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1.949 \\ -6.821 \\ -1.583 \\ 1.681 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2.949 \\ -5.821 \\ -0.583 \\ 2.681 \end{pmatrix}.$

20. $x = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.898 \\ 0.359 \\ 0.18 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1.18 \\ 1.898 \\ 1.359 \\ 1.18 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 2.051 \\ -7.179 \\ -1.667 \\ 1.769 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3.051 \\ -6.179 \\ -0.667 \\ 2.769 \end{pmatrix}.$

Задание 2.11. Исследуйте заданную таблицей межотраслевого баланса модель экономической системы (в таблицах A и I — сельское хозяйство, B и II — промышленность, C и III — транспорт, IV — сектор конечного спроса (домашние хозяйства), V — общий выпуск). Найдите объем выпуска каждой отрасли по заданному конечному спросу. Найдите зависимость выпуска каждой отрасли от конечного спроса. Укажите, как должен измениться выпуск каждого сектора при увеличении спроса на транспортные услуги на $k\%$, где $k = N$ для вариантов $N = 1 - 10$, $k = (N/2) - 5$ для вариантов $N = 11 - 20$.

1. $Y = (100\ \ 100\ \ 110)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	10	16	50	20	96
B	3	15	40	23	81
C	2	26	30	32	90

2. $Y = (200\ \ 150\ \ 110)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	20	22	100	30	172
B	6	20	80	26	132
C	5	32	60	35	132

3. $Y = (300\ \ 250\ \ 190)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	30	28	150	40	248
B	10	25	120	30	185
C	7	38	90	37	172

4. $Y = (400\ \ 250\ \ 250)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	40	34	200	50	324
B	13	30	160	33	236
C	10	44	120	40	214

5. $Y = (410\ \ 300\ \ 300)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	50	40	250	60	400
B	16	35	200	36	287
C	12	50	150	42	254

6. $Y = (500\ \ 400\ \ 350)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	60	46	300	70	476
B	20	40	240	40	340
C	15	56	180	45	296

7. $Y = (600\ \ 450\ \ 400)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	70	52	350	80	552
B	23	45	280	43	391
C	17	62	210	47	336

8. $Y = (650\ \ 450\ \ 400)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	80	58	400	90	628
B	26	50	320	46	442
C	20	68	240	50	378

9. $Y = (710\ \ 500\ \ 420)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	90	64	450	100	704
B	30	55	360	50	495
C	22	74	270	52	418

10. $Y = (800\ \ 600\ \ 500)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	100	70	500	110	780
B	33	60	400	53	546
C	25	80	300	55	460

11. $Y = (500\ \ 400\ \ 300)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	60	46	300	70	476
B	20	40	240	40	340
C	15	56	180	45	296

12. $Y = (600\ \ 400\ \ 350)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	70	52	350	80	552
B	23	45	280	43	391
C	17	62	210	47	336

13. $Y = (660\ \ 400\ \ 350)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	80	58	400	90	628
B	26	50	320	46	442
C	20	68	240	50	378

14. $Y = (730\ \ 600\ \ 460)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	90	64	450	100	704
B	30	55	360	50	495
C	22	74	270	52	418

15. $Y = (800\ \ 600\ \ 500)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	100	70	500	11	780
B	33	60	400	53	546
C	25	80	300	55	460

16. $Y = (720\ \ 610\ \ 520)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	90	64	450	100	704
B	36	65	440	56	597
C	27	86	330	57	500

17. $Y = (1000\ \ 700\ \ 600)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	120	82	600	130	932
B	40	70	48	60	650
C	30	92	360	60	542

18. $Y = (1100\ \ 750\ \ 620)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	130	88	650	140	1008
B	43	75	520	63	701
C	32	98	390	62	582

19. $Y = (1200\ \ 800\ \ 700)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	140	94	700	150	1084
B	46	80	560	66	752
C	35	104	420	65	624

20. $Y = (1250\ \ 850\ \ 700)^T$.

	I	II	III	IV	V
A	150	100	750	160	1160
B	50	85	600	70	805
C	37	110	450	67	664

Задание 2.12. Найдите цену на единицу продукции каждого производственного сектора модели экономики из задания 2.11 для указанного в условии вектора платежей. Укажите, как увеличиваются цены на транспортные услуги при увеличении на единицу платежей в секторе сельского хозяйства.

N	Платежи			*N*	Платежи		
1	0.5	0.6	0.3	5	0.3	0.4	0.5
2	0.4	0.2	0.1	6	0.3	0.5	0.6
3	0.4	0.3	0.2	7	0.3	0.6	0.7
4	0.4	0.4	0.5	8	0.4	0.6	0.7

N	Платежи			N	Платежи		
9	0.5	0.4	0.2	**15**	0.4	0.5	0.6
10	0.2	0.2	0.3	**16**	0.4	0.4	0.5
11	0.3	0.4	0.1	**17**	0.4	0.4	0.4
12	0.5	0.3	0.1	**18**	0.5	0.5	0.5
13	0.2	0.4	0.2	**19**	0.5	0.6	0.6
14	0.3	0.3	0.4	**20**	0.5	0.6	0.7

Задание 2.13. Исследуйте заданную структурной матрицей модель экономической системы (A — сельское хозяйство, B — промышленность, C — транспорт, I — конечный спрос, II — экспорт-импорт, III — конечный продукт). Найдите объем выпуска каждой отрасли по заданному конечному спросу при наличии экспорта и импорта. Найдите матрицу нового баланса. Проверьте правильность вычислений.

1.

	I	II	III
A	20	10	$20+10$
B	23	30	$23+30$
C	32	-5	$32-5$

2.

	I	II	III
A	30	10	$30+10$
B	26	30	$26+30$
C	35	-5	$35-5$

3.

	I	II	III
A	40	20	$40+20$
B	30	-10	$30-10$
C	37	6	$37+6$

4.

	I	II	III
A	50	-10	$50-10$
B	33	6	$33+6$
C	40	-5	$40-5$

5.

	I	II	III
A	60	-20	$60-20$
B	36	5	$36+5$
C	42	7	$42+7$

6.

	I	II	III
A	70	-40	$70-40$
B	40	10	$40+10$
C	45	5	$45+5$

7.

	I	II	III
A	80	-50	$80-50$
B	43	4	$43+4$
C	47	-10	$47-10$

8.

	I	II	III
A	90	-30	$90-30$
B	46	-6	$46-6$
C	50	-20	$50-20$

9.

	I	II	III
A	100	-50	$100-50$
B	50	10	$50+10$
C	52	-3	$52-3$

10.

	I	II	III
A	110	-40	$110-40$
B	53	-6	$53-6$
C	55	-15	$55-15$

11.

	I	II	III
A	70	-20	$70-20$
B	40	10	$40+10$
C	45	-5	$45-5$

12.

	I	II	III
A	80	-30	$80-30$
B	43	3	$43+3$
C	47	3	$47+3$

13.

	I	II	III
A	90	-30	$90-30$
B	46	-6	$46-6$
C	50	10	$50+10$

14.

	I	II	III
A	100	10	$100+10$
B	50	10	$50+10$
C	52	-4	$52-4$

15.

	I	II	III
A	11	30	11 + 30
B	53	−13	53 − 13
C	55	−5	55 − 5

16.

	I	II	III
A	100	−50	50 − 50
B	56	−6	56 − 6
C	57	3	57 + 3

17.

	I	II	III
A	130	−30	130 − 30
B	60	−30	60 − 30
C	60	10	60 + 10

18.

	I	II	III
A	140	10	140 + 10
B	63	−3	63 − 3
C	62	8	62 + 8

19.

	I	II	III
A	150	−50	150 − 50
B	66	−6	66 − 6
C	65	5	65 + 5

20.

	I	II	III
A	160	−10	160 − 10
B	70	30	70 + 30
C	67	−7	67 − 7

Задание 2.14. Найдите национальные доходы торгующих стран в сбалансированной системе международной торговли с заданной структурной матрицей торговли.

1. $A = \begin{pmatrix} 0.091 & 0.059 & 0.182 & 0.333 \\ 0.409 & 0.441 & 0.318 & 0.333 \\ 0.169 & 0.4 & 0.273 & 0.167 \\ 0.333 & 0.367 & 0.227 & 0.167 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0.086 & 0.056 & 0.167 & 0.333 \\ 0.417 & 0.444 & 0.333 & 0.333 \\ 0.154 & 0.333 & 0.25 & 0.167 \\ 0.346 & 0.375 & 0.25 & 0.167 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 0.077 & 0.053 & 0.154 & 0.333 \\ 0.423 & 0.447 & 0.346 & 0.333 \\ 0.143 & 0.286 & 0.231 & 0.167 \\ 0.357 & 0.382 & 0.269 & 0.167 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 0.071 & 0.05 & 0.143 & 0.333 \\ 0.429 & 0.45 & 0.357 & 0.333 \\ 0.133 & 0.25 & 0.214 & 0.167 \\ 0.367 & 0.389 & 0.286 & 0.167 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 0.067 & 0.048 & 0.133 & 0.333 \\ 0.433 & 0.452 & 0.367 & 0.333 \\ 0.125 & 0.222 & 0.2 & 0.167 \\ 0.375 & 0.395 & 0.3 & 0.167 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 0.063 & 0.045 & 0.125 & 0.333 \\ 0.438 & 0.455 & 0.375 & 0.333 \\ 0.118 & 0.2 & 0.188 & 0.167 \\ 0.382 & 0.4 & 0.313 & 0.167 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 0.059 & 0.043 & 0.118 & 0.333 \\ 0.441 & 0.457 & 0.382 & 0.333 \\ 0.111 & 0.182 & 0.176 & 0.167 \\ 0.389 & 0.405 & 0.324 & 0.167 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 0.056 & 0.042 & 0.111 & 0.333 \\ 0.444 & 0.458 & 0.389 & 0.333 \\ 0.105 & 0.167 & 0.167 & 0.167 \\ 0.395 & 0.409 & 0.333 & 0.167 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 0.053 & 0.04 & 0.105 & 0.333 \\ 0.447 & 0.46 & 0.395 & 0.333 \\ 0.1 & 0.154 & 0.158 & 0.167 \\ 0.4 & 0.413 & 0.342 & 0.167 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.038 & 0.1 & 0.333 \\ 0.45 & 0.462 & 0.4 & 0.333 \\ 0.095 & 0.143 & 0.15 & 0.167 \\ 0.405 & 0.417 & 0.35 & 0.167 \end{pmatrix}$

11. $A = \begin{pmatrix} 0.048 & 0.037 & 0.095 & 0.167 \\ 0.202 & 0.213 & 0.405 & 0.333 \\ 0.091 & 0.133 & 0.143 & 0.167 \\ 0.659 & 0.67 & 0.357 & 0.333 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 0.045 & 0.036 & 0.091 & 0.167 \\ 0.205 & 0.214 & 0.409 & 0.333 \\ 0.087 & 0.125 & 0.136 & 0.167 \\ 0.663 & 0.673 & 0.364 & 0.333 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 0.043 & 0.034 & 0.087 & 0.167 \\ 0.207 & 0.216 & 0.413 & 0.333 \\ 0.083 & 0.118 & 0.13 & 0.167 \\ 0.667 & 0.676 & 0.37 & 0.333 \end{pmatrix}$

14. $A = \begin{pmatrix} 0.042 & 0.033 & 0.083 & 0.167 \\ 0.208 & 0.217 & 0.417 & 0.333 \\ 0.08 & 0.111 & 0.125 & 0.167 \\ 0.67 & 0.679 & 0.375 & 0.333 \end{pmatrix}$

15. $A = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.032 & 0.08 & 0.167 \\ 0.21 & 0.218 & 0.42 & 0.333 \\ 0.077 & 0.105 & 0.12 & 0.167 \\ 0.673 & 0.681 & 0.38 & 0.333 \end{pmatrix}$ **16.** $A = \begin{pmatrix} 0.038 & 0.031 & 0.077 & 0.167 \\ 0.212 & 0.219 & 0.423 & 0.333 \\ 0.074 & 0.1 & 0.115 & 0.167 \\ 0.676 & 0.683 & 0.385 & 0.333 \end{pmatrix}$

17. $A = \begin{pmatrix} 0.037 & 0.03 & 0.074 & 0.167 \\ 0.213 & 0.22 & 0.426 & 0.333 \\ 0.071 & 0.095 & 0.111 & 0.167 \\ 0.679 & 0.685 & 0.389 & 0.333 \end{pmatrix}$ **18.** $A = \begin{pmatrix} 0.036 & 0.029 & 0.071 & 0.167 \\ 0.214 & 0.221 & 0.429 & 0.333 \\ 0.069 & 0.091 & 0.107 & 0.167 \\ 0.681 & 0.688 & 0.393 & 0.333 \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 0.034 & 0.029 & 0.069 & 0.167 \\ 0.216 & 0.221 & 0.431 & 0.333 \\ 0.067 & 0.087 & 0.103 & 0.167 \\ 0.683 & 0.689 & 0.397 & 0.333 \end{pmatrix}$ **20.** $A = \begin{pmatrix} 0.033 & 0.028 & 0.067 & 0.167 \\ 0.217 & 0.222 & 0.433 & 0.333 \\ 0.065 & 0.083 & 0.1 & 0.167 \\ 0.685 & 0.691 & 0.4 & 0.333 \end{pmatrix}$

Задание 2.15. Найдите минимум целевой функции $f(x,y) = ax + by$ при указанных ограничениях.

N	$f(x,y)$	Ограничения				
1	$3x+2y$	$x+y \le 4$	$x+2y \ge 5$	$2x+y \ge 6$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
2	$3x+2y$	$x+y \le 6$	$x+2y \ge 7$	$2x+y \ge 8$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
3	$3x+2y$	$x+y \le 8$	$x+2y \ge 8$	$2x+y \ge 8$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
4	$3x+2y$	$x+y \le 9$	$x+2y \ge 7$	$2x+y \ge 6$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
5	$3x+2y$	$x+y \le 6$	$x+2y \ge 5$	$2x+y \ge 3$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
6	$3x+2y$	$x+y \le 8$	$x+2y \ge 9$	$2x+y \ge 7$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
7	$3x+2y$	$x+y \le 7$	$x+2y \ge 7$	$2x+y \ge 7$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
8	$3x+2y$	$x+y \le 11$	$x+2y \ge 11$	$2x+y \ge 11$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
9	$3x+2y$	$x+y \le 9$	$x+2y \ge 9$	$2x+y \ge 9$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
10	$3x+2y$	$x+y \le 10$	$x+2y \le 10$	$2x+y \le 10$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
11	$2x+5y$	$x+y \ge 1$	$x+2y \le 10$	$2x+y \le 10$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
12	$2x+5y$	$x+y \ge 4$	$x+2y \le 12$	$2x+y \le 12$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
13	$2x+5y$	$x+y \ge 4$	$x+2y \le 13$	$2x+y \le 13$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
14	$2x+5y$	$x+y \ge 5$	$x+2y \le 14$	$2x+y \le 14$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
15	$2x+5y$	$x+y \ge 5$	$x+2y \le 15$	$2x+y \le 15$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
16	$2x+5y$	$x+y \ge 6$	$x+2y \le 11$	$2x+y \le 8$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
17	$2x+5y$	$x+y \ge 7$	$x+2y \le 13$	$2x+y \le 9$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
18	$2x+5y$	$2x+y \ge 8$	$x+2y \le 15$	$2x+y \le 10$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
19	$2x+5y$	$2x+y \ge 9$	$x+2y \le 17$	$2x+y \le 11$	$x \ge 0$	$y \ge 0$
20	$2x+5y$	$2x+y \ge 3$	$x+2y \le 3$	$2x+y \le 4$	$x \ge 0$	$y \ge 0$

Задание 2.16. Найдите нормальное обобщенное решение линейной системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ для двух вариантов правых частей $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_2$. Найдите

классическое решение системы, если оно существует, и сравните его с обобщенным.

1. $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333 & 0.25 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & 1.333 & 1.25 \\ 2.5 & 2.333 & 2.25 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0.833 \\ 2 \\ 2.833 \\ 4.833 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1.833 \\ 3 \\ 3.833 \\ 5.833 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.667 & 0.5 \\ 1.5 & 1.333 & 1.25 \\ 2.5 & 2 & 1.75 \\ 4 & 3.333 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1.667 \\ 2.833 \\ 4.5 \\ 7.333 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2.667 \\ 3.833 \\ 5.5 \\ 8.333 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 & 0.75 \\ 2 & 1.667 & 1.5 \\ 3.5 & 2.667 & 2.25 \\ 5.5 & 4.333 & 3.75 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3.667 \\ 6.167 \\ 9.833 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 4.667 \\ 7.667 \\ 10.833 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1.333 & 1 \\ 2.5 & 2 & 1.75 \\ 4.5 & 3.333 & 2.75 \\ 7 & 5.333 & 4.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 3.333 \\ 4.5 \\ 7.833 \\ 12.333 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 4.333 \\ 5.5 \\ 8.833 \\ 13.333 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 2.5 & 1.667 & 1.25 \\ 3 & 2.333 & 2 \\ 5.5 & 4 & 3.25 \\ 8.5 & 6.333 & 5.25 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 4.167 \\ 5.333 \\ 9.5 \\ 14.833 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 5.167 \\ 6.333 \\ 10.5 \\ 15.833 \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1.5 \\ 3.5 & 2.667 & 2.25 \\ 6.5 & 4.667 & 3.75 \\ 10 & 7.333 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6.167 \\ 11.167 \\ 17.333 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7.167 \\ 12.167 \\ 18.333 \end{pmatrix}.$

7. $A = \begin{pmatrix} 3.5 & 2.333 & 1.75 \\ 4 & 3 & 2.5 \\ 7.5 & 5.333 & 4.25 \\ 11.5 & 8.333 & 6.75 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 5.833 \\ 7 \\ 12.833 \\ 19.833 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 6.833 \\ 8 \\ 13.833 \\ 20.833 \end{pmatrix}.$

8. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2.667 & 2 \\ 4.5 & 3.333 & 2.75 \\ 8.5 & 6 & 4.75 \\ 13 & 9.333 & 7.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 6.667 \\ 7.833 \\ 14.5 \\ 22.333 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 7.667 \\ 8.833 \\ 15.5 \\ 23.333 \end{pmatrix}.$

9. $A = \begin{pmatrix} 4.5 & 3 & 2.25 \\ 5 & 3.667 & 3 \\ 9.5 & 6.667 & 5.25 \\ 14.5 & 10.333 & 8.25 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 8.667 \\ 16.167 \\ 24.833 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 9.667 \\ 17.167 \\ 25.833 \end{pmatrix}.$

10. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3.333 & 2.5 \\ 5.5 & 4 & 3.25 \\ 10.5 & 7.333 & 5.75 \\ 16 & 11.333 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 8.333 \\ 9.5 \\ 17.833 \\ 27.333 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 9.333 \\ 10.5 \\ 18.333 \\ 28.333 \end{pmatrix}.$

11. $A = \begin{pmatrix} 5.5 & 3.667 & 2.75 \\ 6 & 4.333 & 3.5 \\ 11.5 & 8 & 6.25 \\ 17.5 & 12.333 & 9.75 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 9.167 \\ 10.333 \\ 19.5 \\ 29.833 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 10.167 \\ 11.333 \\ 20.5 \\ 30.833 \end{pmatrix}.$

12. $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 6.5 & 4.667 & 3.75 \\ 12.5 & 8.667 & 6.75 \\ 19 & 13.333 & 10.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 11.167 \\ 21.167 \\ 32.333 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 12.167 \\ 22.167 \\ 33.333 \end{pmatrix}.$

13. $A = \begin{pmatrix} 6.5 & 4.333 & 3.25 \\ 7 & 5 & 4 \\ 13.5 & 9.333 & 7.25 \\ 20.5 & 14.333 & 11.25 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 10.833 \\ 12 \\ 22.833 \\ 34.833 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 11.833 \\ 13 \\ 23.833 \\ 35.833 \end{pmatrix}.$

14. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4.667 & 3.5 \\ 7.5 & 5.333 & 4.25 \\ 14.5 & 10 & 7.75 \\ 22 & 15.333 & 12 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 11.667 \\ 12.833 \\ 24.5 \\ 37.333 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 12.667 \\ 13.833 \\ 25.5 \\ 38.333 \end{pmatrix}.$

15. $A = \begin{pmatrix} 7.5 & 5 & 3.75 \\ 8 & 5.667 & 4.5 \\ 15.5 & 10.667 & 8.25 \\ 23.5 & 16.333 & 12.75 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 12.5 \\ 13.667 \\ 26.167 \\ 39.833 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 13.5 \\ 14.667 \\ 27.167 \\ 40.833 \end{pmatrix}.$

16. $A = \begin{pmatrix} 8 & 5.333 & 4 \\ 8.5 & 6 & 4.75 \\ 16.5 & 11.333 & 8.75 \\ 25 & 17.333 & 13.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 13.333 \\ 14.5 \\ 27.833 \\ 42.333 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 14.333 \\ 15.5 \\ 28.833 \\ 43.333 \end{pmatrix}.$

17. $A = \begin{pmatrix} 8.5 & 5.667 & 4.25 \\ 9 & 6.333 & 5 \\ 17.5 & 12 & 9.25 \\ 26.5 & 18.333 & 14.25 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 14.167 \\ 15.333 \\ 29.5 \\ 44.833 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 15.167 \\ 16.333 \\ 30.5 \\ 45.833 \end{pmatrix}.$

18. $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 4.5 \\ 9.5 & 6.667 & 5.25 \\ 18.5 & 12.667 & 9.75 \\ 28 & 19.333 & 15 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 16.167 \\ 31.167 \\ 47.333 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 17.167 \\ 32.167 \\ 48.333 \end{pmatrix}.$

19. $A = \begin{pmatrix} 9.5 & 6.333 & 4.75 \\ 10 & 7 & 5.5 \\ 19.5 & 13.333 & 10.25 \\ 29.5 & 20.333 & 15.75 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 15.833 \\ 17 \\ 32.833 \\ 42.833 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 16.833 \\ 18 \\ 33.833 \\ 50.833 \end{pmatrix}.$

20. $A = \begin{pmatrix} 10 & 6.667 & 5 \\ 10.5 & 7.333 & 5.75 \\ 20.5 & 14 & 10.75 \\ 31 & 21.333 & 16.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 16.667 \\ 17.833 \\ 34.5 \\ 52.333 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 17.667 \\ 18.833 \\ 35.5 \\ 53.333 \end{pmatrix}.$

Задание 2.17. Найдите методом наименьших квадратов значения коэффициентов линейной зависимости $y = ax + b$ по заданным эмпирическим данным. Используя найденную линейную зависимость, найдите значение y в точке $x = N + 0.55$, где N — номер варианта.

1.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
y	0.686	0.742	0.767	0.646	0.807	0.774	0.97	0.932	0.936	0.978	1.048

2.

x	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
y	2.312	2.251	2.418	2.752	2.459	2.7	3.022	3.079	2.42	2.669	3.241

3.

x	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
y	4.615	4.591	5.13	5.481	5.492	5.553	5.471	5.727	5.798	6.11	6.605

4.

x	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5
y	8.472	8.805	9.096	8.993	9.312	9.465	9.771	9.61	9.722	11.419	10.285

5.

x	5	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6
y	12.36	13.63	13.304	13.148	13.482	14.24	14.516	14.882	15.246	15.369	15.158

6.

x	6	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7
y	17.631	19.747	19.783	18.806	19.886	21.118	20.208	19.481	20.153	20.505	21.29

7.

x	7	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8
y	25.243	25.133	25.669	26.627	26.753	27.234	26.491	26.876	27.228	28.065	27.781

8.

x	8	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9
y	30.528	34.221	34.233	34.114	33.595	34.058	34.498	35.822	35.678	37.442	35.698

9.

x	9	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
y	41.742	42.244	43.884	42.167	43.696	45.042	42.461	45.727	44.056	45.863	44.953

10.

x	10	10.1	10.2	10.3	10.4	10.5	10.6	10.7	10.8	10.9	11
y	49.758	51.924	50.083	52.376	53.413	54.966	52.771	54.115	55.476	55.686	56.196

11.

x	11	11.1	11.2	11.3	11.4	11.5	11.6	11.7	11.8	11.9	12
y	62.173	63.055	63.725	64.237	64.086	63.587	65.412	65.284	65.05	68.876	65.74

12.

x	12	12.1	12.2	12.3	12.4	12.5	12.6	12.7	12.8	12.9	13
y	71.167	74.264	72.658	74.507	76.649	75.517	75.708	76.359	79.316	77.373	77.698

13.

x	13	13.1	13.2	13.3	13.4	13.5	13.6	13.7	13.8	13.9	14
y	86.612	85.491	87.803	88.613	89.075	89.24	89.633	90.761	91.323	91.428	91.712

14.

x	14	14.1	14.2	14.3	14.4	14.5	14.6	14.7	14.8	14.9
y	99.811	100.31	99.492	102.61	103.20	104.36	104.73	105.16	104.65	105.58

15.

x	15	15.1	15.2	15.3	15.4	15.5	15.6	15.7	15.8	15.9	16
y	115.18	115.28	115.18	116.01	117.20	119.04	121.43	119.35	120.84	121.58	124.33

16.

x	16	16.1	16.2	16.3	16.4	16.5	16.6	16.7	16.8	16.9	17
y	131.96	126.72	132.26	131.29	132.04	133.74	133.28	135.75	134.6	139.84	133.23

17.

x	17	17.1	17.2	17.3	17.4	17.5	17.6	17.7	17.8	17.9
y	147.67	150.75	149.74	150.74	147.94	147.77	152.08	154.65	154.98	152.55

18.

x	18	18.1	18.2	18.3	18.4	18.5	18.6	18.7	18.8	18.9	19
y	164.69	163.25	164.47	165.50	166.77	167.46	169.65	169.42	170.50	174.22	173.14

19.

x	19	19.1	19.2	19.3	19.4	19.5	19.6	19.7	19.8	19.9	20
y	186.36	180.38	184.45	186.04	189.29	188.32	184.83	186.44	194.55	192.34	191.89

20.

x	20	20.1	20.2	20.3	20.4	20.5	20.6	20.7	20.8	20.9
y	200.30	200.96	200.73	202.89	208.23	208.89	209.51	206.87	209.17	214.21

ГЛАВА 3

Задание 3.1. Найдите пределы последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$. Для указанных значений $\varepsilon = 10^{-k}$ найдите такие $N(\varepsilon)$, чтобы все элементы последовательности с номерами $n > N$ совпадали с предельным значением до k-го знака после запятой. Для заданных значений M укажите такие значения $N(M)$, чтобы для всех членов бесконечно большой последовательности $\{c_n\}$ с номерами $n > N$ выполнялось неравенство $|c_n| > M$. Изобразите графически сходящиеся последовательности и их пределы. Изобразите графически бесконечно большую последовательность.

N	a_n	b_n	c_n	k	M
1	$\sqrt[n]{3}$	$(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$	$2\ln(12n-2)$	2	10
2	$\operatorname{arctg}(n^2)$	$(-1)^n\frac{n}{n^2+1}$	$\sqrt{n+2}$	2	10
3	$\sqrt[n]{3.5}$	$(-1)^n\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$	$\ln(2n+2)$	2	20
4	$\frac{6n^2+5}{n^2+1}$	$(-1)^n\left(1-2^{\frac{1}{n}}\right)$	$\sqrt[3]{n+2}$	2	12
5	$\sqrt[n]{4.3}$	$\frac{1}{n}\sin n$	$5\ln(2n+5)$	2	12
6	$\operatorname{arctg}(n^2+1)$	$(-1)^n\frac{6n^2+5}{n^3+1}$	$\ln(2n^2-2n)$	2	14
7	$\sqrt[n]{3.7}$	$\sin\left((-1)^n\frac{1}{n}\right)$	$\sqrt[4]{n^4+1}$	2	14

N	a_n	b_n	c_n	k	M
8	$\frac{1-6n}{n+1}$	$\ln\left(1+(-1)^n\frac{1}{n}\right)$	$\ln(n^4-2n)$	2	10
9	$\sqrt[n]{4.8}$	$(-1)^n\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$	$\sqrt{n^{2.01}}\operatorname{arctg}n$	2	10
10	$\ln\left(\frac{6n^2+5}{n^2+1}\right)$	$(-1)^n\frac{1-6n}{n^2+1}$	$2\ln(n+10)$	2	15
11	$\sqrt[n]{5.5}$	$(-1)^n n\operatorname{tg}\frac{1}{n^2}$	$\sqrt[3]{n^{3.02}+5}$	2	25
12	$\frac{4n-3}{2n+1}$	$(-1)^n n^2\sin\frac{1}{n^3}$	$12\ln(n+1)$	2	12
13	$1+\sin\frac{1}{n^2}$	$(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\sqrt{n^{2.01}}\operatorname{arcctg}n$	2	10
14	$\sqrt[n]{5}$	$(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}n\right)$	$\ln(n^3+2)$	2	10
15	$\ln\left(\frac{5+6n}{2n+1}\right)$	$(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}n^2\right)$	$\sqrt[4]{n^{5.02}+5}$	2	5
16	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$	$4\ln(n+5)$	2	10
17	$\sqrt[n]{10}$	$(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$	$\ln(n^5+1)$	2	10
18	$\sqrt[n]{3.5}$	$(-1)^n n\left(1-\cos\frac{3n+5}{n^2+1}\right)$	$\sqrt[3]{n^{3.02}}\ln(n+1)$	2	20
19	$\frac{6n^2+5}{n^2+1}$	$\frac{1}{n}\cos n$	$3\ln(2n+1)$	2	12
20	$\sqrt[n]{4.3}$	$(-1)^n\left(\frac{4n-3}{2n+1}-2\right)$	$\sqrt[3]{n^{3.01}+5}$	2	12

Задание 3.2. Найдите предел функции $f(x)$ в точке $x=a$. Для значения $\varepsilon=10^{-2}$ найдите $\delta(\varepsilon)$ такое, чтобы значения функции в точках $0<|x-a|<\delta$ совпадали с предельным значением до второго знака после запятой. Изобразите графически поведение функции в окрестности точки $x=a$.

N	$f(x)$	a	N	$f(x)$	a
1	$\frac{(x^2-1)(x+3)}{x-1}$	1	**3**	$\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	4
2	$\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$	$\frac{\pi}{4}$	**4**	$\frac{(x^3-1)(x+3)}{x-1}$	1

N	$f(x)$	a	N	$f(x)$	a
5	$\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$	-2	**13**	$\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$	2
6	$\dfrac{2^x-2}{\ln x}$	1	**14**	$\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$	1
7	$\dfrac{(x^4-1)(x+5)}{x-1}$	1	**15**	$\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$	4
8	$\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{x^2}-e^{4\pi^2}}$	2π	**16**	$\dfrac{5^x-5}{\ln x}$	1
9	$\dfrac{(x^3+1)(x^2+3)}{x+1}$	-1	**17**	$\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$	0
10	$\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$	π	**18**	$\dfrac{\ln\sin 3x}{(6x-\pi)^2}$	$\dfrac{\pi}{6}$
11	$\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2}{\sin\ln(x-1)}$	2	**19**	$\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x}-1}$	3
12	$\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$	b	**20**	$\dfrac{(x^2-4)(x+2)}{x-2}$	2

Задание 3.3. Сравните бесконечно малые в нуле функции. Постройте графики функций в окрестности предельной точки.

N	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	$\gamma(x)$	$\mu(x)$
1	$\sqrt{x}\sin x$	$\ln\left(1+\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\right)$	$\sqrt{x^3}$	$\sqrt{x^3}\sin\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
2	$1-\cos\sqrt[3]{x^2}$	$\sin\sqrt[3]{x^2}$	$\sqrt[3]{x^4}$	$\sqrt[3]{x^4}\cos\dfrac{1}{x}$
3	$x\operatorname{tg}\sqrt{x}$	$\sqrt{1+x}-1$	$\sqrt{x^3}$	$\sqrt{x^3}\sin\dfrac{1}{x}$
4	$\arcsin\sqrt[4]{x^5}$	2^x-1	$\sqrt[4]{x^5}$	$\sqrt[4]{x^5}\sin\dfrac{x+3}{x^2}$
5	$\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^5}$	$\exp\sqrt[4]{x^{4.5}}-1$	$5\sqrt[4]{x^5}$	$\sqrt[4]{x^5}\sin\dfrac{x+1}{x}$
6	$\exp(-\sqrt{x})-1$	$\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^{1.5}}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x}\cos\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
7	$2^{2x}-1$	$\arcsin\sqrt[4]{x^3}$	x	$x\sin\dfrac{x^2+1}{x}$
8	$\sqrt[3]{1+x^3}-1$	$\sqrt{x}\operatorname{tg} x^3$	$\dfrac{2}{3}x^3$	$\sin(x^3)\sin\dfrac{x+1}{x}$

N	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	$\gamma(x)$	$\mu(x)$
9	$\ln(1+\sqrt{x})$	$1-\cos\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$	$(1-\cos\sqrt[4]{x})\sin\frac{x+1}{3x}$
10	$\ln(1+\sqrt{x^{2.1}})$	$\sin\sqrt{x^{2.1}}$	$\sqrt{x^{2.1}}$	$\sqrt{x^{2.1}}\sin\frac{1}{x}$
11	$\sqrt{x}\arcsin x$	$\ln(1+\sqrt{x}\sin\sqrt{x})$	$\sqrt{x^3}$	$\sqrt{x^3}\sin\frac{x+1}{\sqrt{x}}$
12	$1-\cos\sqrt[3]{x^2}$	$\arcsin\sqrt[3]{x^2}$	$\sqrt[3]{x^4}$	$\sqrt[3]{x^4}\sin\frac{1}{x}$
13	$x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	$\sqrt{x+1}-1$	$\sqrt{x^3}$	$\sqrt{x^3}\sin\frac{1}{x}$
14	$\sin\sqrt[4]{x^5}$	3^x-1	$\sqrt[4]{x^5}$	$\sqrt[4]{x^5}\sin\frac{x+3}{x^2}$
15	$\operatorname{tg}\sqrt[4]{x^5}$	$\exp\sqrt[4]{x^5}-1$	$5\sqrt[4]{x^5}$	$\sqrt[4]{x^5}\sin\frac{x+1}{x}$
16	$\exp(-\sqrt{x})-1$	$\operatorname{tg}\sqrt[4]{x^{1.5}}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x}\cos\frac{x+1}{\sqrt{x}}$
17	$2^{10x}-1$	$\sin\sqrt[4]{x^3}$	x	$x\sin\frac{x^2+1}{x}$
18	$\sqrt[3]{1+x^3}-1$	$\operatorname{arctg}(x^3\sqrt{x})$	$\frac{2}{3}x^3$	$\sin(x^3)\cdot\sin\frac{x+1}{x}$
19	$\ln(1+\sqrt{x})$	$1-\cos\sqrt{x}$	$\sqrt{x}$	$(1-\cos\sqrt[4]{x})\sin\frac{x+1}{3x}$
20	$\ln(1+2.1\sqrt{x^{2.1}})$	$\arcsin\sqrt{x^{2.1}}$	$\sqrt{x^{2.1}}$	$\sqrt{x^{2.1}}\sin\frac{1}{x}$

Задание 3.4. Найдите точки разрыва заданных функций и определите их тип.

N	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
1	$\sqrt{\lvert x\rvert}\sin\frac{1}{x}$	$\operatorname{arctg}\frac{1}{x-\pi}$	$3^{1/x}$
2	$\sqrt[3]{x-1}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$	$\operatorname{arcctg}\frac{1}{x-1}$	$\frac{x-1}{x^2-2x+1}$
3	$\sqrt[3]{x+1}\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}$	$\frac{1}{1+\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}$	$\frac{1}{x^2-1}$
4	$\sin x\sin\frac{1}{x}$	$\frac{2}{1+\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}$	$3^{-1/x}$

N	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
5	$(e^x-1)\sin\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1+\exp\frac{1}{x}}$	$\frac{x+1}{x^2+2x+1}$
6	$\operatorname{arctg} x\sin\frac{1}{x}$	$\operatorname{th}\frac{1}{x}$	$x2^{-1/x}$
7	$\ln\left(1+(x-1)^2\sin^2\frac{1}{x-1}\right)$	$2\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$	$3^{1/x^2}$
8	$\ln\left(2+x\cos\frac{1}{x}\right)$	$\operatorname{th}\frac{1}{x+3}$	$\frac{x}{1-e^{x^2}}$
9	$\arcsin x\cos\frac{1}{x}$	$2\operatorname{arctg}\frac{x}{x-\pi}$	$\exp\left(x+\frac{1}{x}\right)$
10	$\left(e^{x-1}-1\right)\sin\frac{1}{x-1}$	$\operatorname{th}\frac{1}{x^3-1}$	$\frac{1}{x^4-1}$
11	$\sin(x-1)\sin\frac{1}{x-1}$	$2\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-\pi^2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1/x}$
12	$\sqrt{\lvert x-1\rvert}\sin\frac{1}{x-1}$	$\operatorname{arcctg}\frac{1}{x+1}$	$3^{-1/x^3}$
13	$\sin\sqrt[3]{x-1}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$	$\operatorname{th}^{-1}\frac{1}{x+1}$	$\operatorname{cth}(x-1)^2$
14	$\sqrt[3]{x+1}\sin\frac{1}{x+1}$	$\frac{3}{1+\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}$	$(x-1)3^{-1/(x-1)}$
15	$\sin(x+2)\sin\frac{1}{x+2}$	$\operatorname{arctg}^2\frac{1}{x-\pi}$	$\sin\left(x3^{1/x}\right)$
16	$\left(e^{\sqrt{\lvert x\rvert}}-1\right)\sin\frac{1}{x}$	$\operatorname{cth}\frac{x}{x+1}$	$x3^{1/x}$
17	$\operatorname{tg}\sqrt[3]{x-1}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$	$\operatorname{arctg}\frac{1}{x+\pi}$	$\arcsin\left(xe^{1/x}\right)$
18	$\operatorname{tg}\sqrt[3]{x-1}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x-1}$	$\frac{3}{1+\exp\left(\frac{1}{x}\right)}$	$(x+1)2^{1/(x+1)}$
19	$\sin x\cos\frac{1}{x}$	$\operatorname{arctg}^3\frac{1}{x+3}$	$\exp\left(x-\frac{1}{x}\right)$
20	$\ln\left(1+(x+1)^2\sin^2\frac{1}{x+1}\right)$	$\operatorname{th}^2\frac{1}{x}$	$\arcsin\frac{1}{x}$

Замечание. Для вычисления $\operatorname{arcctg} x$ и $\arccos x$ используйте тождества $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$ и $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

Задание 3.5. Найдите (аналитически и графически) точки, в которых достигаются наибольшее и наименьшее значения заданной на отрезке непрерывной функции. Найдите нуль функции на заданном отрезке. Решите уравнение $f(x) = 0$.

N	$f(x)$	Отрезок
1	$\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)-1}$	$[0, 6]$
2	$4 - x - \dfrac{4}{x^2}$	$[1, 4]$
3	$x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$	$[1, 4]$
4	$\dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5} - 1$	$[-3, 3]$
5	$2\sqrt{x} - x - 0.5$	$[0, 4]$
6	$1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$	$[-1, 5]$
7	$x - 4\sqrt{x} + 3$	$[1, 9]$
8	$\dfrac{10x}{x^2+1} - 3$	$[0, 3]$
9	$-2 + \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}$	$[-3, 3]$
10	$2x^2 + \dfrac{108}{x^2} - 59$	$[2, 4]$
11	$2 - x - \dfrac{4}{(x+2)^2}$	$[-1, 2]$
12	$\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$	$[-1, 6]$
13	$\dfrac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2} - 1$	$[1, 4]$
14	$x - 4\sqrt{x+2} + 5.5$	$[-1, 7]$
15	$1 - \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$	$[1, 5]$
16	$\dfrac{4x}{x^2+4}$	$[-4, 2]$
17	$8 + \dfrac{8}{x} - \dfrac{x^2}{2}$	$[-4, -1]$
18	$1 + \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$	$[-2, 4]$

N	$f(x)$	Отрезок
19	$\dfrac{2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$	$[-2, 1]$
20	$-\dfrac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}+2$	$[-5, -2.8]$

Задание 3.6. Найдите по определению производную функции $f(x)$. Вычислите значение производной в точке $x=0$, имея в виду, что $f(0)=0$.

N	$f(x)$	N	$f(x)$
1	$\operatorname{tg}\left(x^3+x^2\sin\frac{2}{x}\right)$	11	$x+\arcsin\left(x^2\sin\frac{6}{x}\right)$
2	$\operatorname{arctg}\left(x\cos\frac{1}{5x}\right)$	12	$\operatorname{tg}\left(2^{x^2\cos\frac{1}{8x}}-1+x\right)$
3	$\sin\left(x\sin\frac{3}{x}\right)$	13	$\operatorname{arctg} x\sin\frac{7}{x}$
4	$\arcsin\left(x^2\cos\frac{1}{9x}\right)$	14	$2x^2+x^2\cos\frac{1}{9x}$
5	$\ln\left(1-\sin\left(x^3\sin\frac{1}{x}\right)\right)$	15	$x^2\cos\frac{11}{9x}$
6	$\sin\left(\exp\left(x^2\sin\frac{5}{x}\right)-1\right)+x$	16	$2x^2+x^2\cos\frac{1}{x}$
7	$x^2\cos\frac{4}{3x}+\frac{x^2}{2}$	17	$\frac{\ln\cos x}{x}$
8	$\sqrt{1+\ln\left(1+x^2\sin\frac{1}{x}\right)}-1$	18	$6x+x\sin\frac{1}{x}$
9	$\sin\left(\exp\left(x^2\sin\frac{5}{x}\right)-1\right)+x$	19	$\frac{e^{x^2}-\cos x}{x}$
10	$\sin x\cos\frac{5}{x}$	20	$\exp(x\sin 5x)-1$

Задание 3.7. Вычислите производную функции $f(x)$ по определению. Найдите значение производной функции в указанной точке. Вычислите по определению односторонние производные функции $g(x)=|f(x)|$ в этой точке. Постройте графики обеих функций и объясните различие поведения функций в окрестности указанной точки.

N	$f(x)$	x_0	N	$f(x)$	x_0
1	x^2-9	3	3	$x^2-0.16$	0.4
2	x^2-1	1	4	x^2-x-2	-1

N	$f(x)$	x_0	N	$f(x)$	x_0
5	$(x-1)(x+3)$	-3	**13**	$(x-7)(x-1)$	7
6	$(x+1)(x+3)$	-1	**14**	$(x+7)(x-1)$	-7
7	x^2-3x+2	2	**15**	x^2-8x+7	1
8	x^2+3x+2	-1	**16**	$x^2-9/4$	$3/2$
9	x^2+4x+4	-2	**17**	x^2-100	10
10	x^2-4x+4	2	**18**	$(x+1)(x-3)$	3
11	x^2-16	4	**19**	$(x-1)(x-3)$	1
12	$x^2-0.25$	0.5	**20**	x^2+5x-4	1

Задание 3.8. Изобразите график заданной функции и подтвердите построение аналитическим исследованием: найдите координаты точек пересечения с координатными осями, найдите и постройте наклонные асимптоты. Запишите уравнения вертикальных асимптот.

N	$f(x)$	N	$f(x)$
1	$\dfrac{4x^2+5}{4x+8}$	**11**	$\dfrac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$
2	$\dfrac{17-x^2}{4x-5}$	**12**	$\dfrac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}$
3	$\dfrac{x^2-3}{\sqrt{4x^2-3}}$	**13**	$\dfrac{3x^2-7}{2x+1}$
4	$\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}$	**14**	$\dfrac{x^2-5}{\sqrt{9x^2-8}}$
5	$\dfrac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}$	**15**	$\dfrac{x^2-6x+4}{2-2x}$
6	$\dfrac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}$	**16**	$\dfrac{21-x^2}{7x+9}$
7	$\dfrac{2x^2-6}{x-2}$	**17**	$\dfrac{2x^2-7}{\sqrt{3x^2-2}}$
8	$\dfrac{x^3+x^2-3x-1}{x^2-1}$	**18**	$\dfrac{2x^3-3x^2-2x+1}{3x^2-1}$
9	$\dfrac{4x^3-3x}{4x^2-1}$	**19**	$\dfrac{x^2-11}{4x-3}$
10	$\dfrac{x^2-6x+4}{3x-2}$	**20**	$\dfrac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}$

Задание 3.9. Изобразите график заданной функции и подтвердите построение аналитическим исследованием: постройте график производной, найдите нули производной. Найдите координаты точек экстремума.

N	$f(x)$	N	$f(x)$
1	$3\sqrt[3]{(x+4)^2}-2x-8$	**11**	$3\sqrt[3]{(x-1)x}$
2	$1-\sqrt[3]{x^2-2x}$	**12**	$\dfrac{6\sqrt[3]{6x^2}}{(x+2)^2+8}$
3	$12\sqrt[3]{(x+2)^2}-8x-16$	**13**	$2x-2-3\sqrt[3]{(x-1)^2}$
4	$\dfrac{12\sqrt[3]{6(x-2)^2}}{x^2+8}$	**14**	$2+\sqrt[3]{8x(x+2)}$
5	$8x-16-12\sqrt[3]{(x+4)^2}$	**15**	$\dfrac{3\sqrt[3]{6(x-4)^2}}{x^2-4x+12}$
6	$\dfrac{12\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{(x+1)^2+8}$	**16**	$3\sqrt[3]{(x-2)^2}-2x+4$
7	$9\sqrt[3]{(x+1)^2}-6x-6$	**17**	$-\dfrac{3\sqrt[3]{6(x+1)^2}}{(x+3)^2+8}$
8	$1-\sqrt[3]{(x-2)^2-1}$	**18**	$\sqrt[3]{(x+2)^2}-1$
9	$\sqrt[3]{(x+4)x}$	**19**	$\sqrt[3]{(x+4)(x-4)}$
10	$\dfrac{6\sqrt[3]{6(x-3)^2}}{(x-1)^2+8}$	**20**	$\dfrac{3\sqrt[3]{6(x-5)^2}}{(x-3)^2+8}$

Задание 3.10. Изобразите график заданной функции и подтвердите построение аналитическим исследованием: постройте график второй производной, найдите нули второй производной. Найдите координаты точек перегиба, если они есть.

N	$f(x)$	N	$f(x)$
1	$\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$	**4**	$-\dfrac{5x}{x^2+2}$
2	$\dfrac{5x}{x^2+3}$	**5**	$\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$
3	$\dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$	**6**	$(x+1)e^{x+2}$

N	$f(x)$	N	$f(x)$
7	$\dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$	**14**	$\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2$
8	$(x+4)e^{-x-3}$	**15**	$\dfrac{2x^2+1}{x^2+3}$
9	$\dfrac{3x-2}{x^3}$	**16**	$(2x-1)e^{2(1-x)}$
10	$-\dfrac{5x^2}{x^2+2}$	**17**	$\dfrac{5x^2}{x^2+3}$
11	$(2x+4)e^{2(x+2)}$	**18**	$\dfrac{3x-2}{(x+1)^3}$
12	$2-\dfrac{3x}{x^2+3}$	**19**	$(2x+3)e^{2(1+x)}$
13	$-(x+4)e^{-x-3}$	**20**	$\dfrac{8x^2}{x^2+8}$

Задание 3.11. Постройте график функции и подтвердите изображение аналитическим исследованием.

N	$f(x)$	N	$f(x)$
1	$\sqrt[3]{(1+x)(x^2+2x-2)}$	**11**	$\sqrt[3]{(1-x)(x^2-2x-2)}$
2	$\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$	**12**	$\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$
3	$\sqrt[3]{x^2(x+3)}$	**13**	$\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)}$
4	$\sqrt[3]{(x+2)^2(x-4)}$	**14**	$\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}$
5	$\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}$	**15**	$\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x+3)^2}$
6	$\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}$	**16**	$\sqrt[3]{(x+3)^2x}$
7	$\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$	**17**	$\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x^2}$
8	$\sqrt[3]{(x-4)^2(x+2)}$	**18**	$\sqrt[3]{x^2(x-6)}$
9	$\sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}$	**19**	$\sqrt[3]{x^2(x+4)^2}$
10	$\sqrt[3]{(3+x)(x^2+6x+6)}$	**20**	$\sqrt[3]{(2+x)(x^2+4x+1)}$

Задание 3.12. Изобразите линии, заданные в декартовых координатах явно уравнением $y=f(x)$ и неявно уравнением $F(x,y)=0$. Запишите уравнения касательной и нормали к каждой кривой в указанных точках и изобразите их на графике.

N	$f(x)$	x_0	$F(x,y)$	$(x_0,\ y_0)$
1	$\operatorname{sh} x$	1	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-1$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{2}\right)$
2	$\ln x$	2	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-1$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{2}\right)$
3	$1+\frac{1}{x}$	1	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-1$	$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\ -\sqrt{2}\right)$
4	$1+\frac{1}{x}$	-1	$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-1$	$\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ -\sqrt{2}\right)$
5	$\frac{\lvert x\rvert(x-1)}{x+1}$	2	$3y^2-4x^2-12$	$\left(3,\ \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
6	$\frac{\lvert x\rvert(x-1)}{x+1}$	-2	$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}-1$	$\left(\sqrt{9},\ \sqrt{8}\right)$
7	$\frac{x^3-32}{x^2}$	1	$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}-1$	$\left(\sqrt{9},\ -\sqrt{8}\right)$
8	$\frac{x^3-32}{x^2}$	-5	$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}-1$	$\left(-\sqrt{9},\ -\sqrt{8}\right)$
9	$\sqrt[3]{x(x+6)^2}$	5	$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}-1$	$\left(-\sqrt{9},\ \sqrt{8}\right)$
10	$\operatorname{sh} 3x$	0.5	$\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{4}-1$	$\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$
11	$\ln(-3x)$	-1	$\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{4}-1$	$\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$
12	$2+\frac{1}{x}$	-1	$\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{4}-1$	$\left(-1,\ -\frac{3}{2}\right)$
13	$2+\frac{1}{x}$	1	$\frac{y^2}{3}+\frac{x^2}{4}-1$	$\left(1,\ -\frac{3}{2}\right)$
14	$\frac{\lvert x\rvert(x-2)}{x+2}$	3	$4x^2+3y^2-12$	$\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$
15	$\frac{\lvert x\rvert(x-2)}{x+2}$	-3	$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{4}-1$	$\left(1,\ \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$

N	$f(x)$	x_0	$F(x,y)$	$(x_0,\ y_0)$
16	$\sqrt[3]{x(x+6)^2}$	-8	$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{4}-1$	$\left(1,\ -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
17	$\frac{x^2+8}{\sqrt{x^2-4}}$	3	$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{4}-1$	$\left(-1,\ -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
18	$\frac{x^2+8}{\sqrt{x^2-4}}$	-3	$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{4}-1$	$\left(-1,\ \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
19	$\frac{10x^2-9}{\sqrt{4x^2-1}}$	10	$4x^2+3y^2-12$	$\left(\frac{3}{2},\ -1\right)$
20	$\frac{10x^2-9}{\sqrt{4x^2-1}}$	-10	$4x^2+3y^2-12$	$\left(-\frac{3}{2},\ -1\right)$

Задание 3.13. Изобразите на плоскости кривую, заданную параметрически, касательную и нормаль к ней в указанной точке.

N	$x(t)$	$y(t)$	$(x_0,\ y_0)$
1	t^2	t^3	$(1,\ 1)$
2	t^2	t^3	$(1,\ -1)$
3	$\frac{t^2}{1+t^3}$	$\frac{t}{1+t^3}$	$\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9}\right)$
4	$\frac{t^2}{1+t^3}$	$\frac{t}{1+t^3}$	$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$
5	$\frac{t^2}{1+t^3}$	$\frac{t}{1+t^3}$	$\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9}\right)$
6	$\frac{t^2}{1+t^3}$	$-\frac{t}{1+t^3}$	$\left(\frac{4}{9},\ -\frac{2}{9}\right)$
7	$\cos^2 t+\cos t$	$\cos t\sin t+\sin t$	$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2},\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$
8	$4\cos^3\frac{t}{4}$	$4\sin^3\frac{t}{4}$	$\left(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$
9	$\frac{t^2}{1+t^2}$	$\frac{t^3}{1+t^2}$	$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

N	$x(t)$	$y(t)$	$(x_0,\ y_0)$
10	t^2	$2t^3$	$(1,\ 2)$
11	t^2	$2t^3$	$(1,\ -2)$
12	$\dfrac{3t^2}{1+t^3}$	$\dfrac{3t}{1+t^3}$	$\left(\dfrac{4}{3};\ \dfrac{2}{3}\right)$
13	$\dfrac{3t^2}{1+t^3}$	$\dfrac{3t}{1+t^3}$	$\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$
14	$\dfrac{3t^2}{1+t^3}$	$\dfrac{3t}{1+t^3}$	$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)$
15	$-\dfrac{3t^2}{1+t^3}$	$\dfrac{3t}{1+t^3}$	$\left(-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)$
16	$2\cos^2 t+\cos t$	$2\cos t\sin t+\sin t$	$\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$
17	$4\cos^3\dfrac{t}{4}$	$4\sin^3\dfrac{t}{4}$	$\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$
18	$t-\sin t$	$1-\cos t$	$\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
19	$t-2\sin t$	$1-2\cos t$	$\left(\dfrac{\pi}{4}-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}\right)$
20	$-t^2$	$2t^3$	$(-1,\ 2)$

Задание 3.14. Изобразите кривую, заданную в полярных координатах.

N	$\rho(\varphi)$	N	$\rho(\varphi)$
1	φ	**6**	$-2\operatorname{ctg}\varphi$
2	$2\varphi+1$	**7**	$2\sqrt{\cos 2\varphi}$
3	$\dfrac{2}{\sin\varphi}+2$	**8**	$2\sin 6\varphi$
4	$2\sin 3\varphi$	**9**	$\dfrac{2}{\cos(\varphi/3)}$
5	$2\cos\varphi+3$	**10**	$\dfrac{2}{\sin\varphi}+1$

N	$\rho(\varphi)$	N	$\rho(\varphi)$
11	$\dfrac{3}{\varphi^2}$	**16**	$5\sin\dfrac{\varphi}{3}$
12	$2(1-\cos\varphi)$	**17**	$2\cos\varphi+1$
13	$5\sin\dfrac{4\varphi}{3}$	**18**	$\dfrac{3}{\varphi}+3$
14	$\dfrac{2}{\sin\varphi}+3$	**19**	$2\cos\varphi+2$
15	2^{φ}	**20**	$2\operatorname{ctg}\varphi$

Задание 3.15. Запишите формулу Тейлора заданной функции. Исследуйте аналитически и графически зависимость погрешности приближенной формулы Тейлора от степени многочлена и от расстояния $|x-x_0|$. Исследуйте поведение остаточного члена формулы Тейлора. Выполните задание для функции $f(x)$ из задания 3.12.

Задание 3.16. Запишите для заданной функции формулу Тейлора указанного порядка в окрестности точки x_0. Изобразите график функции и ее многочлена Тейлора.

N	$f(x)$	x_0	n
1	$x^2-2\exp(x-1)$	1	5
2	$x^2-4x-(x-2)\ln(x-1)$	2	4
3	$\cos x+\operatorname{ch}x$	0	5
4	$x^2-2x-(x-1)\ln x$	1	6
5	$\sin^2(x-1)-x^2+2x$	1	5
6	$x^2-2x+1+2\ln(x+1)$	0	6
7	$\sin x+\operatorname{sh}x-2x$	0	6
8	$\sin^2(x-2)-x^2+4x-4$	2	5
9	$(x-2)\sin(x-2)+4x-x^2$	2	6
10	$x^2-2x-2\exp(x-2)$	-2	5
11	$(x-1)\sin(x-1)+2x-x^2$	1	4
12	$\sin(x-1)+2x-x^2$	1	5
13	$x^2-4x+3+2\ln x$	1	6
14	$-\cos x-\operatorname{ch}x$	0	6

N	$f(x)$	x_0	n
15	$-x^2-2e^{x-1}$	1	5
16	$x^3-3x^2-6x-5+6e^x$	0	5
17	$2x-\sin x-\operatorname{sh} x$	0	6
18	$1-2x-x^2-2\cos(x+1)$	-1	5
19	$\sin^2(x+2)-x^2-4x-4$	-2	5
20	$16+15x+6x^2+x^3-6e^{x+1}$	-1	5

Задание 3.17. Изобразите кривые спроса и предложения. Найдите равновесную цену. Выполните задание для функций $D(Q)=-AQ+B$ и $S(Q)=Q^2/C+Q/D+E$.

N	A	B	C	D	E	N	A	B	C	D	E
1	3	120	4	2	80	**11**	4	140	5	5	50
2	5	12	4	2	80	**12**	5	130	5	7	80
3	4	100	3	2	70	**13**	7	150	5	7	80
4	5	120	2	5	70	**14**	6	140	7	7	70
5	7	100	2	5	70	**15**	4	140	7	7	70
6	6	120	3	7	90	**16**	3	120	3	2	70
7	4	140	7	2	60	**17**	5	120	3	2	70
8	5	130	7	2	60	**18**	4	100	2	5	70
9	7	100	7	2	60	**19**	6	120	2	5	70
10	6	140	5	5	50	**20**	7	100	3	7	90

Задание 3.18. Изобразите график заданной функции спроса. Исследуйте вид кривой при разных значениях параметров.

Варианты 1–10: исследуйте функцию $D_0(x)=\dfrac{\alpha x(x+\beta)}{x^2+\gamma}$.

Варианты 11–20: исследуйте функцию $D_1(x)=\dfrac{\alpha x}{x^2+\beta}$.

N	α	β	γ	N	α	β	γ	N	α	β	γ	N	α	β	γ
1	11	3	2	**6**	13	4	2	**11**	11	3	2	**16**	13	4	2
2	12	3	2	**7**	12	4	2	**12**	12	3	2	**17**	12	4	2
3	13	3	2	**8**	12	5	3	**13**	13	3	2	**18**	12	5	3
4	14	3	2	**9**	12	5	4	**14**	14	3	2	**19**	12	5	4
5	14	4	2	**10**	10	5	5	**15**	14	4	2	**20**	10	5	5

Задание 3.19. Найдите графически и численно максимальную прибыль и границы прибыльного производства для заданной функции полного дохода и функции издержек. Выполните вычисления для функции дохода $P=AQ-Q^2$ и для функции издержек $C=C_f+C_vQ$.

N	A	C_f	C_v	N	A	C_f	C_v	N	A	C_f	C_v	N	A	C_f	C_v
1	10	60	0.6	**6**	10	80	0.2	**11**	11	80	0.6	**16**	12	100	0.6
2	10	60	0.9	**7**	10	100	0.6	**12**	11	80	0.9	**17**	12	100	0.9
3	10	60	0.2	**8**	10	100	0.9	**13**	11	80	0.2	**18**	9	80	0.2
4	10	80	0.6	**9**	10	100	0.2	**14**	12	100	0.2	**19**	9	80	0.6
5	10	80	0.9	**10**	10	100	0.5	**15**	12	100	0.5	**20**	9	80	0.9

Задание 3.20. Вычислите средние и предельные величины для заданной производственной функции $y = a(bx)^{m/n}$.

N	a	b	m	n	N	a	b	m	n
1	2	2.2	4	5	**11**	1.1	2	3	4
2	3	3.3	3	4	**12**	2.3	3	2	3
3	4	4.4	4	5	**13**	3.4	4	3	4
4	5	5.5	3	4	**14**	4.5	5	2	3
5	4	6.7	4	5	**15**	5.6	4	3	4
6	3	7.6	3	4	**16**	6.5	3	2	3
7	2	5.4	4	5	**17**	5.5	2	3	4
8	1	4.5	3	4	**18**	7.4	1	2	3
9	0.9	2.9	4	5	**19**	4.7	0.9	3	4
10	1.9	3.0	3	4	**20**	3.3	1.9	2	3

Задание 3.21. Найдите для заданной функции спроса $P(Q) = -aQ^2 + bQ + c$ эластичность E_D спроса по цене и соответствующий предельный доход. Постройте графики эластичности E_D и предельного дохода. Найдите значение Q и соответствующую цену, при которой $|E_D| = 1$. Сформулируйте выводы.

N	a	b	c	N	a	b	c
1	1/15	0.5	0.7	**11**	0.1	6/7	0.3
2	1/15	4/7	0.7	**12**	0.1	6/7	0.5
3	1/15	4/9	0.7	**13**	0.1	6/7	0.7
4	1/15	5/7	0.7	**14**	0.1	6/7	1
5	1/15	5/9	1	**15**	2/15	6/7	1
6	1/15	5/9	0.8	**16**	2/15	6/7	0.9
7	1/15	5/9	0.5	**17**	2/15	6/7	0.8
8	1/15	5/9	0.6	**18**	2/15	6/7	0.7
9	0.1	5/9	1	**19**	2/15	6/7	0.5
10	0.1	5/9	0.8	**20**	2/15	6/7	0.3

Задание 3.22. Вычислите неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$ и проверьте правильность вычислений, постройте графики семейства первообразных.

N	$f(x)$	N	$f(x)$
1	$\dfrac{1}{\sin^2 x(1-\cos x)}$	**11**	$\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x+\sin x}$
2	$\dfrac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}$	**12**	$\dfrac{\sin x}{1+\cos x+\sin x}$
3	$\dfrac{1}{\sin x(1-\sin x)}$	**13**	$\dfrac{\cos x}{1+\cos x+\sin x}$
4	$\dfrac{\cos x}{5+4\cos x}$	**14**	$\dfrac{\cos x}{1+\cos x-\sin x}$
5	$\dfrac{\cos x}{1+\sin x-\cos x}$	**15**	$\dfrac{\cos x}{(1+\cos x+\sin x)^2}$
6	$\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$	**16**	$\dfrac{\sin x}{(1+\sin x)^2}$
7	$\dfrac{\cos x}{(1-\cos x)^2}$	**17**	$\dfrac{\sin x}{(1+\cos x-\sin x)^2}$
8	$\dfrac{1}{\cos x(1-\cos x)}$	**18**	$\dfrac{\sin^2 x}{(1+\cos x+\sin x)^2}$
9	$\dfrac{1}{(1+\sin x-\cos x)^2}$	**19**	$\dfrac{1}{\sin x(1+\sin x)}$
10	$\dfrac{1+\sin x}{1+\sin x-\cos x}$	**20**	$\dfrac{\sin x}{2+\sin x}$

Задание 3.23. Для заданной функции $f(x)$ исследуйте поведение интегральных сумм на отрезке интегрирования $[a, b]$, разбивая его на равные части. Вычислите определенный интеграл и сравните его значение со значениями пределов интегральных сумм.

N	$f(x)$	$[a, b]$	N	$f(x)$	$[a, b]$
1	x^2-9	$[0, 3]$	**7**	$x^2-0.16$	$[-0.4, 0.6]$
2	x^2-1	$[-1, 1]$	**8**	x^2-x-2	$[-3, 1]$
3	$(x-1)(x+3)$	$[-3, 1]$	**9**	$(x-7)(x-1)$	$[1, 7]$
4	$(x+1)(x+3)$	$[-2, 0]$	**10**	$(x+7)(x-1)$	$[-7, 1]$
5	x^2-3x+2	$[2, 4]$	**11**	x^2-8x+7	$[1, 5]$
6	x^2+3x+2	$[-1, 3]$	**12**	$x^2-9/4$	$[2, 3]$

N	$f(x)$	$[a, b]$	N	$f(x)$	$[a, b]$
13	x^2+4x+4	$[-2, 2]$	**17**	x^2-100	$[5, 10]$
14	x^2-4x+4	$[2, 4]$	**18**	$(x+1)(x-3)$	$[-1, 3]$
15	x^2-16	$[0, 4]$	**19**	$(x-1)(x-3)$	$[1, 4]$
16	$x^2-0.25$	$[-0.5, 0.5]$	**20**	x^2+5x-4	$[1, 3]$

Задание 3.24. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ непосредственно и с помощью замены переменных.

N	$f(x)$	$[a, b]$	N	$f(x)$	$[a, b]$
1	$\sqrt{256-x^2}$	$[0, 16]$	**11**	$\dfrac{1}{(64-x^2)^{3/2}}$	$[0, 4\sqrt{3}]$
2	$x^2\sqrt{1-x^2}$	$[0, 1]$	**12**	$\dfrac{x^4}{(16-x^2)^{3/2}}$	$[0, 2\sqrt{2}]$
3	$\dfrac{1}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}$	$[0, 5]$	**13**	$\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$	$[0, \sqrt{3}]$
4	$\sqrt{\dfrac{2-x}{x-6}}$	$[3, 5]$	**14**	$\sqrt{\dfrac{9-2x}{2x-21}}$	$[6, 9]$
5	$\dfrac{1}{(5-x^2)^{3/2}}$	$\left[0, \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$	**15**	$\sqrt{\dfrac{6-x}{x-14}}$	$[8, 12]$
6	$\dfrac{x^4}{(1-x^2)^{3/2}}$	$\left[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$	**16**	$\sqrt{\dfrac{4-x}{x-12}}$	$[6, 10]$
7	$\dfrac{\exp\left(\sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}\right)}{(4+x)\sqrt{16-x^2}}$	$[0, 4]$	**17**	$\dfrac{1}{(9+x^2)^{3/2}}$	$[0, 3]$
8	$\sqrt{4-x^2}$	$[0, 2]$	**18**	$\dfrac{1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x}}{x+2\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^4}}$	$[1, 64]$
9	$x^2\sqrt{16-x^2}$	$[0, 4]$	**19**	$\dfrac{\exp\left(\sqrt{\dfrac{3-x}{3+x}}\right)}{(3+x)\sqrt{9-x^2}}$	$[0, 3]$
10	$x^2\sqrt{25-x^2}$	$[0, 5]$	**20**	$\dfrac{x^4}{(2-x^2)^{3/2}}$	$[0, 1]$

Задание 3.25. Исследуйте функцию, заданную интегралом с переменным верхним пределом $\int\limits_a^x f(t)\,dt$.

N	$f(x)$	a	N	$f(x)$	a
1	$\frac{x}{4}\exp\left(-\frac{x^2}{8}\right)$	0	**11**	$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\lvert x-2\rvert}{2}\right)$	0
2	$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\lvert x-1\rvert}{2}\right)$	0	**12**	$\frac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}$	0
3	$\frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}$	0	**13**	$4x^2\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$	0
4	$2x^2\exp\left(-\frac{x^2}{8}\right)$	0	**14**	$\exp\left(-\frac{(x+2)^2}{18}\right)$	0
5	$\frac{\sin x}{x}$	0	**15**	$\frac{1}{2}\frac{\exp\left(-\frac{x-1}{2}\right)}{\left(1+\exp\left(-\frac{x-1}{2}\right)\right)^2}$	0
6	$\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$	0	**16**	$\frac{1}{2}\frac{\exp\left(-\frac{x+1}{2}\right)}{\left(1+\exp\left(-\frac{x+1}{2}\right)\right)^2}$	0
7	$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{8}\right)$	0	**17**	$\frac{\sin^2 x}{x^3}$	1
8	$\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$	1	**18**	$\frac{\cos^2 x}{x^3}$	1
9	$\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{3}\right)\right)$	0	**19**	$\frac{x+12}{x^4+x^2+1}$	0
10	$\frac{x}{9}\exp\left(-\frac{x^2}{18}\right)$	0	**20**	$\frac{x}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$	0

Задание 3.26. Вычислите несобственный интеграл по неограниченному промежутку непосредственно и через предел. Постройте график допредельной функции, заданной интегралом с переменным пределом.

1. $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^4+5}$ **2.** $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}$ **3.** $\int\limits_0^\infty xe^{-2x^2}$ **4.** $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$

5. $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}$ **6.** $\int\limits_1^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}$ **7.** $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ **8.** $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x}$

9. $\int\limits_0^\infty \frac{1}{2} e^{-x^2}$ **10.** $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$ **11.** $\int\limits_0^\infty x e^{-x}$ **12.** $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^2}$

13. $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^4+2}$ **14.** $\int\limits_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}$ **15.** $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x^2 \ln x}$ **16.** $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x}$

17. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}$ **18.** $\int\limits_{\sqrt{2}}^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ **19.** $\int\limits_0^\infty \frac{x}{1+x^3}$ **20.** $\int\limits_0^\infty x^{10} e^{-x^2}$

Задание 3.27. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции по заданному отрезку непосредственно и через предел. Постройте график подынтегральной функции и график функции, заданной интегралом с переменным пределом.

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **2.** $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **3.** $\int\limits_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $\int\limits_0^1 x \ln x \, dx$ **5.** $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)x^3 \, dx}{\sqrt{x}}$ **6.** $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$

7. $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ **8.** $\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x-3)(x-2)}$ **9.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x} dx$

10. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$ **11.** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ **12.** $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)x^2 dx}{\sqrt{x}}$

13. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ **14.** $\int\limits_1^2 \frac{x \, dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ **15.** $\int\limits_0^1 \ln^5 x \, dx$

16. $\int\limits_0^1 \ln^2 x \, dx$ **17.** $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$ **18.** $\int\limits_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

19. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ **20.** $\int\limits_0^1 \ln^4 x \, dx$

Задание 3.28. Исследуйте на сходимость ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n.$$

Изобразите графики членов ряда и последовательности частичных сумм. Если удается, вычислите сумму ряда.

N	a_n	b_n	c_n	d_n
1	$\dfrac{2}{n^2+n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{2}{2n^2+1}$	$\dfrac{n!}{2^n+1}$	$\dfrac{n3^n}{7^n}$
2	$\dfrac{54}{n^2+5n+4}$	$\dfrac{\operatorname{arctg} n^2}{n^2}$	$\dfrac{2^n}{\big((n-1)!\big)^2}$	$\arcsin^n\dfrac{3}{7n}$
3	$\dfrac{72}{n^2+5n+4}$	$\dfrac{1-\sin n}{n(n^2+1)}$	$\dfrac{n!\sqrt{n}}{4^n}$	$\dfrac{(n+2)3^n}{n^n}$
4	$\dfrac{72}{n^2+6n+4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{2}{2n+1}$	$\dfrac{n!}{(3n)!}\operatorname{tg}\dfrac{1}{3^n}$	$n^2\left(\dfrac{n+3}{3n+1}\right)^n$
5	$\dfrac{36}{n^2+n+2}$	$\dfrac{\ln n}{n(n^2+1)}$	$n!\sin\dfrac{1}{2^n+1}$	$\dfrac{n^2}{\ln^n(n+2)}$
6	$\dfrac{18}{n^2-n-2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{n+4}}\sin\dfrac{1}{2n+1}$	$\dfrac{3n!}{2^n+3}$	2^n3^{2-n}
7	$\dfrac{36}{n^2-5n+4}$	$\ln\left(\dfrac{n^2+3}{n^2-n}\right)$	$\dfrac{n+1}{2^n(n-1)!}$	$\dfrac{n}{5^n}\left(\dfrac{3n+1}{n}\right)^n$
8	$\dfrac{54}{n^2-11n+28}$	$\dfrac{n+1}{n(n^2\sqrt[3]{n}-1)}$	$\dfrac{(n+1)3^n}{\big((n+2)!\big)^2}$	$\dfrac{(n+1)3^n}{7^n}$
9	$\dfrac{18}{n^2-n-2}$	$\exp\left(\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n^3+1}\right)-1$	$3n!\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2^n+3}$	$\dfrac{n}{5^n}\left(\dfrac{5n+1}{2n}\right)^n$
10	$\dfrac{12}{n^2+3n}$	$\dfrac{\operatorname{arctg} n}{n(n^2+1)}$	$\dfrac{n!}{n^{n-2}}$	$2^n\dfrac{7^{2-n}}{2^{3-n}}$
11	$\dfrac{36}{n^2+10n+10}$	$\sin\dfrac{\sqrt[4]{n}}{2n^2+1}$	$\dfrac{n!\sqrt{n+2}}{4^{n+2}}$	$\dfrac{3n^3}{\ln^n(n+3)}$
12	$\dfrac{90}{n^2-5n+4}$	$n^2\cos\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n^2+1}}-n^2$	$\dfrac{(n+12)!\sqrt{n+12)}}{2^{n+2}+12}$	$\dfrac{(n+12)2^n}{n^n}$
13	$\dfrac{72}{n^2-7n+10}$	$\dfrac{n+11}{n(n\sqrt[3]{n}+11)}$	$\dfrac{n!\sqrt{n^3+2}}{(n-1)4^{n+2}}$	$3n\left(\dfrac{n+1}{3n}\right)^n$
14	$\dfrac{54}{n^2-9n+18}$	$\dfrac{\operatorname{arctg}^3 n}{n(n^2+1)}$	$\dfrac{\operatorname{arctg}(n+1)}{3(n+3)!}$	$\dfrac{(n+1)^3}{\ln^{n+1}(n+1)}$

N	a_n	b_n	c_n	d_n
15	$\dfrac{6}{n^2-10n+24}$	$\exp\left(\dfrac{3\sqrt[3]{n}}{n^2+3}\right)-1$	$\dfrac{n!}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{(n+2)!}$	$e^n 7^{2-n}$
16	$\dfrac{8}{n^2-8n+15}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3n}}\sin\dfrac{3}{2n+3}$	$\dfrac{n!(n+1)!}{\big((n+16)!\big)^2}$	$n^2\sin^n\dfrac{3}{7n}$
17	$\dfrac{10}{n^2-6n+8}$	$\dfrac{\ln(\sqrt{n}+n)}{n^2(n+12)}$	$\dfrac{n!(n+1)!}{n^n}$	$\dfrac{3n}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{3n}\right)^n$
18	$\dfrac{18}{n^2-13n+40}$	$\dfrac{1-\sin n}{(n+1)(n+2)}$	$\dfrac{n!(2n+1)!}{\big(2(n+1)\big)!}$	$\sin^n\dfrac{5}{2n+5}$
19	$\dfrac{36}{n^2-13n+40}$	$n^2\left(\cos\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}-1\right)^2$	$\dfrac{n+19}{(n+11)!}$	$\dfrac{(n+1)3^n}{5^n}$
20	$\dfrac{12}{n^2-4n+3}$	$\ln\left(\dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right)$	$\dfrac{4^n(3n+1)!}{\big(4(n+1)\big)!}$	$\sqrt[3]{n^n}\sin^n\dfrac{1}{n^n}$

Задание 3.29. Исследуйте на сходимость знакопеременные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n.$$

Изобразите графики членов ряда и последовательности частичных сумм. Если удается, вычислите сумму ряда.

N	a_n	b_n	c_n
1	$\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}$	$\dfrac{12n+1}{\sqrt{n^4+3}}$	$\dfrac{n^2}{\sqrt{n^3+1}}$
2	$\sin\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}$	$\operatorname{tg}\dfrac{12n+1}{\sqrt{n^4+3}}$	$\dfrac{12n^2+1}{\sqrt{n^4+3}}$
3	$\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}$	$\sin\dfrac{12n+1}{\sqrt{n^3+3}}$	$\dfrac{\sqrt{n^6+2}}{\sqrt{n^3+1}}$
4	$e^{1/n^2}-1$	$\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1$	$n\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}-1\right)$
5	$\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n^3+3}}$	$\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1\right)$	$\sqrt{n}\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1\right)$
6	$\dfrac{1}{\sqrt{n^3+3}}$	$\left(2^{1/n}-1\right)$	$\dfrac{n^2-n}{\sqrt{n^3+3}}$
7	$\sin\dfrac{1}{\sqrt{n^3+3}}$	$\left(2^{1/\sqrt{n}}-1\right)^2$	$\sqrt{n}\left(2^{1/\sqrt{n}}-1\right)$

N	a_n	b_n	c_n
8	$\left(e^{1/n}-1\right)^2$	$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}$	$\sin\dfrac{n}{\sqrt{n^2+3}}$
9	$\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$	$\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$	$\left(\dfrac{3n}{2n+1}\right)^n$
10	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$	$\ln\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)$	$n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)$
11	$\dfrac{2n+3}{3n^3}$	$\left(e^{2/\sqrt{n}}-1\right)^2$	$\left(e^{2/\sqrt{n}}-1\right)^{-1}$
12	$\sin\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$	$\cos\dfrac{2}{\sqrt{n}}-1$	$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\sin\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
13	$\left(\dfrac{3n}{2n^2+1}\right)^n$	$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+13}}$	$\left(\dfrac{3n}{2n+1}\right)^n$
14	$\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}-1\right)^2$	$\dfrac{(n^2+1)\ln n}{(n+1)^3}$	$\dfrac{(n^3+1)\ln n}{(n+1)^3}$
15	$\dfrac{1}{\sqrt{n^4+12}}$	$\left(\cos\dfrac{2}{\sqrt[6]{n}}-1\right)^2$	$n\left(\cos\dfrac{2}{\sqrt[6]{n}}-1\right)^3$
16	$\sin\dfrac{1}{\sqrt{n^4+12}}$	$\dfrac{(n+1)\ln n}{n^2}$	$\dfrac{(n+1)\ln n}{n}$
17	$\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n^4+12}}$	$\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+1\right)$	$n\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+1\right)$
18	$\left(2^{1/n}-1\right)^2$	$\sin\dfrac{1}{\sqrt{3n+3}}$	$n\sin\dfrac{1}{\sqrt{3n+3}}$
19	$\cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-1$	$3^{1/n}-1$	$n\left(3^{1/n}-1\right)$
20	$\dfrac{1}{\sqrt{n^{3.2}+3.2}}$	$\ln\left(\dfrac{1}{n}+1\right)$	$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+3.2}}$

Задание 3.30. Разложите заданную функцию в ряд Тейлора по степеням и исследуйте поведение частичных сумм ряда Тейлора в окрестности нуля. Исследуйте поведение остатка ряда.

N	$f(x)$	N	$f(x)$
1	$x\sin(x-1)$	3	$\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x}-2$
2	$\dfrac{\arcsin x}{x}-1$	4	$\dfrac{1}{1-x^2}$

N	$f(x)$	N	$f(x)$
5	$\dfrac{9}{20-x-x^2}$	**13**	$x\sin^2 x$
6	$2x\sin^2\dfrac{x}{2}$	**14**	$\dfrac{7x}{12+x}$
7	$x\,\mathrm{sh}\,x$	**15**	$\ln(x^2+6x+9)$
8	$(3-e^{-x})^2$	**16**	$\dfrac{7}{12+x-x^2}$
9	$x\sqrt[3]{x-2}$	**17**	$x\,e^{-x^2}$
10	$\dfrac{5}{6-x-x^2}$	**18**	$x\,\mathrm{ch}^2 x$
11	$\ln(x^2+4x+4)$	**19**	$\dfrac{1}{1-x^4}$
12	$x\,\mathrm{ch}\,x$	**20**	$\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x}-1$

Задание 3.31. Запишите для заданной функции разложение в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Изобразите график функции и графики нескольких частичных сумм ряда Тейлора.

N	$f(x)$	x_0	N	$f(x)$	x_0
1	$\dfrac{2}{x}$	1	**11**	$\ln(2x^2)$	1
2	$\ln x$	1	**12**	e^{-x}	2
3	$\sqrt[3]{x}$	1	**13**	$x^2\,\mathrm{ch}\,x$	1
4	$\sin\dfrac{\pi}{4}x$	2	**14**	$\left(x-\dfrac{\pi}{x}\right)\sin x$	$\dfrac{\pi}{4}$
5	$\dfrac{x}{x^2-5x+6}$	5	**15**	$(x-2)^2\,\mathrm{ch}\,x$	2
6	x^5	1	**16**	$\ln\sqrt[3]{x^2}$	1
7	$\dfrac{x}{3+x}$	2	**17**	$\dfrac{x}{3-x}$	2
8	e^{-x^2}	1	**18**	x^3+1	1
9	$\sqrt[3]{2x}$	1	**19**	$\cos\dfrac{\pi}{4}x$	2
10	$\dfrac{3}{x}$	2	**20**	$\mathrm{sh}\,x$	1

Задание 3.32. Исследуйте графически поведение частичных сумм ряда Фурье заданной функции $f(x)$. Постройте графики частичных сумм для $n = 1, 2, 5, 10, 20, 50$. Вычислите значение частичных сумм ряда Фурье для $n = 10, 20, 50$ в точках $x = -\pi, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

Варианты 1–10. Выполните задание для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ (\pi - x)\dfrac{N+1}{N+2}, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

где N — номер варианта.

Варианты 11–20. Выполните задание для функции

$$f(x) = \begin{cases} -(\pi + x)\dfrac{N-10}{N-9}, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

где N — номер варианта.

Задание 3.33. Найдите для заданной функции $f(x)$ и для заданного значения погрешности ε тригонометрический многочлен наилучшего приближения наименьшей степени со среднеквадратичным отклонением, меньшим ε. Постройте график зависимости среднеквадратичного отклонения от степени многочлена.

Варианты 1–10. Выполните задание для функции

$$f(x) = \begin{cases} (x + \pi)\dfrac{N+1}{N+2}, & -\pi \le x \le 0, \\ (\pi - x)\dfrac{N+1}{N+2}, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

где N — номер варианта. Значение ε положите равным 0.03.

Варианты 11–20. Выполните задание для функции

$$f(x) = \begin{cases} -(\pi + x)\dfrac{N-10}{N-9}, & -\pi \le x \le 0, \\ (x - \pi)\dfrac{N-10}{N-9}, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

где N — номер варианта. Значение ε положите равным 0.02.

Задание 3.34. Сравните сходимость ряда Фурье для двух заданных функций разной гладкости.

Варианты 1–10. Выполните задание для функции

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ x(\pi - x)\dfrac{4(N+1)}{\pi^2(N+2)}, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x \le 0, \\ x^2(\pi - x)^2\dfrac{16(N+1)}{\pi^4(N+2)}, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

где N — номер варианта.

Варианты 11–20. Выполните задание для функции

$$f_1(x) = \begin{cases} x(\pi + x)\dfrac{4(N-10)}{\pi^2(N-9)}, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2(\pi + x)^2\dfrac{16(N-10)}{\pi^4(N-9)}, & -\pi \le x \le 0, \\ 0, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

где N — номер варианта.

Задание 3.35. Исследуйте поведение частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-L, L]$.

Варианты 1–10. Выполните задание для функции $f(x) = 2^{\frac{N+1}{N+2}x}$ на отрезке $\left[-1 - \dfrac{N+1}{N+2}, 1 + \dfrac{N+1}{N+2}\right]$, где N — номер варианта.

Варианты 11–20. Выполните задание для функции $f(x) = (x^2)^{\frac{N-10}{N-9}}$ на отрезке $\left[-1 - \dfrac{N-10}{N-9}, 1 + \dfrac{N-10}{N-9}\right]$, где N — номер варианта.

Задание 3.36. Изобразите график и линии уровня функции $z = f(x,y)$ в указанной прямоугольной области. Опишите поведение функции (укажите приближенно координаты локальных экстремумов и седловых точек, если они есть) в заданной области.

Варианты 1–10. Рассмотрите функцию $z = x^k y^m \exp\left(-\dfrac{x^2}{A} - \dfrac{y^2}{B}\right)$ в квадрате $-a < x < a$, $-a < y < a$.

N	k	m	A	B	a	N	k	m	A	B	a
1	1	1	3	4	4	**6**	2	2	2	2	2
2	2	1	3	4	4	**7**	2	2	4	2	4
3	1	2	3	4	4	**8**	2	1	4	2	4
4	2	2	3	4	4	**9**	1	2	4	2	4
5	2	2	3	2	4	**10**	1	1	3	9	3

Варианты 11–20. Рассмотрите функцию $z = x^k \times \exp\left(-\dfrac{x^2}{A} - \dfrac{y^2}{B}\right)$ в прямоугольнике $-a < x < a$, $-b < y < b$.

N	k	A	B	a	b	N	k	A	B	a	b
11	1	2	4	1	2	**16**	1	2	4	2	2
12	2	2	4	1	2	**17**	2	2	4	2	4
13	3	2	4	1	2	**18**	2	4	4	4	4
14	1	2	2	2	2	**19**	2	2	4	4	4
15	1	4	2	4	2	**20**	3	3	4	4	4

Задание 3.37. Найдите частные производные и градиент функции $u = f(x,y,z)$. Вычислите в заданной точке градиент функции и производную

по направлению из этой точки в начало координат. Найдите $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

N	$f(x, y, z)$	$(x_0,\ y_0,\ z_0)$
1	$xyz\exp(x+2y+3z)$	$(1,\ 0,\ 1)$
2	$\sin(xyz)\cos(x+2y+3z)$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
3	$(x^2-y^2+z)\sin(x+2y+3z)$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
4	$xy\exp(x+2z)$	$(1,\ 1,\ 0)$
5	$\sqrt{x^2+2xy+3xz}$	$(1,\ 1,\ 1)$
6	$xy^2\exp(x^2+2y+3z)$	$(1,\ 1,\ 1)$
7	$\sqrt{(xyz)^3}\sin\frac{xy}{z}$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
8	$\exp\frac{xy}{z}$	$(1,\ 1,\ 1)$
9	$\cos(xyz)\cos(x+2y+3z)$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
10	$\sqrt{x^2+2xyz+3z^3}$	$(1,\ 1,\ 1)$
11	$xyz^2\exp(x+2y^2+3z)$	$(1,\ 0,\ 0)$
12	$(x^2-y^2+z)\cos(x+2y+3z)$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
13	$(x^2+y^3+z^4)\exp(2x+3y^2+4z^3)$	$(1,\ 0,\ 0)$
14	$3^{xy+xz+yz}$	$(1,\ 0,\ 0)$
15	$\frac{3xyz+1}{3x+2y-z}$	$(1,\ 2,\ 3)$
16	$yz\exp(x+2z)$	$(1,\ 1,\ 1)$
17	$x\cos y+y\cos z+xyz\cos(xyz)$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
18	$\ln(x^2+y^3+xyz)$	$(1,\ 3,\ 2)$
19	$(3x+2y+z)\sin(x+2y+3z)$	$\left(\frac{\pi}{2},\ 0,\ \pi\right)$
20	$x^2yz\exp(x+2y+3z^2)$	$(1,\ 0,\ -1)$

Задание 3.38. Запишите для заданной функции $z = f(x,y)$ многочлены Тейлора нулевого, первого и второго порядка в окрестности указанной точки. Вычислите и сравните значения многочленов и функции в указанных точках. Приведите вычисленные значения в виде таблицы. Исследуйте зависимость погрешности аппроксимации функции многочленом Тейлора от расстояния между точками и от степени многочлена.

Выполните вычисления для функции из задания 3.36. Выполните вычисления в окрестности любой точки экстремума функции.

Задание 3.39. Запишите для заданной функции $z = f(x,y)$ формулу Тейлора третьего порядка в окрестности указанной точки. Найдите стационарные точки функции. Исследуйте каждую из них на экстремум. Изобразите график и линии уровня функции в окрестности стационарных точек.

Выполните вычисления для функции из задания 3.36. Выполните вычисления в окрестности любой точки экстремума функции.

Задание 3.40. Постройте график и изокванты заданной производственной функции. Вычислите предельные продукты труда и капитала, а также коэффициент заменяемости ресурсов. Постройте какую-нибудь изокванту и касательную к ней.

Выполните вычисления для производственной функции $Q = K^p L^{1-p}$ для следующих значений p.

Варианты 1–10: $p = \dfrac{N}{N+1}$, варианты 11–20: $p = \dfrac{N-10}{N-9}$, где N — номер варианта.

Задание 3.41. Изобразите график заданной функции Кобба — Дугласа двух переменных. Постройте для нее изокванты. Вычислите эластичности выпуска по ресурсам и предельную норму замены ресурсов.

Выполните вычисления для функции $\dfrac{N}{N+1}Q(K,L)$, где $Q(K,L)$ — функция из задания 3.40, а N — номер варианта.

Задание 3.42. Исследуйте поведение заданной CES-функции. Изобразите ее график и изокванты. Вычислите предельную норму замены труда капиталом и эластичность. Выполните вычисления для CES-функции $Q(K,L) = A\left(BK^{-p} + (1-B)L^{-p}\right)^{-1/p}$.

N	A	B	p	N	A	B	p
1	1.03	0.634	0.75	**11**	1.13	0.644	0.85
2	1.04	0.635	0.76	**12**	1.14	0.645	0.86
3	1.05	0.636	0.77	**13**	1.15	0.646	0.87
4	1.06	0.637	0.78	**14**	1.16	0.647	0.88
5	1.07	0.638	0.79	**15**	1.17	0.648	0.89
6	1.08	0.639	0.80	**16**	1.23	0.654	0.65
7	1.09	0.640	0.81	**17**	1.24	0.655	0.66
8	1.10	0.641	0.82	**18**	1.25	0.656	0.67
9	1.11	0.642	0.83	**19**	1.26	0.657	0.68
10	1.12	0.643	0.84	**20**	1.27	0.658	0.69

ГЛАВА 4

Задание 4.1. Найдите решение уравнения с разделяющимися переменными $y' = X(x)Y(y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Изобразите график решения.

N	$F(x, y, y') = 0$	Начальное условие
1	$(e^x + 1)\,dy + e^x\,dx = 0$	$y(0) = 0.5$
2	$y \ln y + xy' = 0$	$y(1) = e$
3	$\sqrt{4 - x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$	$y(0) = -\operatorname{tg} 2$
4	$3e^x \operatorname{tg} y\,dx + \dfrac{2 - e^x}{\cos^2 x}\,dy = 0$	$y(1) = \operatorname{arctg}(2 - e)$
5	$(1 + e^x)yy' = e^x$	$y(0) = 1$
6	$y' \sin x = y \ln y$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$
7	$\dfrac{x\,dx}{1 + y} - \dfrac{y\,dy}{1 + x} = 0$	$y(1) = 1$
8	$(1 + y^2)\,dx = x\,dy$	$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$
9	$2\sqrt{y} = y'$	$y(0) = 1$
10	$(e^x + 2)\,dy + 2e^x\,dx = 0$	$y(0) = \dfrac{1}{9}$
11	$2y \ln y + xy' = 0$	$y(1) = e$
12	$\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$	$y(0) = -1$
13	$\dfrac{x\,dx}{1 + y} - \dfrac{y\,dy}{1 + x} = 0$	$y(0) = 1$
14	$y \ln y\,dx + x\,dy = 0$	$y(1) = 1$
15	$6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2 y\,dy - 3xy^2\,dx$	$y(1) = 2$
16	$x\,dx - y\,dy = yx^2\,dy - xy^2\,dx$	$y(1) = 1$
17	$3(x^2 y + y)\,dy + \sqrt{2 + y^2}\,dx = 0$	$y(0) = 1$
18	$y' \sin x = \sin y$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
19	$\sqrt{1 - x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$	$y(0) = 0$
20	$(e^{2x} + 3)\,dy + 2e^{2x}\,dx = 0$	$y(0) = 0.25$

Задание 4.2. Решите на отрезке $[x_0, x_{end}]$ задачу Коши $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ методом Рунге — Кутты с постоянным шагом. Изобразите графики решений, вычисленных с шагами h, $2h$ и $h/2$.

Выполните вычисления для уравнений из задания 4.1. Значение $x_{end} > x_0$ выберите самостоятельно. Сравните результаты вычислений задания 4.2 и задания 4.1.

Задание 4.3. Решите задачу Коши $y_1' = f_1(x, y_1, y_2)$, $y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$, $y_1(a) = y_{1,0}$, $y_2(a) = y_{2,0}$ на отрезке $[a, b]$ методом Рунге — Кутты с постоянным шагом $h = 0.1$. Изобразите графики решений, вычисленных с шагом h, $2h$ и $h/2$.

N	$f_1(x, y_1, y_2)$	$f_2(x, y_1, y_2)$	$y_1(a)$	$y_2(a)$	a	b
1	$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+y_1^2+y_2^2}\right)$	$\sin(y_1 y_2)$	1	0	-1	1
2	$\operatorname{arctg}(x^2+y_2^2)$	$\sin(x+y_1)$	0.5	1.5	0	2
3	$x^2 y_1 + y_2$	$\cos(y_1 + x y_2)$	-1	1	0	4
4	$x^2 + y_2^2$	$x y_1 y_2$	1	0	0	5
5	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y_2^2}}$	$\frac{y_2}{\sqrt{1+x^2+y_1^2}}$	0.2	0	-1	1
6	$\sin(x^2+y_2^2)$	$\cos(x y_1)$	0	0	0	4
7	$\sin y_2$	$\cos y_1$	0.5	-0.5	-1	3
8	$x\cos(y_1+y_2)$	$\sin(y_1-y_2)$	-0.6	2	2	5
9	$\sin y_1 \cos^2 y_2$	$\cos y_1 \cos y_2$	0	0	-1	3
10	$2\sqrt{3x^2+y_1^2+y_1}$	$\sqrt{x^2+y_1^2+y_2}$	0.5	1.2	0	2
11	$\frac{y_1^2}{y_2}$	$y_1^2 - y_2$	1	1	1	3
12	$y_2 + \sqrt{x^2+y_1^2}$	$y_2\cos x - \sin 2x$	0.8	3.5	2	4
13	$\frac{y_1+x}{\exp(y_1+y_2)}$	$\frac{y_2-x}{\exp(y_1+y_2)}$	1	-1	2	4
14	$\frac{1}{3+\exp(-y_1)}$	$\frac{1}{2+\exp(-y_1)}$	0	-3	2	5
15	$\cos(y_1 y_2)$	$\sin(y_1+y_2)$	0	0	0	2
16	$y_2 \ln x$	$y_1 + y_2^2$	-2	-1	1	4

N	$f_1(x, y_1, y_2)$	$f_2(x, y_1, y_2)$	$y_1(a)$	$y_2(a)$	a	b
17	$x + y_1^2$	$(y_1 - y_2)^2$	0	1	-1	1
18	$\operatorname{arctg}(xy_2)$	$\sin y_1$	0	0	-2	1
19	$y_1 + y_2$	$\dfrac{1}{1 + y_1^2 + y_2^2}$	0	0	0	4
20	$y_1^2 + y_2^2$	$y_1 y_2$	-1	1	0	4

Задание 4.4. Найдите общее решение линейного однородного уравнения второго порядка $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Решите задачу Коши $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1$. Проверьте правильность решения. Изобразите его график.

N	a_1	a_2	$y(a)$	$y'(a)$	a
1	2	0	1	1	0
2	-4	4	0	1	0
3	2	0	0	0	$\pi/2$
4	0	1	3	0	$-\pi/2$
5	2	5	0	0	1
6	-4	4	1	1	0.3
7	6	13	-1	1	0.25
8	0	1	4	1	$\pi/2$
9	2	5	6	2	$-\pi/2$
10	-4	8	0	2	1
11	2	0	0	2	0
12	-4	4	-1	0.5	2
13	0	1	1	1	$\pi/2$
14	2	5	4	-0.5	$-\pi/2$
15	6	13	5	2	0.8
16	-4	8	0	0.5	0.75
17	2	0	1	1	-1
18	-4	4	-1	0	$\pi/2$
19	6	13	-2	2	1
20	0	1	8	0.5	0.3

Задание 4.5. Найдите общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка $L(y) = f(x)$ с оператором $L(y)$ из задания 4.4. Проверьте правильность решения.

N	$f(x)$	N	$f(x)$
1	$4e^x(\sin x + \cos x)$	**11**	$6e^x(\sin x + \cos x)$
2	$-\sin 2x$	**12**	$e^{2x}\sin 4x$
3	$e^{-3x}\cos x$	**13**	$-17\sin 2x$
4	$e^x(\sin x + \cos x)$	**14**	$3e^x(\sin x + \cos x)$
5	$10\cos x$	**15**	$e^x(-\sin x + 2\cos x)$
6	$e^{2x}\sin 5x$	**16**	$-2e^x(\sin x + \cos x)$
7	$10e^x(\sin x + \cos x)$	**17**	$e^{2x}\sin 3x$
8	$2\cos 5x + 3\sin 5x$	**18**	$e^{-3x}\cos 4x$
9	$-2\sin x$	**19**	$e^x(5\sin x - 3\cos x)$
10	$2\cos 4x + 3\sin 4x$	**20**	$-\cos x$

Задание 4.6. Найдите в указанных точках решение задачи Коши для заданной жесткой системы $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ методом матричной экспоненты и с использованием функций **Stiffb** или **Stiffr**. Матричную экспоненту вычислите приближенно, используя тейлоровское разложение. Постройте и сравните графики полученных решений.

1. $A = \begin{pmatrix} -1.800 & 23.200 & 9.700 & 8.350 \\ -51.350 & -41.500 & -40.000 & -31.350 \\ 12.175 & -0.250 & 5.000 & 2.175 \\ 5.165 & 16.800 & 30.300 & 21.500 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} 0.842 \\ 0.540 \\ -0.416 \\ 0.909 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 22.600 & 47.600 & 29.600 & 27.800 \\ -26.800 & -22.000 & -20.000 & -16.800 \\ -4.600 & -17.000 & -10.000 & -9.600 \\ 2.200 & -27.600 & -9.600 & -13.000 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} 0.909 \\ -0.416 \\ -0.654 \\ -0.757 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 37.000 & 65.333 & 42.833 & 40.583 \\ -18.917 & -15.833 & -13.333 & -12.250 \\ -13.042 & -27.083 & -18.333 & -16.375 \\ -20.583 & -52.000 & -29.500 & -30.833 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} 0.141 \\ -0.990 \\ 0.960 \\ -0.279 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 48.900 & 81.400 & 54.400 & 51.700 \\ -15.200 & -13.000 & -10.000 & -10.200 \\ -19.400 & -35.500 & -25.000 & -21.900 \\ -36.700 & -71.400 & -44.400 & -44.500 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} -0.757 \\ -0.653 \\ -0.146 \\ 0.989 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 59.800 & 96.800 & 65.300 & 62.150 \\ 13.150 & -11.150 & -8.000 & -9.150 \\ -24.925 & -43.250 & -31.000 & -26.925 \\ -50.150 & -88.800 & -57.300 & -56.500 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} -0.959 \\ 0.284 \\ -0.839 \\ -0.544 \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} 70.200 & 111.870 & 75.867 & 72.267 \\ -11.933 & -10.667 & -6.667 & 8.600 \\ -30.033 & -50.667 & -36.667 & -31.700 \\ -62.267 & -105.200 & -69.200 & -67.667 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0.960 \\ 0.960 \\ 0.844 \\ -0.537 \end{pmatrix}.$

7. $A = \begin{pmatrix} 80.314 & 126.740 & 86.243 & 82.167 \\ 11.193 & -10.214 & -5.714 & -8.336 \\ -34.904 & -57.893 & -42.143 & -36.332 \\ -73.621 & -121.033 & -80.529 & -78.357 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0.657 \\ 0.759 \\ 0.137 \\ 0.991 \end{pmatrix}.$

8. $A = \begin{pmatrix} 90.25 & 141.50 & 96.50 & 92.00 \\ -10.75 & -9.94 & -4.44 & -8.25 \\ -39.62 & -65.00 & -47.50 & -36.33 \\ -84.5 & -136.50 & -91.50 & -88.75 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0.989 \\ -0.146 \\ -0.958 \\ -0.288 \end{pmatrix}.$

9. $A = \begin{pmatrix} 100.07 & 156.18 & 106.68 & 101.73 \\ -10.510 & -9.944 & -4.444 & -8.283 \\ -39.625 & -65.000 & -47.500 & -40.875 \\ -95.061 & -151.73 & -102.23 & -98.944 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0.412 \\ -0.839 \\ 0.660 \\ -0.751 \end{pmatrix}.$

10. $A = \begin{pmatrix} 109.80 & 170.80 & 116.80 & 101.73 \\ -10.400 & -10.000 & -4.000 & -8.400 \\ -48.800 & -79.000 & -58.000 & -49.800 \\ -105.40 & -166.80 & -112.80 & -109.00 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} -0.544 \\ -0.839 \\ 0.408 \\ 0.913 \end{pmatrix}.$

11. $A = \begin{pmatrix} 119.47 & 185.38 & 126.88 & 121.03 \\ -10.395 & -10.136 & -3.636 & 8.577 \\ -53.302 & -85.932 & -63.182 & -54.211 \\ -115.58 & -181.75 & -112.80 & -109.00 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} -1.000 \\ -0.0044 \\ -1.000 \\ -0.0088 \end{pmatrix}.$

12. $A = \begin{pmatrix} 129.10 & 199.93 & 136.93 & 130.63 \\ -10.467 & -10.333 & -3.333 & -8.800 \\ -57.767 & -92.833 & -68.333 & -58.600 \\ -125.63 & -196.60 & -133.60 & -128.83 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} -0.537 \\ 0.844 \\ 0.424 \\ -0.906 \end{pmatrix}.$

13. $A = \begin{pmatrix} 138.69 & 214.46 & 146.96 & 140.21 \\ -10.596 & -10.577 & -3.077 & -9.058 \\ -62.202 & -99.712 & -73.462 & -62.971 \\ -135.60 & -211.38 & -143.88 & -138.65 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0.420 \\ 0.907 \\ 0.647 \\ 0.763 \end{pmatrix}.$

14. $A = \begin{pmatrix} 148.26 & 228.97 & 156.97 & 149.77 \\ -10.771 & -10.857 & -2.857 & -9.343 \\ -66.614 & -106.57 & -78.571 & -67.329 \\ -145.49 & -226.11 & -154.11 & -148.43 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0.991 \\ 0.137 \\ -0.963 \\ 0.271 \end{pmatrix}.$

15. $A = \begin{pmatrix} 157.80 & 243.47 & 166.97 & 459.32 \\ -10.983 & -11.167 & -2.667 & -9.650 \\ -71.008 & -113.42 & -83.667 & -71.675 \\ -155.32 & -240.80 & -164.30 & -158.17 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0.650 \\ -0.760 \\ 0.154 \\ -0.988 \end{pmatrix}.$

16. $A = \begin{pmatrix} 467.32 & 257.95 & 176.95 & 168.85 \\ -11.225 & -11.500 & -2.500 & -9.975 \\ -75.387 & -120.25 & -88.750 & -76.013 \\ -165.10 & -255.45 & -174.45 & -467.88 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} -0.288 \\ -0.958 \\ 0.834 \\ 0.551 \end{pmatrix}.$

17. $A = \begin{pmatrix} 176.84 & 272.42 & 186.92 & 178.37 \\ -11.491 & -11.853 & -2.353 & -10.315 \\ -79.754 & -127.07 & -93.824 & -80.343 \\ -174.84 & -270.07 & -184.57 & -177.56 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} -0.961 \\ -0.275 \\ -0.849 \\ 0.529 \end{pmatrix}.$

18. $A = \begin{pmatrix} 186.33 & 286.89 & 196.89 & 187.89 \\ -11.778 & -12.222 & -2.222 & -10.667 \\ -84.111 & -133.89 & -98.889 & -84.667 \\ -184.56 & -284.67 & -194.67 & -187.22 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} -0.751 \\ 0.660 \\ -0.128 \\ -0.992 \end{pmatrix}.$

19. $A = \begin{pmatrix} 195.82 & 301.35 & 206.85 & 197.40 \\ -12.082 & -12.605 & -2.105 & -11.029 \\ -88.459 & -140.70 & -103.95 & -88.986 \\ -194.24 & -299.24 & -204.74 & -196.87 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0.420 \\ 0.989 \\ 0.955 \\ 0.296 \end{pmatrix}.$

20. $A = \begin{pmatrix} 205.30 & 315.80 & 216.80 & 206.90 \\ -12.400 & -13.000 & -2.000 & -11.400 \\ -92.800 & -147.50 & -109.00 & -93.300 \\ -203.90 & -313.80 & -214.80 & -206.50 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0.913 \\ 0.408 \\ -0.667 \\ 0.745 \end{pmatrix}.$

Задание 4.7. Изобразите интегральные кривые и соответствующие им фазовые кривые системы $x_1' = f_1(x_1, x_2)$, $x_2' = f_2(x_1, x_2)$, проходящие через заданные точки. Начальные точки на фазовой плоскости выберите самостоятельно.

N	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2)$
1	x_2	$x_1^2 - x_2^4$
2	x_2	$\sin x_1$
3	$x_1(x_1 + x_2 - 2)$	$x_2(1 - x_1)$
4	$2x_1x_2$	$1 + x_2 - x_1^2 + x_2^2$
5	$x_2^4 - x_1^2$	x_1
6	$\sin x_2$	x_1
7	$-2x_1x_2$	$x_1^2 + x_2^2 - 1$
8	$x_1^2 + x_2^2 - 1$	$-2x_1x_2$
9	$3x_2$	$\sin 3x_1$
10	$3x_2$	$x_1^2 - 4x_2^4$
11	$x_1(x_1 + 2x_2 - 3)$	$5x_2(10 - 3x_1)$
12	$\sin x_1$	$\sin x_2$

N	$f_1(x_1, x_2)$	$f_2(x_1, x_2)$
13	$\sin x_2$	$\sin x_1$
14	$3\sin x_2$	$5x_1$
15	$x_2^4 - 4x_1^2$	$2x_1$
16	$1 - x_1^2 - x_2^2$	$2x_1x_2$
17	$1 + 2x_2 - 4x_1^2 + x_2^2$	$4x_1x_2$
18	$x_1(1 + x_2)$	$x_2(x_1 + x_2 + 2)$
19	x_2	$\cos x_1$
20	$x_1(x_1 + x_2 + 2)$	$x_2(1 + x_1)$

Задание 4.8. Определите характер точки покоя линейной системы $x' = a_{11}x + a_{12}y$, $y' = a_{21}x + a_{22}y$ и изобразите несколько фазовых кривых.

N	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	N	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
1	2	0	1	−5	11	−2	−5	2	2
2	−1	1	0	1	12	3	−4	1	−4
3	−1	2	0	0	13	2	0	1	1
4	3	4	1	−2	14	−2	−5	2	2
5	1	−2	3	4	15	−2	4	1	−2
6	−3	5	−1	2	16	1	−4	1	−1
7	0	1	−1	−10	17	−1	2	−3	−1
8	3	−1	2	1	18	−2	1	−1	−2
9	1	0	1	2	19	1	2	0	1
10	0	2	2	3	20	2	3	2	0

Задание 4.9. Покажите графически, что автономная система $x' = f_1(x,y)$, $y' = f_2(x,y)$ имеет предельный цикл, и определите его характер (устойчивый, неустойчивый, полуустойчивый). Начинайте строить фазовые кривые в окрестности точки (x_0, y_0).

N	$f_1(x,y)$	$f_2(x,y)$	(x_0, y_0)
1	$-y + x\left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$	$x + y\left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)$	(1, 0)
2	$(4 - 2.5y)x$	$(x - 2)y$	(1, 1)
3	y	$-(x - 0.5)y - 2x - y^3$	(−0.5, 0)
4	$x - y - x(x^2 + y^2)$	$x + y - y(x^2 + y^2)$	(0.1, 0)
5	$(2 - y)x$	$(x - 2)y$	(1, 1)

N	$f_1(x,y)$	$f_2(x,y)$	$(x_0,\ y_0)$
6	$3x-y-x(x^2+y^2)$	$x+3y-y(x^2+y^2)$	(0.3, 0)
7	$(2-y)x$	$(x-3)y$	(1, 1)
8	$1-4x+x^2y$	$3x-x^2y$	(1, 3)
9	$(3-2.5y)x$	$(x-2)y$	(1, 1)
10	$-y+x\left(9-\sqrt{x^2+y^2}\right)$	$x+y\left(9-\sqrt{x^2+y^2}\right)$	(1, 0)
11	$(2-2.5y)x$	$(x-2)y$	(1, 1)
12	y	$(1-x)y-2x-y^3$	(−0.5, 0)
13	$0.5x+y-x^3\cos x$	$0.4y-x$	(−0.4, 0)
14	$x^2y-2.5x+0.5$	$1.5x-x^2y$	(0.5, 0.5)
15	$4x-y-x(x^2+y^2)$	$x+4y-y(x^2+y^2)$	(0.4, 0)
16	$0.1x+y-x^3\cos x$	$0.1y-x$	(−0.1, 0)
17	y	$(2-x)y-2x-y^3$	(−0.5, 0)
18	y	$y-x-y^3$	(−1.5, 0)
19	$x^2y-4x+0.5$	$3x-x^2y$	(0.5, 0.5)
20	$(2-y)x$	$(x-3)y$	(1, 1)

Задание 4.10. Постройте графики решения и фазовые портреты динамической системы, моделирующей взаимодействие популяций

$$\begin{cases} x_1' = (a-bx_2)x_1, \\ x_2' = (-c+dx_1)x_2 \end{cases}$$

при заданных значениях параметров a, b, c, d. Исследуйте поведение решения, изменяя параметры.

N	a	b	c	d	N	a	b	c	d
1	4	3	2	1	9	5	4	2	1
2	4	3	2	2	10	5	4	3	1
3	4	3.5	2	1	11	5	4	2	2
4	4	3.5	2	2	12	5	4	2	3
5	4	3.5	3	1	13	5	4.5	2	1
6	4	3.5	3	2	14	4	3	2	3
7	4	3.5	4	4	15	4	3	2	4
8	4	3.5	4	3	16	4	3.5	2	3

N	a	b	c	d	N	a	b	c	d
17	5	3	2	1	19	4	3.5	2	4
18	5	3	3	1	20	4	3.5	3	3

Задание 4.11. Исследуйте поведение системы

$$\begin{cases} x_1' = (a - bx_2)x_1 - \alpha x_1^2, \\ x_2' = (-c + dx_1)x_2 - \alpha x_2^2), \end{cases}$$

моделирующей взаимодействие популяций. Выполните вычисления для значений a, b, c, d из задания 4.10 для приведенных ниже значений α.

N	α	N	α	N	α	N	α	N	α
1	0.1	5	0.05	9	0.17	13	0.3	17	0.07
2	0.15	6	0.22	10	0.18	14	0.4	18	0.09
3	0.20	7	0.12	11	0.1	15	0.5	19	0.11
4	0.25	8	0.14	12	0.2	16	0.05	20	0.10

Задание 4.12. Постройте графики решения и фазовые портреты, найдите предельные циклы динамической системы Холлинга — Тэннера

$$\begin{cases} x_1' = r\left(1 - \dfrac{x_1}{K}\right)x_1 - wx_2\dfrac{x_1}{D + x_1}, \\ x_2' = s\left(1 - \dfrac{J}{x_1}x_2\right)x_2, \end{cases}$$

моделирующей взаимодействие конкурирующих видов в условиях ограниченных ресурсов. Исследуйте поведение решения, изменяя параметры r, K, w, s, J, D.

N	r	K	w	s	J	D
1	1	7	1.5	0.2	0.5	1
2	1	7	1.7	0.2	0.5	1
3	1	7	1.9	0.2	0.5	1
4	1	7	2	0.2	0.5	1
5	1	7	1.5	0.2	0.5	2
6	1	7	1.7	0.2	0.5	2
7	1	7	1.9	0.2	0.5	2
8	1	7	2	0.2	0.5	2
9	1	7	1.5	0.2	0.5	1.5
10	1	7	1.7	0.2	0.5	1.5

N	r	K	w	s	J	D
11	1	7	1.9	0.2	0.5	1.5
12	1	7	2	0.2	0.5	1.5
13	1	7	1.5	0.2	0.5	1.5
14	1	7	1.7	0.2	0.5	1.2
15	1	8	1.9	0.2	0.5	1
16	1	8	2	0.25	0.5	1
17	1	8	1.5	0.3	0.5	1
18	1	8	1.7	0.15	0.5	1
19	1	8	1.9	.0.15	0.7	1
20	1	8	2	0.25	0.7	1

Задание 4.13. Постройте графики решения и фазовые портреты динамической системы, моделирующей выравнивание цен по уровню актива

$$\begin{cases} q' = k\big(s(p) - d(p)\big), \\ p' = -m\big(q - q_0\big) \end{cases}$$

при заданных функциях спроса $d(p) = d_0 + cp$, предложения $s(p) = ap + s_0$ и при заданных значениях параметров модели. Найдите стационарное состояние и определите его характер. Исследуйте модель, изменяя ее параметры.

N	k	a	s_0	m	d_0	c	q_0
1	0.3	20	10	0.1	50	−10	20
2	0.3	20	10	0.2	50	−10	20
3	0.3	20	10	0.3	50	−10	20
4	0.3	20	10	0.4	50	−10	20
5	0.3	20	10	0.5	50	−10	20
6	0.4	20	10	0.1	50	−10	20
7	0.4	20	10	0.2	50	−10	20
8	0.4	20	10	0.3	50	−10	20
9	0.4	20	10	0.4	50	−10	20
10	0.4	20	10	0.5	50	−10	20
11	0.3	25	10	0.1	50	−10	20
12	0.3	25	10	0.2	50	−10	20
13	0.3	25	10	0.3	50	−10	20
14	0.3	25	10	0.4	50	−10	20
15	0.3	25	10	0.5	50	−10	21

N	k	a	s_0	m	d_0	c	q_0
16	0.3	25	15	0.1	50	−10	20
17	0.3	20	15	0.2	60	−10	20
18	0.3	20	15	0.3	50	−10	22
19	0.3	20	15	0.4	50	−10	20
20	0.3	20	15	0.5	50	−10	20

ГЛАВА 5

Задание 5.1. Постройте биномиальное распределение для серии из n независимых испытаний с вероятностью успеха p, пуассоновское распределение с параметром λ, гипергеометрическое распределение с параметрами N, M, n, геометрическое распределение с параметрами n, p. Для каждого распределения выполните следующее:

- проверьте равенство $\sum\limits_{(k)} p_k = 1$, где $p_k = P(\xi = k)$;
- найдите значение k, для которого величина $P(\xi = k)$ максимальна;
- постройте графики распределения и функций распределения;
- вычислите вероятность попадания значений случайной величины в интервал (a, b).

N	n	p	λ	N	M	a	b
1	20	0.1	1.00	100	90	2	4
2	22	0.11	0.95	110	100	3	5
3	24	0.12	0.90	120	100	2	5
4	26	0.13	0.85	130	120	3	6
5	28	0.14	0.80	140	120	2	5
6	30	0.15	0.75	150	120	3	6
7	21	0.16	0.70	160	150	2	8
8	23	0.17	0.65	170	150	3	9
9	25	0.18	0.60	180	160	2	7
10	27	0.19	0.55	190	180	3	8
11	29	0.20	0.50	200	150	3	10
12	31	0.21	1.05	105	100	4	10
13	20	0.22	1.10	115	100	3	5
14	22	0.23	1.15	125	100	4	6
15	24	0.24	1.25	135	110	3	6
16	26	0.25	1.30	145	120	4	7

N	n	p	λ	N	M	a	b
17	28	0.26	1.35	155	120	3	7
18	30	0.27	1.40	165	150	4	8
19	21	0.28	1.45	175	170	3	10
20	23	0.29	1.50	185	170	4	11

Задание 5.2. Исследуйте для приведенного в задании эксперимента точность асимптотической формулы Пуассона. Вычислите вероятность события $\xi > k$ для биномиального распределения и по приближенной формуле Пуассона $\lambda = np$. Для сравнения выполните вычисления для $n_1 = 0.01n$ и $p_1 = 100p$.

Варианты 1–10. Провайдер обслуживает n абонентов сети Internet. Вероятность того, что любой абонент захочет войти в сеть в течение часа, равна p. Найти вероятность того, что в течение часа более k абонентов попытаются войти в сеть.

Варианты 11–20. Магазин продает в течение одного дня n коробок конфет, часть которых с сюрпризом. Вероятность того, что коробка с сюрпризом, равна p. Найти вероятность того, что в течение дня продано более k коробок с сюрпризом.

N	n	p	k	N	n	p	k
1	1000	0.003	3	**11**	2000	0.0020	6
2	1100	0.0029	4	**12**	2100	0.0019	3
3	1200	0.0028	5	**13**	2200	0.0018	4
4	1300	0.0027	5	**14**	2300	0.0017	6
5	1400	0.0026	4	**15**	2400	0.0016	8
6	1500	0.0025	3	**16**	2500	0.0015	5
7	1600	0.0024	3	**17**	2600	0.0014	4
8	1700	0.0023	6	**18**	2700	0.0013	3
9	1800	0.0022	9	**19**	2800	0.0012	3
10	1900	0.0021	9	**20**	2900	0.0011	4

Задание 5.3. Исследуйте для указанных значений параметров биномиального распределения точность асимптотической формулы Муавра — Лапласа. Для указанных значений n и p вычислите вероятность того, что случайная величина, имеющая биномиальное распределение, принимает значение, равное $n/2$. Проведите вычисления по формуле Бернулли и по приближенной формуле Муавра — Лапласа. Сравните результаты.

N	n	p	N	n	p
1	10, 20, 70, 100	0.70, 0.20	**3**	13, 23, 73, 100	0.73, 0.23
2	12, 22, 72, 100	0.69, 0.19	**4**	7, 17, 67, 100	0.67, 0.17

N	n	p	N	n	p
5	9, 19, 69, 100	0.71, 0.21	**13**	8, 18, 68, 100	0.72, 0.22
6	15, 25, 75, 100	0.60, 0.30	**14**	13, 23, 73, 100	0.60, 0.30
7	16, 26, 76, 100	0.59, 0.29	**15**	13, 23, 73, 100	0.59, 0.29
8	14, 24, 74, 100	0.61, 0.31	**16**	30, 50, 80, 100	0.61, 0.31
9	30, 50, 80, 100	0.50, 0.20	**17**	29, 49, 79, 100	0.50, 0.20
10	29, 49, 79, 100	0.51, 0.21	**18**	33, 43, 73, 100	0.51, 0.21
11	31, 51, 81, 100	0.49, 0.19	**19**	31, 51, 81, 100	0.55, 0.25
12	33, 43, 73, 100	0.53, 0.23	**20**	33, 43, 73, 100	0.55, 0.25

Задание 5.4. Исследуйте для указанного биномиального распределения точность интегральной формулы Муавра — Лапласа.

Варианты 1–10. Вероятность того, что произвольно выбранный абонент сети Internet — студент, равна p. Найти вероятность того, что среди n абонентов некоторого провайдера студентов не менее k_1 и не более k_2.

Варианты 11–20. Вероятность того, что человек, вошедший в магазин, купит что-нибудь, равна p. Найти вероятность того, что среди n посетителей магазина покупателей окажется не менее k_1 и не более k_2.

N	p	n	k_1	k_2	N	p	n	k_1	k_2
1	0.51	10000	4000	6000	**11**	0.61	20000	5000	7000
2	0.49	11000	4100	6100	**12**	0.62	10100	5100	7100
3	0.48	12000	4200	6200	**13**	0.63	10200	5200	7200
4	0.47	13000	4300	6300	**14**	0.63	10300	5300	7300
5	0.46	14000	4400	6400	**15**	0.64	10400	5400	7400
6	0.45	15000	4500	6500	**16**	0.65	20000	6000	8000
7	0.44	16000	4600	6600	**17**	0.66	21000	6100	8100
8	0.43	17000	4700	6700	**18**	0.67	22000	6200	8200
9	0.42	18000	4800	6800	**19**	0.68	23000	6300	8300
10	0.40	19000	4900	6900	**20**	0.39	24000	6400	8400

Задание 5.5. Найдите наименьшее число испытаний Бернулли, необходимое для того, чтобы с вероятностью, не меньшей заданной, можно было принять относительную частоту успехов за вероятность успеха в одном испытании с погрешностью, не превышающей заданной.

Варианты 1–10. Провайдер утверждает, что вероятность соединиться с сетью с первого звонка достаточно велика. Сколько нужно произвести экспериментов, чтобы с вероятностью не менее β можно было утверждать, что относительная частота соединений с первого звонка отличается от заявленной вероятности не более, чем на ε?

Варианты 11–20. Продавец утверждает, что вероятность купить коробку конфет с сюрпризом достаточно велика. Сколько коробок конфет нужно проверить, чтобы с вероятностью не менее β можно было утверждать, что относительная частота появления сюрприза отличается от заявленной вероятности не более, чем на ε?

N	β	ε	N	β	ε	N	β	ε	N	β	ε
1	0.90	0.02	**6**	0.95	0.04	**11**	0.90	0.05	**16**	0.95	0.03
2	0.91	0.03	**7**	0.94	0.05	**12**	0.91	0.07	**17**	0.94	0.02
3	0.92	0.01	**8**	0.93	0.06	**13**	0.92	0.06	**18**	0.93	0.01
4	0.93	0.02	**9**	0.92	0.07	**14**	0.93	0.05	**19**	0.92	0.15
5	0.94	0.03	**10**	0.91	0.05	**15**	0.94	0.04	**20**	0.91	0.20

Задание 5.6. Постройте графики плотности распределения и функции распределения χ^2 с указанным числом степеней свободы, равным $k = N$. Здесь N — номер варианта.

Задание 5.7. Постройте графики плотности распределения и функции распределения Стьюдента с числом степеней свободы, равным $k = N$. Здесь N — номер варианта.

Задание 5.8. Постройте графики плотности распределения и функции распределения Фишера для указанных значений n и m.

N	n	m	N	n	m	N	n	m	N	n	m
1	6	4	**6**	9	5	**11**	4	2	**16**	9	5
2	7	4	**7**	8	5	**12**	5	2	**17**	10	5
3	8	4	**8**	7	5	**13**	6	3	**18**	9	5
4	9	4	**9**	6	3	**14**	7	4	**19**	8	5
5	10	4	**10**	5	3	**15**	8	4	**20**	7	5

Задание 5.9. Постройте графики плотности распределения и функции распределения Парето для указанных значений a и ρ.

N	a	ρ	N	a	ρ	N	a	ρ	N	a	ρ
1	1	1	**6**	1.9	1	**11**	2.1	2	**16**	2.9	2
2	1.5	1	**7**	2.0	1.5	**12**	2.5	2	**17**	3.0	2.5
3	1.6	1	**8**	2.1	1.5	**13**	2.6	2	**18**	3.1	2.5
4	1.7	1	**9**	2.2	1.5	**14**	2.7	2	**19**	3.2	2.5
5	1.8	1	**10**	2.3	1.5	**15**	2.8	2	**20**	3.3	2.5

Задание 5.10. Постройте графики плотности распределения и функции распределения для логистического распределения при значениях параметров $\alpha = a$ и $\beta = \rho$ для значений a и ρ из задания 5.9.

Задание 5.11. Найдите медиану, верхнюю и нижнюю квартили, а также 95%-ную квантиль для нормального распределения $N(a,\sigma)$, a и $\sigma = \sqrt{\rho}$ для значений a и ρ из задания 5.9.

Задание 5.12. По заданному совместному распределению двух дискретных случайных величин найдите распределение каждой из них.

1.

	0	1
1	0.15	0.1
2	0.1	0.25
3	0.2	0.2

2.

	0	2
0	0.11	0.17
2	0.21	0.1
4	0.31	0.1

3.

	0	3
1	0.12	0.14
3	0.22	0.1
5	0.32	0.1

4.

	0	4
10	0.13	0.11
12	0.23	0.1
4.6	0.33	0.1

5.

	0	5
0	0.14	0.08
2.1	0.24	0.1
2.6	0.34	0.1

6.

	0	6
1.1	0.15	0.05
3.2	0.25	0.1
−4.4	0.35	0.1

7.

	0	7
0	0.09	0.23
−3.2	0.19	0.1
1.54	0.29	0.1

8.

	0	8
1	0.08	0.26
5	0.18	0.1
9	0.28	0.1

9.

	0	9
0	0.07	0.1
2	0.17	0.29
4	0.27	0.1

10.

	0	10
1	0.06	0.1
3	0.16	0.32
4	0.26	0.1

11.

	1	1.1
1	0.1	0.15
2	0.25	0.1
3	0.2	0.2

12.

	1	1.2
0	0.17	0.11
2	0.1	0.21
4	0.1	0.31

13.

	1	1.3
1	0.14	0.12
3	0.1	0.22
5	0.1	0.32

14.

	4	1.4
10	0.11	0.13
12	0.1	0.23
4.6	0.1	0.33

15.

	5	1.5
0	0.08	0.14
2.1	0.1	0.24
2.6	0.1	0.34

16.

	6	1.6
1.1	0.05	0.15
3.2	0.1	0.25
−4.4	0.1	0.35

17.

	7	1.7
0	0.23	0.09
−3.2	0.1	0.19
1.54	0.1	0.29

18.

	8	1.8
1	0.26	0.08
5	0.1	0.18
9	0.1	0.28

19.

	9	1.9
0	0.1	0.07
2	0.29	0.17
4	0.1	0.27

20.

	10	2.0
1	0.1	0.06
3	0.32	0.16
4	0.1	0.26

Задание 5.13. По заданному совместному распределению двух дискретных случайных величин найдите распределение каждой из них и проверьте их независимость. Выполните вычисления для распределений из задания 5.12 и для приведенных ниже распределений.

1.

	1	2	3
1	0.03	0.12	0.15
2	0.07	0.28	0.35

2.

	1.1	2.1	3.1
−1	0.06	0.09	0.15
2	0.14	0.21	0.35

3.

	−1.3	2	3.7
0	0.06	0.06	0.12
2	0.14	0.14	0.28

4.

	−1	0	4
−2	0.03	0.06	0.21
4	0.07	0.14	0.49

5.

	−1	2	5
0	0.03	0.09	0.18
2.5	0.07	0.21	0.42

6.

	1	2	3
1	0.03	0.12	0.15
2	0.07	0.28	0.35

7.

	1	2.6	3
−6	0.03	0.15	0.12
2	0.07	0.35	0.28

8.

	1	2	3
1	0.03	0.18	0.09
2	0.07	0.42	0.21

9.

	−9	2	3
0	0.03	0.21	0.09
2.9	0.07	0.49	0.21

10.

	1	2	10
−10	0.03	0.24	0.06
2	0.07	0.56	0.14

11.

	11	12	13
1	0.06	0.03	0.21
3	0.14	0.07	0.49

12.

	1	2	3
12	0.06	0.06	0.18
22	0.14	0.14	0.42

13.

	11	12	13
−13	0.06	0.09	0.15
13	0.14	0.21	0.35

14.

	1.4	2.4	3.4
−1.4	0.06	0.12	0.12
1.4	0.14	0.28	0.28

15.

	15	25	35
1.5	0.06	0.15	0.09
2.5	0.14	0.35	0.21

16.

	−1.6	2	3
−16	0.06	0.18	0.06
26	0.14	0.42	0.14

17.

	−1	2.7	3
17	0.06	0.21	0.03
27	0.14	0.49	0.07

18.

	2.8	2.818	3
−2.71	0.09	0.03	0.18
3.14	0.21	0.07	0.42

19.

	19	29	39
0	0.09	0.06	0.15
2	0.21	0.14	0.35

20.

	2.0	2.2	3.2
0	0.09	0.09	0.12
2.0	0.21	0.21	0.28

Задание 5.14. Вычислите распределение компонент заданной двумерной случайной величины и все их условные распределения. Постройте многоугольники соответствующих распределений. Выполните вычисления для распределений из задания 5.12.

Задание 5.15. Вычислите распределение компонент двумерной случайной величины и все их условные распределения, если эта случайная величина распределена равномерно в области $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$.

N	a	b	N	a	b	N	a	b	N	a	b
1	1	2	**6**	2.5	3.5	**11**	3	4	**16**	6	6.5
2	1.2	2.3	**7**	3.5	4.5	**12**	3.2	4.2	**17**	6.5	7.0
3	2	4	**8**	4.5	5.5	**13**	8	10	**18**	7.0	7.5
4	2.2	4.4	**9**	5.5	6.5	**14**	8.2	10.4	**19**	7.5	1.9
5	1.5	2.5	**10**	6.5	7.5	**15**	7.5	6.5	**20**	1.9	2.0

Задание 5.16. Вычислите плотности вероятностей и условные плотности вероятностей нормального случайного вектора (ξ, η) с заданными параметрами. Постройте график плотности вероятностей случайного вектора, графики плотности вероятностей компонент случайного вектора и графики условных плотностей вероятностей каждой компоненты, когда значение другой компоненты равно ее математическому ожиданию.

N	a_ξ	σ_ξ	a_η	σ_η	$k_{\xi\eta}$	N	a_ξ	σ_ξ	a_η	σ_η	$k_{\xi\eta}$
1	0	1	−0.6	3.5	0.5	**7**	1.1	3.5	0	0	0.5
2	0.1	2	−0.7	4.5	0.6	**8**	1.2	4.5	0.1	0.1	0.6
3	0.3	4	−0.9	6.5	0.6	**9**	1.3	5.5	0.2	0.2	0.5
4	0.4	5	−1	7.5	0.4	**10**	0	6.5	0.3	0.3	0.6
5	0.5	6	−1.1	8.5	0.5	**11**	−0.1	7.5	0.4	0.4	0.4
6	0.6	7	−1.2	9.5	0.6	**12**	−0.2	8.5	0.5	0.5	0.5

N	a_ξ	σ_ξ	a_η	σ_η	$k_{\xi\eta}$	N	a_ξ	σ_ξ	a_η	σ_η	$k_{\xi\eta}$
13	0.7	8	−1.3	7.4	0.4	**17**	−0.3	9.5	0.6	0.6	0.6
14	0.8	9	1.4	4.7	0.5	**18**	−0.4	1.5	0.7	0.7	0.4
15	0.9	1.5	−1.5	5.7	0.6	**19**	−0.5	2.6	0.8	0.8	0.5
16	1	2.6	1.6	7.5	0.4	**20**	−0.6	3.5	0.9	0.9	0.6

Задание 5.17. Найдите по заданному распределению $p_\xi(x)$ аргумента функцию случайной величины $\eta = f(\xi)$ и ее распределение $p_\eta(x)$.

N	$p_\xi(x)$	$\eta = f(\xi)$	N	$p_\xi(x)$	$\eta = f(\xi)$
1	$N(0,\,1)$	$2\xi+1$	**11**	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$2\xi+1$
2	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\ln\xi$	**12**	$\dfrac{1}{2}e^{-\lvert x\rvert}$	$2\xi+1$
3	$N(10,\,4)$	$e^{2\xi}$	**13**	e^{-x}	$2\xi+1$
4	e^{-x}	ξ^3	**14**	$N(-2,\,2)$	$2\xi+1$
5	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\operatorname{arctg}\xi$	**15**	e^{-2x}	$2\xi+1$
6	$N(-1,\,1)$	$\operatorname{arctg}\xi$	**16**	$N(0,\,1)$	$3\xi+2$
7	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$e^{2\xi}$	**17**	$N(0,\,1)$	$e^{3\xi}$
8	e^{-x}	$\sqrt{\xi}$	**18**	$N(0,\,1)$	ξ^3
9	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\sqrt{\xi}$	**19**	$N(0,\,1)$	$\operatorname{arctg}\xi$
10	$N(-2,\,2)$	$\operatorname{arctg}\xi$	**20**	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$3\xi+2$

Задание 5.18. Найдите плотность распределения вероятности суммы двух независимых непрерывных случайных величин, заданных своими плотностями вероятностей $p_1(x)$ и $p_2(x)$.

N	$p_1(x)$	$p_2(x)$
1	$N(0,1)$	$N(0,2)$
2	$\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[0,2],\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[0,2],\\ 0, & x\notin[0,2]\end{cases}$

N	$p_1(x)$	$p_2(x)$
3	e^{-2x}	e^{-3x}
4	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$
5	$\dfrac{x}{4}e^{-x^2/8}$	$\dfrac{x}{4}e^{-x^2/8}$
6	$N(-1,1)$	$N(1,1)$
7	$\begin{cases}1, & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$	$\begin{cases}1, & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$
8	$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}, & x\in[-2,2],\\ 0, & x\notin[-2,2]\end{cases}$	$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}, & x\in[-2,2],\\ 0, & x\notin[-2,2]\end{cases}$
9	$N(-1,1)$	$N(-1,2)$
10	$\begin{cases}\frac{1}{4}, & x\in[0,4],\\ 0, & x\notin[0,4]\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{4}, & x\in[0,4],\\ 0, & x\notin[0,4]\end{cases}$
11	$e^{-x/2}$	e^{-2x}
12	$N(-1,10)$	$N(-1,1)$
13	$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}, & x\in[-3,3],\\ 0, & x\notin[-3,3]\end{cases}$	$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}, & x\in[-3,3],\\ 0, & x\notin[-3,3]\end{cases}$
14	$\dfrac{1}{5\pi(25+x^2)}$	$\dfrac{1}{5\pi(25+x^2)}$
15	$N(0,10)$	$N(0,1)$
16	$\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[-1,1],\\ 0, & x\notin[-1,1]\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[-1,1],\\ 0, & x\notin[-1,1]\end{cases}$
17	$N(0,2)$	$N(0,2)$
18	$\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in[0,3],\\ 0, & x\notin[0,3]\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{3}, & x\in[0,3],\\ 0, & x\notin[0,3]\end{cases}$
19	e^{-3x}	e^{-3x}
20	$\dfrac{1}{2\pi(4+x^2)}$	$\dfrac{1}{2\pi(4+x^2)}$

Задание 5.19. Найдите функцию распределения произведения двух независимых случайных величин, распределенных равномерно соответственно на промежутках $[a, b]$ и $[c, d]$.

N	a	b	c	d	N	a	b	c	d
1	1	2	3	4	**11**	−1.5	1.3	0	1
2	1	2	4	5	**12**	−2.5	1.4	1	2
3	1	2	5	6	**13**	−3.5	1.5	0	1
4	1	2	6	7	**14**	−4.5	2.6	1	2
5	1	2	7	8	**15**	−5.5	3.7	0	1
6	1	2	8	9	**16**	1.2	1.6	−1.6	1.6
7	−1	2	−2	2	**17**	2.3	2.7	−1.7	1.7
8	−1	3	−2	3	**18**	3.4	3.8	−1.8	1.8
9	−1	4	−2	4	**19**	4.4	4.9	−1.9	1.9
10	−1	5	−2	5	**20**	5.5	6.0	−2.0	2.0

Задание 5.20. Вычислите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi = S(\eta)$, которая представляет собой площадь указанной в задании геометрической фигуры, для случайной величины η, распределенной равномерно на промежутке $[a, b]$.

N	**Геометрическая фигура**	a	b
1	Квадрат со стороной η	1	3
2	Правильный треугольник со стороной η	2	6
3	Круг радиуса η	3	9
4	Эллипс с полуосями η и 2η	4	4
5	Правильный шестиугольник со стороной η	5	7
6	Боковая поверхность тетраэдра с ребром η	6	8
7	Поверхность шара радиуса η	7	9
8	Прямоугольник со сторонами η и 2η	8	10
9	Осевое сечение конуса с радиусом основания η и высотой η	9	11.5
10	Прямоугольный треугольник с катетами η и 2η	10	11.5
11	Прямоугольный треугольник с катетом η и гипотенузой 2η	9	12.5
12	Квадрат со стороной η	8	12

N	Геометрическая фигура	a	b
13	Правильный треугольник со стороной η	7	10
14	Круг радиуса η	6	4
15	Эллипс с полуосями η и 2η	5	6
16	Правильный шестиугольник со стороной η	4	5
17	Боковая поверхность тетраэдра с ребром η	3	4
18	Поверхность шара радиуса η	2	4.5
19	Прямоугольник со сторонами η и 2η	1	4.5
20	Осевое сечение конуса с радиусом основания η и высотой η	1.5	3.5

Задание 5.21. Вычислите коэффициент асимметрии случайной величины ξ с заданным распределением.

N	Распределение	N	Распределение
1	Биномиальное с параметрами $n = 20$, $p = 0.3$	9	Парето с плотностью $p_\xi(x) = \begin{cases} 8x^{-3}, & x \geq 2, \\ 0, & x < 2 \end{cases}$
2	Пуассоновское с параметром $\lambda = 2$	10	Геометрическое с параметрами $n = 30$, $p = 0.35$
3	Геометрическое с параметрами $n = 20$, $p = 0.3$	11	Рэлея с плотностью $p_\xi(x) = \frac{x}{3} e^{-x^2/6}$
4	Равномерное на промежутке $[-2, 3]$	12	Равномерное на промежутке $[-2, 6]$
5	Пуассоновское с параметром $\lambda = 3$	13	Биномиальное с параметрами $n = 25$, $p = 0.15$
6	Нормальное $N(1, 4)$	14	Равномерное на промежутке $[0, 3]$
7	Экспоненциальное с плотностью $p_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$	15	Экспоненциальное с плотностью $p_\xi(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
8	Логистическое с плотностью $p_\xi(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{-(x-1)/2}}{\left(1 + e^{-(x-1)/2}\right)^2}$	16	Парето с плотностью $p_\xi(x) = \begin{cases} 18x^{-3}, & x \geq 3, \\ 0, & x < 3 \end{cases}$

N	Распределение	N	Распределение
17	$p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cos^2 x, & \lvert x\rvert\le\frac{\pi}{2},\\ 0, & \lvert x\rvert>\frac{\pi}{2}\end{cases}$	**19**	Нормальное $N(1,2)$
18	Биномиальное с параметрами $n=30$, $p=0.2$	**20**	Геометрическое с параметрами $n=25$, $p=0.25$

Задание 5.22. Вычислите эксцесс случайной величины ξ с заданным распределением. Выполните вычисления для распределений из задания 5.21.

Задание 5.23. Вычислите среднее геометрическое и среднее гармоническое неотрицательной случайной величины ξ с заданным распределением.

N	Распределение	N	Распределение
1	Биномиальное с параметрами $n=20$, $p=0.3$	**9**	Парето с плотностью $p_\xi(x)=\begin{cases}8x^{-3}, & x\ge 2,\\ 0, & x<2\end{cases}$
2	Пуассоновское с параметром $\lambda=2$	**10**	Геометрическое с параметрами $n=30$, $p=0.35$
3	Геометрическое с параметрами $n=20$, $p=0.3$	**11**	Биномиальное с параметрами $n=12$, $p=0.54$
4	Равномерное на промежутке $[2,10]$	**12**	Равномерное на промежутке $[1,6]$
5	Пуассоновское с параметром $\lambda=3$	**13**	Биномиальное с параметрами $n=25$, $p=0.15$
6	Биномиальное с параметрами $n=20$, $p=0.5$	**14**	Равномерное на промежутке $[0,3]$
7	Экспоненциальное с плотностью $p_\xi(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$	**15**	Экспоненциальное с плотностью $p_\xi(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$
8	Пуассоновское с параметром $\lambda=2.3$	**16**	Парето с плотностью $p_\xi(x)=\begin{cases}18x^{-3}, & x\ge 3,\\ 0, & x<3\end{cases}$

N	Распределение	N	Распределение
17	Парето с плотностью $p_\xi(x) = \begin{cases} 375x^{-4}, & x \geq 5, \\ 0, & x < 5 \end{cases}$	**19**	Геометрическое с параметрами $n = 30$, $p = 0.3$
18	Биномиальное с параметрами $n = 30$, $p = 0.2$	**20**	Геометрическое с параметрами $n = 25$, $p = 0.25$

Задание 5.24. Вычислите математическое ожидание дискретного двумерного случайного вектора с заданным распределением. Выполните вычисления для распределения из задания 5.12.

Задание 5.25. Вычислите дисперсию дискретного двумерного случайного вектора с заданным распределением. Выполните вычисления для распределения из задания 5.12.

Задание 5.26. Вычислите условные математические ожидания и постройте графики регрессий компонент двумерных случайных величин из заданий 5.14 и 5.15.

Задание 5.27. Вычислите ковариацию и дисперсию компонент двумерных случайных величин из заданий 5.14 и 5.15.

Задание 5.28. Вычислите ковариационную и корреляционную матрицы двумерного случайного вектора из задания 5.7.

Задание 5.29. По заданной плотности вероятностей нормального двумерного распределения (ξ, η)

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = A\exp\left\{-\frac{1}{2(1-k_{\xi\eta}^2)}\left[\left(\frac{x-a_\xi}{\sigma_\xi}\right)^2 - 2k_{\xi\eta}\frac{x-a_\xi}{\sigma_\xi}\cdot\frac{y-a_\eta}{\sigma_\eta} + \left(\frac{y-a_\eta}{\sigma_\eta}\right)^2\right]\right\}$$

найдите нормировочный множитель, вычислите ковариационную и корреляционную матрицы.

N	a_ξ	σ_ξ	a_η	σ_η	N	a_ξ	σ_ξ	a_η	σ_η
1	1	0.1	1.0	0.12	**6**	1.1	1.1	2.1	0.55
2	2	0.2	1.2	0.13	**7**	1.2	1.2	2.2	0.60
3	3	0.3	1.3	0.14	**8**	1.3	0.8	2.3	0.65
4	4	0.4	1.4	0.20	**9**	1.4	0.85	2.4	0.70
5	5	0.5	1.5	0.25	**10**	1.5	0.90	2.5	0.75

N	a_ξ	σ_ξ	a_η	σ_η	N	a_ξ	σ_ξ	a_η	σ_η
11	4	0.6	1.6	0.30	**16**	0.75	0.12	1	0.1
12	3	0.7	1.7	0.35	**17**	0.80	0.13	2	0.2
13	2	0.8	1.8	0.40	**18**	0.95	0.14	3	0.3
14	1	0.9	1.9	0.45	**19**	0.10	0.20	4	0.4
15	1.0	1.0	2.0	0.50	**20**	1.5	0.25	5	0.5

ГЛАВА 6

Задание 6.1. Вычислите максимальное, минимальное значения и размах для заданной выборки. Выполните группировку для значений $m = 10, 20$, постройте соответствующие гистограммы, полигоны частот и полигоны накопленных частот. Выполните вычисления для 100 чисел из приведенной в разд. 6.2 выборки, начиная с числа n, номер которого указан в таблице.

N	n	N	n	N	n	N	n	N	n
1	10	**5**	50	**9**	90	**13**	95	**17**	135
2	20	**6**	60	**10**	270	**14**	105	**18**	145
3	30	**7**	70	**11**	75	**15**	115	**19**	155
4	40	**8**	80	**12**	85	**16**	125	**20**	165

Задание 6.2. Для выборки, сформированной в задании 6.1, вычислите все описанные в разд. 6.2 выборочные характеристики.

Задание 6.3. Постройте для выборки, сформированной в задании 6.1, 95%-ный коридор для функции распределения исследуемой случайной величины.

Задание 6.4. Сгенерируйте выборку объема n значений случайной величины с заданным непрерывным распределением и выполните полный предварительный ее анализ для числа интервалов группировки, равного целой части размаха и доверительной вероятности α. Постройте графики плотности вероятностей и функции распределения и сравните их с полученными графиками соответствующих выборочных функций.

N	**Распределение**	**Параметры**	n	α
1	Биномиальное	$p = 0.1$	50	0.95
2	Геометрическое	$p = 0.2$	50	0.90
3	Распределение Пуассона	$\lambda = 3$	50	0.95
4	Равномерное	$a = 0,\ b = 3$	50	0.90

N	Распределение	Параметры	n	α
5	Нормальное	$a=1,\ \sigma=3$	50	0.95
6	Экспоненциальное	$\lambda=3$	50	0.90
7	χ^2-распределение	$n=5$	50	0.95
8	Распределение Стьюдента	$n=7$	50	0.90
9	Распределение Фишера	$n=5,\ m=7$	50	0.95
10	Логистическое	$\alpha=0.3,\ \beta=2$	50	0.90
11	Биномиальное	$p=0.3$	60	0.95
12	Геометрическое	$p=0.4$	70	0.90
13	Распределение Пуассона	$\lambda=2$	80	0.95
14	Равномерное	$a=1,\ b=5$	90	0.90
15	Нормальное	$a=-1,\ \sigma=2$	100	0.95
16	Экспоненциальное	$\lambda=5$	60	0.90
17	χ^2-распределение	$n=3$	70	0.95
18	Распределение Стьюдента	$n=5$	80	0.90
19	Распределение Фишера	$n=3,\ m=5$	90	0.95
20	Логистическое	$\alpha=2,\ \beta=3$	100	0.90

Задание 6.5. Найдите состоятельные несмещенные оценки математического ожидания $M\xi$ и дисперсии $D\xi$ случайной величины ξ по заданным в задании 6.1 выборочным значениям.

Задание 6.6. Смоделируйте несколько выборок значений случайной величины, имеющей биномиальное распределение с заданным значением параметра p. Вычислите для каждой выборки оценку параметра p и сравните с заданным значением. Представьте результаты вычислений графически.

N	p	N	p	N	p	N	p	N	p
1	0.1	5	0.11	9	0.15	13	0.21	17	0.31
2	0.2	6	0.12	10	0.25	14	0.22	18	0.32
3	0.3	7	0.13	11	0.35	15	0.23	19	0.33
4	0.4	8	0.14	12	0.45	16	0.24	20	0.34

Задание 6.7. Смоделируйте несколько выборок разного объема значений случайной величины, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0,\theta]$ для значения $\theta = N/2$ (N — номер варианта), и найдите оценки $\widehat{\theta}^{(1)}$ и $\widehat{\theta}^{(3)}$ параметра θ. Постройте график зависимости $\widehat{\theta}^{(1)}$ и $\widehat{\theta}^{(3)}$ от объема выборки.

Задание 6.8. Смоделируйте несколько выборок объема n значений случайной величины ξ, имеющей распределение Пуассона с параметром $\lambda = 0.1N$, где N — номер варианта. Для какой-нибудь одной выборки постройте график функции правдоподобия. Найдите оценку максимального правдоподобия параметра λ как функцию объема выборки. Выполните вычисления для $n = 10N, 20N, \ldots, 50N$ при $N \leq 10$ и для $n = N, 2N, \ldots, 10N$ при $N > 10$. Изобразите на графике зависимость оценки от объема выборки. Сравните полученные оценки с заданным значением параметра.

Задание 6.9. Смоделируйте несколько выборок объема n значений случайной величины ξ, имеющей экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 0.1N$, где N — номер варианта. Для какой-нибудь одной выборки постройте график функции правдоподобия. Найдите оценку максимального правдоподобия параметра λ как функцию объема выборки. Выполните вычисления для $n = 10N, 20N, \ldots, 50N$ при $N \leq 10$ и для $n = N, 2N, \ldots, 10N$ при $N > 10$. Изобразите на графике зависимость оценки от объема выборки. Сравните полученные оценки с заданным значением параметра.

Задание 6.10. Смоделируйте выборку объема $n = 200$ значений случайной величины ξ, имеющей распределение Лапласа с указанными параметрами θ_1 и θ_2. Найдите оценки максимального правдоподобия параметров θ_1 и θ_2.

N	θ_1	θ_2	N	θ_1	θ_2	N	θ_1	θ_2	N	θ_1	θ_2
1	1	1.5	**6**	3.5	4	**11**	1.5	1	**16**	4	3.5
2	1.5	2	**7**	4	4.5	**12**	2	1.5	**17**	4.5	4
3	2	2.5	**8**	4.5	5	**13**	2.5	2	**18**	5	4.5
4	2.5	3	**9**	5	5.5	**14**	3	2.5	**19**	5.5	5
5	3	3.5	**10**	5.5	1	**15**	3.5	3	**20**	1	5.5

Задание 6.11. Найдите доверительные интервалы для математического ожидания $M\xi$ и дисперсии $D\xi$ по заданной выборке, сформированной в задании 6.1.

Задание 6.12. Найдите доверительный интервал для параметра λ по заданной выборке из пуассоновского распределения. Сгенерируйте выборку, выбрав в качестве значения λ величину, равную $0.1N$, где N — номер варианта.

Задание 6.13. Найдите доверительный интервал для вероятности события по заданным значениям числа испытаний n и числа m появлений события в серии из n испытаний.

N	n	m	N	n	m	N	n	m	N	n	m
1	50	35	**4**	50	25	**7**	40	22	**10**	65	32
2	60	35	**5**	60	25	**8**	45	24	**11**	70	34
3	70	35	**6**	70	27	**9**	50	26	**12**	75	36

N	n	m	N	n	m	N	n	m	N	n	m
13	80	35	**15**	80	34	**17**	55	28	**19**	80	38
14	90	35	**16**	90	33	**18**	60	30	**20**	85	40

Задание 6.14. Найдите доверительный интервал для коэффициента корреляции по заданной выборке $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, из двумерной случайной величины.

1.

x	1.682	0.386	−1.913	−1.754	−1.656	0.655	−0.704	2.704
y	−11.852	16.851	−11.315	4.084	−10.834	−8.111	5.832	−10.758
x	−2.656	0.861	0.975	3.621	−1.195	1.202	3.193	
y	−3.552	8.853	19.607	−2.048	−3.235	10.168	11.248	

2.

x	0.492	1.141	1.746	1.963	1.894	0.62	−1.287	1.031
y	13.179	10.359	5.913	7.178	10.179	14.364	20.682	6.851
x	−0.201	−1.626	4.329	−2.372	−3.288	0.873	−2.758	
y	8.606	4.25	36.788	12.15	−32.098	12.904	−10.121	

3.

x	−0.847	0.278	−1.298	0.794	−1.65	3.9	−5.352	1.84
y	−17.867	4.642	4.802	24.515	6.313	−7.856	−26.851	36.354
x	4.458	2.27	2.451	−1.843	−3.052	1.028	3.049	
y	22.944	8.644	−1.023	−13.816	−24.199	−7.076	24.014	

4.

x	1.991	1.619	−2.023	−0.727	3.314	0.147	−0.563	−0.813
y	−6.922	9.229	15.093	1.123	−21.609	9.451	−22.941	2.193
x	0.894	1.092	−0.058	0.266	0.945	−1.444	−0.169	
y	−12.419	−7.153	−2.961	0.026	4.406	17.23	−2.743	

5.

x	−1.124	−2.081	−0.953	−0.514	−0.196	−1.853	−0.469	−0.613
y	6.97	4.261	6.42	−3.659	3.114	6.043	4.598	22.696
x	−2.188	−0.091	−0.434	−2.971	0.642	0.928	−5.095	
y	8.84	−1.422	14.659	25.827	−13.594	13.093	6.626	

6.

x	−2.7	−0.931	−0.257	1.383	−0.315	−3.05	0.054	0.835
y	−14.902	−18.113	6.138	13.813	−0.227	4.927	2.576	1.184
x	1.661	3.333	−1.12	0.377	−2.28	−5.092	3.124	
y	−14.433	1.527	11.866	2.121	−6.254	1.58	13.972	

7.

x	−0.564	−0.519	3.022	−1.669	−0.446	−2.146	−0.498	−3.789
y	18.648	−29.637	11.949	−4.221	8.611	10.646	−0.823	7.915
x	2.741	−1.77	−3.803	−1.949	1.352	1.143	−0.883	
y	−12.198	24.134	12.219	−0.105	6.862	−11.786	−12.537	

8.

x	−4.987	3.874	1.606	3.361	1.687	0.991	−11.994	−6.09
y	−6.904	9.675	6.019	9.419	6.966	5.52	−21.116	−9.901
x	−0.056	−5.972	−1.238	−0.763	−2.87	−6.29	2.405	
y	3.872	−9.468	2.273	−0.222	−1.214	−7.188	7.575	

9.

x	−0.111	0.167	−0.783	−2.572	0.558	1.016	0.348	1.772
y	−0.611	−9.194	−6.395	−13.155	−7.037	−0.359	−0.399	−2.346
x	2.111	3.516	−2.694	6.034	3.04	0.847	0.101	
y	8.943	−0.641	−0.814	6.623	−2.174	−4.059	0.442	

10.

x	−0.825	−0.658	−0.832	1.2	−0.193	−2.05	−0.605	−0.315
y	10.575	1.408	−23.196	15.557	−6.333	−8.882	−11.582	−16.36
x	2.35	−0.637	−0.503	2.115	−0.801	4.427	0.264	
y	−3.379	−15.29	1.772	0.362	−4.942	1.712	15.249	

11.

x	0.682	−0.614	−2.913	−2.754	−2.656	−0.345	−1.704	1.704
y	−12.852	15.851	−12.315	3.084	−11.834	−9.111	4.832	−11.758
x	−3.656	−0.139	−0.025	2.621	−2.195	0.202	2.193	
y	−4.552	7.853	18.607	−3.048	−4.235	9.168	10.248	

12.

x	−1.105	0.868	1.941	−1.477	−0.076	−1.043	0.372	−1.043
y	4.269	9.783	12.154	−13.444	8.797	−7.24	16.169	3.91
x	−1.279	−2.292	0.206	1.623	−0.455	−4.076	−0.941	
y	3.935	15.171	−3.238	20.272	$-3.433 \cdot 10^{-3}$	−9.358	−8.341	

13.

x	−2.07	0.404	−1.96	2.793	1.692	−1.82	−2.143	0.822
y	2.249	−16.375	−12.108	6.09	14.304	−8.687	−7.723	22.213
x	−1.079	−0.725	0.447	1.559	−0.194	−1.236	−4.506	
y	−3.647	2.218	11.291	−5.649	7.16	24.184	11.975	

14.

x	−1.644	−0.878	−0.89	1.999	−3.507	0.173	−4.158	−3.645
y	−2.026	12.799	13.037	19.017	23.779	12.654	11.919	0.929
x	0.938	−1.381	−3.606	1.339	−0.148	−1.209	−2.392	
y	3.771	14.492	8.348	−3.705	−8.184	−3.405	12.577	

15.

x	−0.551	−0.23	−0.106	−2.775	2.319	−0.615	−1.054	−3.185
y	−10.951	12.784	−3.606	4.269	15.325	0.205	21.012	9.51
x	−4.728	1.495	−2.232	−0.731	1.397	−1.224	−1.171	
y	27.754	−2.242	5.799	4.826	−10.824	−1.957	16.399	

16.

x	−1.912	4.523	−0.222	−0.542	1.264	−0.949	−0.513	−1.208
y	−4.39	−5.245	6.113	1.272	7.447	−5.868	−5.683	−20.858
x	1.409	−1.813	1.332	−0.333	0.411	−2.15	0.864	
y	4.818	−2.028	−10.5	2.677	1.962	0.443	21.922	

17.

x	−1.061	0.591	−2.272	1.438	−0.786	0.227	−2.45	−1.358
y	1.108	−5.42	−6.696	−15.749	0.604	5.6	6.927	−12.176
x	−3.014	−1.388	0.569	−0.116	−0.417	$-4.585 \cdot 10^{-3}$	−1.467	
y	14.867	0.183	−4.233	−19.772	0.14	4.523	−9.801	

18.

x	−3.612	−0.67	−0.437	6.001	6.926	4.594	8.662	−3.548
y	−4.652	2.623	2.925	16.764	19.384	14.043	21.13	−1.25
x	0.138	6.892	4.024	4.64	−2.018	−2.123	0.896	
y	5.092	17.666	13.011	12.939	−1.254	0.277	4.883	

19.

x	2.181	−0.277	−1.102	2.222	−1.287	−0.043	−1.992	0.773
y	1.131	−7.359	−5.862	−1.53	−2.391	3.705	−3.384	4.14
x	2.882	1.373	−3.02	1.332	−2.51	1.501	3.809	
y	−6.567	3.948	−9.05	−2.653	−18.095	−4.123	−9.65	

20.

x	0.14	0.875	−0.399	−3.334	0.029	−0.517	−0.859	−0.424
y	4.499	−11.776	−7.779	1.058	−4.034	−2.842	−10.317	6.482
x	0.039	0.379	0.278	−4.657	0.782	0.732	4.636	
y	12.36	−20.694	15.673	−6.931	22.99	−1.26	18.032	

Задание 6.15. Смоделируйте выборку 100 значений нормально распределенной случайной величины с указанными параметрами. Сформулируйте нулевую гипотезу о величине математического ожидания (при известной дисперсии) и проверьте для заданных уровней значимости три альтернативные гипотезы.

N	a	σ	N	a	σ	N	a	σ	N	a	σ
1	0.1	1.5	**4**	2.2	4	**7**	1.5	0.1	**10**	4	2.2
2	0.2	2	**5**	3.1	4.5	**8**	2	0.2	**11**	4.5	3.1
3	1.1	2.5	**6**	3.2	5	**9**	2.5	1.1	**12**	5	3.2

N	a	σ	N	a	σ	N	a	σ	N	a	σ
13	1.2	3	**15**	4.1	5.5	**17**	3	1.2	**19**	5.5	4.1
14	2.1	3.5	**16**	4.2	6	**18**	3.5	2.1	**20**	6	4.2

Задание 6.16. Смоделируйте выборку 100 значений нормально распределенной случайной величины с параметрами из задания 6.15. Сформулируйте нулевую гипотезу о величине математического ожидания (при неизвестной дисперсии) и проверьте для заданных уровней значимости три альтернативные гипотезы.

Задание 6.17. Для выборки из задания 6.15 сформулируйте нулевую гипотезу о величине дисперсии и проверьте для заданных уровней значимости три альтернативные гипотезы.

Задание 6.18. Смоделируйте две выборки из 100 и 120 значений нормально распределенной случайной величины с параметрами из задания 6.15. Сформулируйте нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий и проверьте для заданных уровней значимости три альтернативные гипотезы.

Задание 6.19. Для выборок из задания 6.18 сформулируйте нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий (полагая, что дисперсии неизвестны и равны) и проверьте для заданных уровней значимости три альтернативные гипотезы.

Задание 6.20. Для заданной в условии выборки вычислите регрессию и найдите доверительные интервалы коэффициентов регрессии и дисперсии для заданной доверительной вероятности. Вычислите полосу и коридор регрессии. Изобразите выборку графически на одном графике с линией регрессии. Изобразите графически полосу и коридор регрессии.

1.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	−1.45	−1.829	−1.247	−1.051	−1.241	−0.988	−0.766	−0.504
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	−0.339	0.075	0.088	0.318	0.987	0.858	1.626	

2.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	−2.169	−1.376	−0.974	−0.312	−0.314	−0.715	−0.312	1.119
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	0.92	0.999	1.046	1.295	1.411	1.884	2.835	

3.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	0.484	0.628	0.282	0.676	1.482	1.207	1.301	1.463
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	1.919	2.149	2.176	2.425	2.727	2.568	2.96	

4.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	−0.139	0.661	1.404	0.928	1.736	1.762	1.765	2.617
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	2.787	2.735	2.72	3.312	3.502	4.082	4.197	

5.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	2.016	2.073	2.442	2.708	2.956	2.907	3.315	3.493
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	3.457	3.971	4.12	3.939	4.681	4.924	4.221	

6.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	2.318	2.451	2.917	2.954	3.486	3.725	4.106	4.936
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	4.678	4.859	5.611	6.017	5.46	6.586	6.15	

7.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	3.911	3.893	4.704	4.993	4.935	5.477	5.384	5.489
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	5.202	5.714	6.524	6.348	6.516	7.136	7.069	

8.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	3.972	4.811	4.923	5.355	5.821	5.789	6.266	6.857
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	6.206	6.857	7.366	7.527	7.962	8.402	8.569	

9.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	2.258	0.738	1.479	1.094	1.177	1.126	0.523	0.741
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	−0.364	0.673	0.259	−0.378	−0.568	−1.266	−1.376	

10.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	2.235	2.849	2.237	2.63	1.761	2.163	1.813	1.707
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	1.137	1.348	0.799	0.997	0.273	0.057	−0.321	

11.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	4.005	3.637	2.987	3.19	3.102	3.236	2.68	2.241
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	2.258	2.249	1.958	1.188	1.501	1.035	0.911	

12.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	4.592	4.775	4.487	4.204	3.147	3.943	3.543	3.622
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	2.608	2.776	2.767	2.509	2.732	1.804	2.016	

13.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	5.892	5.103	5.624	5.197	4.749	4.653	4.253	4.249
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	4.555	3.955	4.076	3.869	3.241	2.782	2.667	

14.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	7.689	7.513	7.314	6.951	6.632	6.515	5.653	5.61
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	5.076	4.768	4.503	4.224	3.35	3.869	3.405	

15.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	4.874	4.996	5.073	5.438	5.356	5.214	5.502	5.64
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	6.088	5.798	5.916	6.357	6.077	6.859	6.416	

16.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	10.217	9.632	8.604	9.345	8.472	8.207	7.739	7.278
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	7.208	6.73	6.933	6.434	6.15	5.736	6.092	

17.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	−2.83	−2.633	−2.227	−1.281	−2.609	−1.574	−1.986	−1.48
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	−0.829	−1.305	−1.065	−0.552	−0.941	−0.55	0.168	

18.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	−3.388	−3.367	−3.459	−3.025	−2.191	−1.763	−1.605	−1.658
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	−1.433	−1.135	−0.824	−0.663	0.591	0.038	0.321	

19.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	−3.831	−3.335	−2.974	−3.287	−2.876	−2.821	−2.409	−2.421
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	−2.257	−2.209	−1.634	−1.222	−1.333	−1.676	−1.006	

20.

x	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2
y	−5.315	−5.622	−5.509	−4.718	−4.679	−4.235	−3.742	−3.459
x	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
y	−2.848	−3.381	−3.083	−2.167	−1.688	−1.325	−1.641	

Задание 6.21. Установите влияние объема продаж товара в зависимости от типа используемой рекламы для заданного значения α. Установите меру влияния каждого типа рекламы. Определите параметры и постройте плотности вероятностей распределения числа продаж для каждого типа рекламы.

1.

Тип рекламы	Год					
	1991	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
A	2.391	3.001	4.473	3.228	3.387	3.276
B	4.324	4.106	2.56	2.82	2.82	4.127
C	2.336	1.92	1.849	2.035	3.002	
D	2.28	2.581	3.636	1.865		

2.

Тип рекламы	Год					
	1992	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**
A	3.251	3.146	3.386	2.572	2.374	5.743
B	3.742	2.848	4.683	3.647	2.917	3.067
C	2.983	3.029	3.238	3.442	3.214	
D	2.384	1.547	4.27	3.874		

3.

Тип рекламы	Год					
	1991	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
A	3.697	3.865	2.46	2.505	2.507	3.133
B	3.318	1.944	5.649	5.212	4.629	3.594
C	4.338	4.307	3.734	2.876	3.919	
D	3.364	2.723	5.403	2.388		

4.

Тип рекламы	Год					
	1993	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**
A	1.547	4.783	5.961	4.976	5.058	3.126
B	3.582	5.418	6.327	6.049	4.313	5.458
C	4.446	3.278	3.436	3.502	3.689	
D	3.582	4.226	3.664	3.754		

5.

Тип рекламы	Год					
	1992	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**
A	4.878	5.965	5.058	2.955	3.265	6.656
B	6.16	5.498	4.739	4.584	4.032	4.552
C	5.504	5.351	5.184	3.545	4.128	
D	5.946	4.521	4.202	4.089		

6.

Тип рекламы	Год					
	1991	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
A	5.357	5.447	4.929	5.075	5.38	4.305
B	5.879	4.683	6.182	7.513	5.183	6.708
C	4.206	3.26	4.137	3.806	4.646	
D	4.092	4.465	5.852	5.724		

7.

Тип рекламы	Год					
	1990	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**
A	4.423	4.468	6.238	6.457	4.778	5.228
B	6.386	6.661	6.474	6.078	6.277	5.73
C	5.777	4.737	5.05	5.554	5.052	
D	5.339	6.077	5.313	4.082		

8.

Тип рекламы	Год					
	1991	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
A	5.979	6.331	6.703	7.455	5.451	6.125
B	5.929	4.663	8.361	6.591	5.377	5.527
C	6.205	6.464	5.177	7.476	6.536	
D	7.167	6.435	4.859	6.894		

9.

Тип рекламы	Год					
	1992	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**
A	5.643	7.473	6.345	6.247	7.509	6.708
B	7.53	6.997	7.871	6.896	6.627	8.164
C	6.141	4.66	7.599	5.569	4.654	
D	5.488	6.973	6.879	5.968		

10.

Тип рекламы	Год					
	1993	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**
A	6.383	7.135	4.706	7.203	6.194	5.452
B	8.659	6.424	6.567	9.984	8.156	9.1
C	7.248	7.768	6.478	8.373	4.415	
D	7.238	6.682	7.532	7.977		

11.

Тип рекламы	Год					
	1992	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**
A	5.18	6.13	3.242	2.737	4.143	3.819
B	3.68	4.38	4.166	5.719	3.046	4.56
C	1.628	4.569	4.164	5.173	4.798	
D	4.396	2.731	3.689	4.158		

12.

Тип рекламы	Год					
	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	4.015	0.872	4.523	3.792	4.813	1.828
B	5.141	6.307	6.242	3.95	4.999	5.633
C	3.389	3.542	3.019	2.035	3.757	
D	4.009	3.641	4.425	4.611		

13.

Тип рекламы	Год					
	1990	1991	1992	1993	1994	1995
A	5.884	2.468	7.268	5.622	4.416	4.005
B	5.838	3.679	6.32	5.488	4.581	4.961
C	4.037	4.495	5.594	4.961	5.413	
D	5.785	5.555	5.482	6.156		

14.

Тип рекламы	Год					
	1991	1992	1993	1994	1995	1996
A	5.884	2.468	7.268	5.622	4.416	4.005
B	5.838	3.679	6.32	5.488	4.581	4.961
C	3.228	3.948	5.802	4.335	5.51	
D	5.486	3.917	2.967	3.281		

15.

Тип рекламы	Год					
	1992	1993	1994	1995	1996	1997
A	4.594	5.535	4.678	4.65	4.777	4.853
B	3.751	6.752	6.153	6.471	8.436	4.842
C	7.315	5.734	4.394	5.137	4.9	
D	4.921	3.966	6.971	4.089		

16.

Тип рекламы	Год					
	1993	1994	1995	1996	1997	1998
A	7.557	5.92	4.594	5.17	5.25	5.167
B	7.139	6.473	5.584	6.275	6.414	7.689
C	5.26	5.324	6.576	5.182	7.682	
D	5.691	5.183	5.751	4.476		

17.

Тип рекламы	Год					
	1992	1993	1994	1995	1996	1997
A	5.29	4.973	7.7	7.619	6.171	6.169
B	6.271	7.356	7.254	7.668	9.036	7.239
C	8.395	7.35	4.682	8.497	6.396	
D	6.524	5.909	5.32	6.161		

18.

Тип рекламы	Год					
	1991	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
A	6.008	7.856	7.125	7.183	6.764	9.169
B	9.358	7.759	9.815	9.206	9.676	9.163
C	7.664	6.311	8.285	6.824	7.619	
D	6.643	7.484	4.305	6.98		

19.

Тип рекламы	Год					
	1990	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**
A	6.231	6.709	7.204	6.372	8.121	6.491
B	6.922	8.707	7.314	8.602	8.446	9.736
C	9.024	5.944	6.545	7.39	7.379	
D	8.133	10.868	5.268	8.328		

20.

Тип рекламы	Год					
	1991	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**
A	6.583	7.708	9.359	6.883	7.027	8.174
B	7.016	7.717	9.614	7.353	9.254	8.426
C	4.233	5.909	8.165	7.664	7.31	
D	8.132	8.386	7.011	6.569		

Задание 6.22. Проведите двухфакторный дисперсионный анализ данных из таблицы варианта.

1.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2.335	3.071	3.719	4.654
A_2	3.77	3.497	5.38	4.476
A_3	2.974	3.042	5.233	5.238

2.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2.335	3.071	3.719	4.654
A_2	3.77	3.497	5.38	4.476
A_3	2.974	3.042	5.233	5.238

3.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4.76	5.449	5.733	7.057
A_2	5.911	6.13	6.425	6.382
A_3	6.966	6.653	7.068	7.153

4.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5.693	6.437	6.066	6.374
A_2	5.768	6.716	8.049	8.312
A_3	7.259	7.545	7.989	8.631

5.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6.77	7.073	7.624	8.147
A_2	7.832	7.974	8.415	9.075
A_3	8.76	9.158	9.274	9.533

6.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2.609	3.055	5.013	4.53
A_2	4.191	4.452	5.683	4.647
A_3	6.067	5.446	3.665	5.621

7.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3.871	3.389	3.858	4.723
A_2	5.68	5.408	4.998	5.628
A_3	6.432	6.397	6.057	7.201

8.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6.417	4.323	4.567	6.608
A_2	6.087	5.186	7.393	6.151
A_3	6.498	5.695	8.256	7.669

9.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5.661	6.629	7.079	5.453
A_2	7.845	6.9	7.733	7.232
A_3	6.774	7.106	7.795	7.938

10.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6.014	7.907	6.628	7.882
A_2	7.305	7.514	8.079	8.219
A_3	8.764	8.51	9.255	9.773

11.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3.676	4.838	3.876	4.223
A_2	4.969	5.807	5.919	7.903
A_3	6.241	6.234	6.364	5.888

12.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3.836	5.468	5.784	5.593
A_2	5.978	6.131	6.724	7.264
A_3	7.098	6.954	7.346	8.136

13.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4.36	6.763	6.001	3.935
A_2	5.622	6.062	8.202	7.596
A_3	7.278	7.508	8.831	7.603

14.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5.082	6.763	6.001	3.935
A_2	5.622	6.062	8.202	7.596
A_3	7.278	7.508	8.831	7.603

15.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5.265	6.998	6.032	8.851
A_2	9.656	7.239	7.552	9.684
A_3	9.16	8.084	10.504	9.045

16.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7.566	7.098	8.521	8.484
A_2	7.952	8.948	11.464	11.139
A_3	9.562	9.723	10.42	12.53

17.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2.887	3.46	6.206	5.975
A_2	6.917	5.433	6.272	7.404
A_3	5.218	6.804	5.767	8.859

18.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7.278	4.691	6.00	7.25
A_2	5.829	4.144	5.517	8.567
A_3	7.652	9.663	6.699	7.994

19.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8.304	7.532	6.213	6.939
A_2	8.155	6.605	8.469	7.14
A_3	9.926	10.092	9.143	10.383

20.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8.208	7.943	7.453	8.69
A_2	8.262	8.593	10.689	11.233
A_3	10.516	7.808	10.31	11.254

ЛИТЕРАТУРА

1. Афифи Ф., Эйзен С. **Статистический анализ.** Подход с использованием ЭВМ. - М.: Мир, 1982.
2. Бахвалов Н.С. **Численные методы. -** М.: Наука, 1975.
3. Васин А.П., Павлоцкая Л.М., Плис А.И., Сливина Н.А. **Компьютерные занятия по высшей математике.** - М.: Изд-во МЭИ, 1997.
4. Воеводин В.В. **Линейная алгебра.** - М.: Наука, 1980.
5. **Высшая математика для экономистов** / Под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: Банки и биржи, 1998.
6. Гальперин В.М., Гребенников П.И., Леусский А.И., Тарасевич Л.С. **Макроэкономика.** - СПб: Экономическая школа, 1994.
7. Доугерти К. **Введение в эконометрику** / Пер. с англ. - М.: Инфра-М, 1997.
8. Дьяконов В.П. **Справочник по Mathcad Plus 7.0 Pro.** - М.: СК Пресс, 1998.
9. Замков 0.0., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. **Математические методы в экономике.** - М: ДИС, 1997.
10. Иванов Ю.Н. **Экономические доктрины.** Теория потребления. - М.: Наука,1997.
11. Иванов Ю.Н., Токарев В.В., Уздемир А.П. **Математическое описание элементов экономики. -** М.: Наука, 1994.
12. Ильин В.А, Позняк Э.Г. **Основы математического анализа. -** М.: Наука, 1980.
13. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. **Математический анализ. -** М.: Изд-во МГУ, 1987.
14. **Исследование операций в экономике** / Под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: Банки и биржи, 1997.
15. Колемаев В.А. и др. **Теория вероятностей и математическая статистика.** - М.: Высшая школа, 1991.
16. Колесников А.Н. **Краткий курс математики для экономистов.** - М.: Инфра-М, 1997.
17. Королюк В.С. и др. **Справочник по теории вероятностей и математической статистике.** - Киев: Наукова думка, 1976.
18. Кузнецов Л.А. **Сборник заданий по высшей математике. -** М.: Высшая школа, 1994.
19. Курицкий Б. **Поиск оптимальных решений средствами Excel** 7.0. - СПб, BHV, 1997.

20. Леман Э. **Проверка статистических гипотез.** - М.: Наука, 1979.
21. Леонтьев В. В. **Межотраслевая экономика.** - М.: Экономика, 1997.
22. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. **Основы методов оптимизации.** - М.: Изд-во МАИ, 1995.
23. Mathcad 6.0 Plus. **Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95** / Пер. с англ. - М.: Филин, 1996.
24. **Mathcad 7. User's Guide.** - MathSoft, 1997.
25. Мальцев А.И. **Основы линейной алгебры.** - М.: Наука, 1970.
26. Мину М. **Математическое программирование.** Теория и алгоритмы. - М.: Наука, 1992.
27. Очков В.Ф. **Mathcad 7 Pro для студентов и инженеров.** - М.: Компьютер пресс, 1998.
28. Петровский И.Г. **Лекции по теории дифференциальных уравнений.** - М.: Изд-во МГУ, 1984.
29. Плис А.И., Сливина Н.А. **Лабораторный практикум по высшей математике.** - М.: Высшая школа, 1994.
30. Севостьянов Б-А. **Курс теории вероятностей и математической статистики.** - М.: Наука, 1982.
31. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. **Математика в экономике.** - М.: Финансы и статистика, 1998.
32. **Справочник по математике для экономистов** / Под ред. В.И. Ермакова. - М.: Высшая школа, 1997.
33. Стренг Г. **Линейная алгебра и ее применения** / Пер. с англ. - М.: Мир, 1980.
34. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. **Рассказы о прикладной математике.** - М.: Наука, 1979.
35. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. **Статистический анализ данных на компьютере** / Под ред. В.Э. Фигурнова. - М.: Инфра-М, 1998.
36. Федорюк М.В. **Обыкновенные дифференциальные уравнения. -** М.: Наука, 1980.
37. Фихтенгольц Г.М. **Курс дифференциального и интегрального исчисления.** - М.: Наука, 1969.
38. Чистяков В.П. **Курс теории вероятностей.** - М.: Высшая школа, 1982.
39. Эрлих А.А. **Технический анализ товарных и финансовых рынков.** - М.: Инфра-М, 1996.
40. Эрроусмит Д., Плейс К. **Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями** / Пер. с англ. - М.: Мир, 1986.